Tendremos $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ $\quad x^2+y^2=s$

y resueltas dan: $\quad x=\frac{m\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}} \quad y=\frac{n\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

III. Encontrar tres números tales que si se multiplican de dos en dos, y cada uno de los tres productos se divide por el otro número que no entra en él como factor, se obtienen los cocientes $a$, $b$, $c$.

Tendremos $\frac{xy}{z}=a$, $\frac{xz}{y}=b$, $\frac{yz}{x}=c$

quitando los denominadores tendremos el sistema de tres ecuaciones

$$xy=az$$
$$xz=by$$
$$yz=cx$$

Despejando $x=\frac{az}{y}$ y sustituyendo en las dos siguientes se obtiene:

$$az^2=by^2$$
$$y^2z=caz$$

Despejando $y^2=\frac{az^2}{b}$ y sustituyendo en la siguiente

$\frac{az^2}{b}=ca$, de donde $\quad z=\sqrt{bc}$

Sustituyéndolo en el valor de $y^2$ se tiene $\quad y=\sqrt{ac}$

y estos en el valor de $x=\frac{az}{y}$ da $\quad x=\sqrt{ab}$

## DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

314.—Raíces de las ecuaciones de segundo grado y propiedades de las raíces.—Frecuentemente sucede en Algebra que despues de haber obtenido un resultado, es conveniente *examinar qué alteraciones produce en dicho resultado determinada variacion del valor de algunas de las cantidades que lo forman, con el objeto de descubrir todas las relaciones que existen entre las cantidades conocidas y las desconocidas en el caso ