$$\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1^{-1}-1.\,1.^{-2}(-z)+\frac{-1.-2.1.^{-3}}{2}(-z)^2$$

$$+\frac{-1.-2.-3.1^{-4}}{2.3.}(-z)^3+\ldots.$$

$=1+z+z^2+z^3+\ldots\ldots\ldots$ resultado que puede comprobarse dividiendo 1 por $1-z$.

Sea $(a+b-c)^4$. Haremos primero $(b-c)=d$, desarrollaremos la potencia de $a+d$, y luego reemplazaremos por d su valor elevado á sus respectivas potencias.

$$(a+b-c)^4=(a+d)^4$$
$$(a+d)^4=a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4$$
$$(a+b-c)^4=a^4+4a^3(b-c)+6a^2(b-c)^2+4a(b-c)^3+(b-c)^4$$
$$(a+b-c)^4=a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2(b^2-2bc+c^2)+4a(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+$$
$$b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$$
$$(a+b-c)^4=a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2b^2-12a^2bc+6a^2c^2$$
$$+4ab^3-12ab^2c+12abc^2-4ac^3+b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$$

Por este procedimiento puede elevarse á cualquiera potencia un trinomio y un polinomio, sea cual fuere el número de sus términos.

Sea por último determinar el 6° término de la série $(a-b)^8$. Habrá ántes del término que se va á formar 5 términos, cuyo número 5 nos indica los factores de que constará tanto el numerador como el denominador del coeficiente, así como las unidades que hemos de disminuir del exponente 8 para formar el de a, y el exponente del 2° término b.

El término será $\dfrac{8(8-1)\,(8-2)\,(8-3)\,(8-4)}{1.2.3.4.5.}a^{8-5}b^5$

ejecutando las restas y poniendo el signo, se tiene:

$$-\frac{8.7.6.5.4.}{1.2.3.4.5.}a^3b^5$$

ponemos el signo ménos porque la cantidad negativa b está elevada á una potencia impar.

Reduciendo, resulta que el término 6° de la série será:

$$-56a^3b^5$$

como comprobacion debe tenerse que el coeficiente ha de ser número entero, y que la suma de los exponentes $3+5$ ha de ser igual al exponente de la potencia del binomio.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

308.—Definiciones.—Se dice que una ecuacion es de 2° grado cuando contiene la incógnita elevada á la 2ª potencia, como x^2 ó cuando contiene un producto de dos incógnitas como $x\,y$; y como cuando una cuestion matemática conduce á una ecuacion de esta naturaleza no es posible resolverla por medio de las reglas dadas, vamos á ocuparnos en este capítulo de indicar los procedimientos que deben emplearse en tales casos

Puede suceder que una ecuacion no contenga más que el cuadrado de la incógnita en uno ó en varios términos sin contener la incógnita elevada á la 1ª potencia, como $3x^2=b$. En este caso la ecuacion de 2° grado se llama *pura, incompleta* ó de *dos términos.*

Se le llama de *dos términos* porque por complicada que sea una ecuacion, siempre puede reducirse á la forma $ax^2=b$, que consta de dos términos únicamente.

Por ejemplo $\qquad x^2+7+\dfrac{x^2}{2}=80-\dfrac{x^2}{6}-6x^2$

Quitando los denominadores: $\qquad 6x^2+42+3x^2=480-x^2-36x^2$

Trasladando y reduciendo $\qquad 46x^2=438$

haciendo $46=a$, $438=b$, se tiene la primera ecuacion reducida á la forma: $\qquad ax^2=b$

Cuando una ecuacion de 2° grado, además del cuadrado de la incógnita contiene ésta elevada á la primera potencia, se le llama *mixta, completa,* ó de *tres términos.*

En este caso por complicada que sea la ecuacion, quitando los denominadores, trasladando, y reduciendo se le podrá reducir á la forma general.

$$ax^2\pm bx=\pm c$$

ecuacion que consta de tres términos.

Sucede á veces que una ecuacion parece á primera vista de primer grado siendo de segundo. Por ejemplo:

$3ax+10-\dfrac{b}{x}=a$, contiene x elevada solamente á la primera potencia; pero quitando los denominadores da

$3ax^2+10x-b=ax$ $\qquad$ ecuacion que realmente es de 2° grado.

Recíprocamente la ecuacion: $\quad ax-3x^2=8x$ que parece de 2° grado; dividiendo todos sus términos por x se trasforma en otra de primer grado. En consecuencia, para determinar el grado de una ecuacion es necesario préviamente ejecutar las operaciones indicadas, quitar los denominadores y radicales, y simplificar, cuando es posible, dividiendo por la incógnita todos los términos.

309.—ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.—Hemos dicho que ecuacion incompleta de segundo grado es aquella en la que la incógnita está elevada únicamente á la segunda potencia. Para resolver una ecuacion de este género, se sigue la siguiente:

REGLA.—*Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro de la ecuacion todos los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se saca como factor comun á x^2: se divide el segundo miembro de la ecuacion por el factor de x^2: y el valor de x será igual á la raíz cuadrada del segundo miembro, tomando el resultado con el signo de ambigüedad $\pm$.*

Por ejemplo: $\frac{3x^2}{2}+a+x^2=\frac{bx^2}{4}+20$

quitando los denominadores: $6x^2+4a+4x^2=bx^2+80$

trasladando $6x^2+4x^2-bx^2=80-4a$

reduciendo y sacando como factor $x^2(10-b)=80-4a$

despejando á x^2 $x^2=\frac{80-4a}{10-b}$

extrayendo la raíz á los dos miembros $x=\pm\sqrt{\frac{80-4a}{10-b}}$

El fundamento de las cuatro primeras operaciones lo hemos dado ya al tratar de las ecuaciones de primer grado. La última está fundada en que las raíces cuadradas de cantidades iguales, son iguales, y en que la raíz algebráica de una cantidad tiene dos valores iguales con signo contrario (289).

Toda ecuacion incompleta de segundo grado despues de haber quitado los denominadores, de haber trasladado al primer miembro los términos que contienen x^2 y al segundo los demás, y de haber sacado x^2 como factor comun puede reducirse á la forma general

$$ax^2=b$$

de la que se saca $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

En general x tendrá dos valores: uno positivo y otro negativo, pudiendo desecharse uno de ellos por alguna condicion especial del problema.

Si $\frac{b}{a}$ fuese negativo la cuestion seria absurda ó imposible, porque hemos demostrado (295) que la raíz par de una cantidad negativa es un valor imaginario.

310.—ECUACIONES COMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.—Este género de ecuaciones despues de haber quitado los denominadores, de haber trasladado al primer miembro de la ecuacion los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás, y de haber sacado como factor comun x^2 y x se les podrá dar la forma

$$ax^2\pm bx=\pm c \quad\ldots\ldots\ldots (1)$$

el término ax^2 podrá hacerse siempre positivo cambiando signos á todos los términos de la ecuacion cuando sea necesario.

Dividiendo por a

$$x^2\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{c}{a} \quad\ldots\ldots\ldots (2)$$

si para simplificar hacemos $\frac{b}{a}=p$, y $\frac{c}{a}=q$,

la ecuacion (2) tomará la forma

$$x^2\pm px=\pm q \quad\ldots\ldots\ldots (3)$$

Para trasformar esta ecuacion en otra de primer grado debemos procurar que el miembro en que entra x^2 sea un cuadrado perfecto, para que extrayendo la raíz cuadrada á los dos miembros desaparezca el cuadrado de la incógnita. A este fin compararemos la expresion

$$x^2\pm px$$

con el trinomio $a^2\pm 2b.\ a+b^2$

cuya raíz cuadrada (290) es $a\pm b$. Esto es, sabemos que

$$a^2\pm 2b.\ a+b^2=(a\pm b)^2$$

si hacemos $a=x$, y $2b=p$: sustituyendo se tendria

$$x^2\pm p.\ x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x\pm\frac{p}{2}\right)^2$$

En consecuencia, si á los dos miembros de la ecuacion

$$x^2\pm px=\pm q$$

les agregamos el cuadrado de la mitad de p, no se alterará, y se trasformará en

$$x^2\pm px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}\pm q$$

cuyo primer miembro tiene raiz exacta (290). Si despues de haber agregado el cuadrado de la mitad del factor de x extraemos raíz á los dos miembros de la ecuacion, obtendremos la ecuacion de primer grado:

$$x \pm \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$$

trasladando al segundo miembro $\pm \frac{p}{2}$, se obtiene definitivamente el valor de

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$$

En lo que antecede se funda la siguiente

REGLA PARA LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.—*Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se sacan* x² *y* x *como factores comunes, se hace que el cuadrado de la incógnita no tenga coeficiente, y que sea positivo. En seguida se completa el cuadrado agregando á los dos miembros de la ecuacion el cuadrado de la mitad del factor de* x: *se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros, y se despeja* x.

Por ejemplo, sea por resolver la ecuacion

$$\tfrac{10}{2}\, x - 2x^2 = \tfrac{9}{8}$$

Quitando los denominadores

$$40\, x - 16\, x^2 = 9$$

Quitando el coeficiente de x^2

$$\tfrac{40}{16}\, x - x^2 = \tfrac{9}{16}$$

Cambiando los signos

$$x^2 - \tfrac{40}{16}\, x = -\tfrac{9}{16}$$

Completando el cuadrado

$$x^2 - \tfrac{40}{16}\, x + (\tfrac{40}{32})^2 = (\tfrac{40}{32})^2 - \tfrac{9}{16}$$

Extrayendo la raíz

$$x - \tfrac{40}{32} = \pm\sqrt{(\tfrac{40}{32})^2 - \tfrac{9}{16}}$$

Despejando á x
$$x = \frac{40}{32} \pm \sqrt{\left(\frac{40}{32}\right)^2 - \frac{9}{16}}$$

Simplificando los quebrados
$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{4}{4}$$

Los valores de x serán
$$x = \frac{9}{4}, \text{ ó } x = \frac{1}{4}$$

Una vez traida la ecuacion á la forma $x^2 \pm px = \pm q$, no es necesario completar el cuadrado, ni extraer la raíz y despejar á x; pues segun se habrá observado en las operaciones anteriores, el valor de la incognita puede determinarse desde luego por la siguiente

REGLA.—*El valor de* x *en una ecuacion de segundo grado reducida á la forma* $x^2 \pm px = q$ *es igual á la mitad del factor de* x *tomado con signo contrario, más ó ménos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad y de las cantidades conocidas, tomadas con los signos que lleven en el segundo miembro de la ecuacion.*

Así en $x^2 + px = q$, se tiene $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

y en $x^2 - px = -q$, se tiene $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Esta regla es de muy frecuente aplicacion.

Por ejemplo, la ecuacion $x^2 + 6x = 27$
da inmediatamente $x = -3 \pm \sqrt{9 + 27}$

$$x = 3, \quad \text{ó } x = -9$$

EJERCICIOS.—Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{x} + \frac{x}{b}$$

Resolucion $x = \pm\sqrt{ab}$

$$\frac{x-a}{b} - 1 = \frac{b+x}{x}$$

R. $x = \frac{a + 2b \pm \sqrt{a^2 + 4ab + 8b^2}}{2}$

$$\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{x+2b}{a+b} = 2$$

R. $x' = \frac{3a+b}{2}, \; x'' = \frac{3a-b}{2}$

$$6(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{3}) = 0$$

R. $x' = \frac{1}{2}, \quad x'' = -\frac{1}{3}$

311.—PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO.—Para plantear los problemas de segundo grado, se sigue la regla dada (264) para los de primer grado: la dificultad consiste en comprender la cuestion, y en expresar las condiciones del problema con ayuda de los símbolos algebráicos y del corto número de operaciones que conocemos.

I.—Una persona vende un anillo en 11 pesos, y haciendo la cuenta de la ganancia que ha tenido sobre el precio de compra, resulta que ha ganado por 100, tanto cuanto le costó el anillo: se quiere saber el precio del anillo.

Llamándolo x, la ganancia será $11 - x$, y tendremos:

$$x : 11-x :: 100 : x$$

formando el producto de extremos y medios

$$x^2=1100-100x$$
$$x^2+100x=1100$$
$$x=-50\pm\sqrt{50^2+1100}$$

lo que da $x=+10$, desechando el valor negativo.

II.—Encontrar un número tal, que sumándolo con 94, y restándolo de este número, el producto de la suma por la diferencia, sea 8512.

$$(94+x)\ (94-x)=8512$$

Resolviendo la ecuacion se obtiene

$$x=18$$

III.—Habiéndose hecho un gasto de 800 pesos entre varias personas, resultó en el momento de hacer el pago, que 3 de ellas no tenian con qué pagar su parte, por cuyo motivo cada una de las restantes tuvo que dar \$60 más de lo que antes le correspondia. Se pregunta ¿cuál es el número total de personas que debian cubrir los 800 pesos?

Llamando x el número de personas se tiene la ecuacion:

$$\frac{800}{x}=\frac{800}{x-3}-60$$

Resolviéndola se obtiene $x=8$

IV.—Dividir a en dos partes tales que m veces la primera, multiplicada por n veces la segunda, dé por producto p.

Si una parte es x la otra será $a-x$, y se tiene la ecuacion,

$$mx.n(a-x)=p$$

la que da
$$x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$$

V.—Hallar dos números cuya suma sea 60, y la suma de sus cuadrados 1872.

Un número será x, y el otro $60-x$. El problema se planteará como sigue:

$$x^2+(60-x)^2=1872$$

desarrollando y resolviendo esta ecuacion se tiene

$$x=36$$
$$60-x=24$$

312.—**Ecuaciones de segundo grado con varias incognitas.**—Para resolver los problemas que dan lugar por lo ménos á una ecuacion de segundo grado y á tantas ecuaciones como incógnitas, se emplea uno de los tres métodos de eliminacion que dejamos explicados al tratar de las ecuaciones de primer grado; pero debemos advertir que algunas veces se obtiene una ecuacion final de más de segundo grado en la cual tendrá que emplearse algun artificio de cálculo con el objeto de reducirla siempre que sea posible al segundo grado.

313.—Problemas.—I. Encontrar dos números cuyo producto sea 750, y cuyo cociente sea $3\frac{1}{3}$.

Tendremos $xy=750$........(1)

$$\frac{x}{y}=3\tfrac{1}{2}\text{..........(2)}$$

La 2ª ecuacion da $x=3\frac{1}{3}y$...(3)

Sustituyendo en la 1ª $3\frac{1}{3}y^2=750$

Despejando á $y=\sqrt{\frac{750}{3\frac{1}{3}}}=\sqrt{\frac{2250}{10}}=\pm 15$

Sustituyendo en la (3) $x=3\frac{1}{3}.\times 15=\frac{150}{3}=50$

En general este problema tiene por objeto encontrar dos números cuyo producto sea a, y cuyo cociente sea b.

Se tiene $xy=a$, $\frac{x}{y}=b$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$x=\sqrt{ab},\qquad y=\sqrt{\tfrac{a}{b}}$$

de cuyas fórmulas puede hacerse una aplicacion al problema propuesto.

II. Encontrar dos números que estén en la razon de 3 : 4, y que la suma de sus cuadrados sea igual á 324900.

Tendremos $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ $\qquad x^2+y^2=324900$

Despejando á x $\qquad x=\frac{3}{4}y$

Sustituyendo en la 2ª ecuacion $\frac{9}{16}y^2+y^2=324900=\frac{25}{16}y^2$

Despejando á y $\qquad y=\sqrt{\frac{16\times 324900}{25}}=456$

Sustituyendo en el valor de x $\qquad x=\frac{3}{4}.456=342$

Resuelto este problema considerándolo de un modo general, tendremos que buscar dos números cuyos valores estén en la relacion $\frac{m}{n}$ y la suma de sus cuadrados sea s.

Tendremos $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ $x^2+y^2=s$

y resueltas dan: $x=\frac{m\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ $y=\frac{n\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

III. Encontrar tres números tales que si se multiplican de dos en dos, y cada uno de los tres productos se divide por el otro número que no entra en él como factor, se obtienen los cocientes a, b, c.

Tendremos $\frac{xy}{z}=a$, $\frac{xz}{y}=b$, $\frac{yz}{x}=c$

quitando los denominadores tendremos el sistema de tres ecuaciones

$$xy=az$$
$$xz=by$$
$$yz=cx$$

Despejando $x=\frac{az}{y}$ y sustituyendo en las dos siguientes se obtiene:

$$az^2=by^2$$
$$y^2z=caz$$

Despejando $y^2=\frac{az^2}{b}$ y sustituyendo en la siguiente

$\frac{az^2}{b}=ca$, de donde $z=\sqrt{bc}$

Sustituyéndolo en el valor de y^2 se tiene $y=\sqrt{ac}$

y estos en el valor de $x=\frac{az}{y}$ da $x=\sqrt{ab}$

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

314.—RAÍCES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y PROPIEDADES DE LAS RAÍCES.—Frecuentemente sucede en Algebra que despues de haber obtenido un resultado, es conveniente *examinar qué alteraciones produce en dicho resultado determinada variacion del valor de algunas de las cantidades que lo forman, con el objeto de descubrir todas las relaciones que existen entre las cantidades conocidas y las desconocidas en el caso ó cuestion que se considera y en todos los semejantes, y esto es lo que en Algebra se llama discutir.*

En este capítulo nos ocuparemos de discutir las ecuaciones de segundo grado, á fin de determinar las relaciones que hay entre todas las cantidades que las forman.

Segun hemos dicho, las ecuaciones de segundo grado pueden ser puras ó mixtas, segun que contengan la incógnita elevada solamente á la segunda potencia, ó que la contengan elevada á la segunda y tambien á la primera potencia; y hemos demostrado (309) que en ambos casos la incógnita tiene dos valores que satisfacen igualmente la ecuacion. Vamos ahora á demostrar esto mismo siguiendo otro procedimiento.

I.—Sea la ecuacion incompleta ó pura en su forma más simple y general:

$$x^2=a\ldots\ldots\ldots(1)$$

si se supone que r sea un valor de x que satisface la ecuacion tendremos:

$$r^2=a\ldots\ldots\ldots(2)$$

Restando la ecuacion (2) de la (1), se obtiene:

$$x^2-r^2=0$$

Sustituyendo por x^2-r^2 su valor (251) $(x+r)(x-r)$ se tiene:

$$(x+r)(x-r)=0$$

y como para que el producto de dos cantidades sea igual á cero, es necesario que uno de los dos factores sea igual á cero, pudiendo serlo cualquiera de ellos, tendremos que para que subsista la anterior ecuacion es necesario tener $x+r=0$, ó bien $x-r=0$, verificándose la ecuacion, tanto con la primera condicion, como con la segunda.

De la 1ª ecuacion de condicion $x+r=0$ se saca $x=-r$.

De la 2ª ecuacion de condicion $x-r=0$ se saca $x=r$.

Luego en toda ecuacion pura de 2° grado, x tendrá dos valores que diferirán en el signo.

II.—Sea la ecuacion mixta de 2° grado en su forma más simple y general

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots\ldots(1)$$

sobrentendiéndose que x, p y q pueden tener cualquier signo. Si suponemos que el valor r dado á x verifica esta ecuacion, tendremos:

$$r^2+pr+q=0\ldots\ldots\ldots(2)$$

restando la (2) de la (1) $x^2-r^2+p(x-r)=0$

poniendo por x^2-r^2 su valor $(x+r)(x-r)+p(x-r)=0$

sacando $(x-r)$ como factor comun, se tiene:

$$(x-r)(x+r+p)=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

para que esta ecuacion se verifique, es preciso que se satisfaga una de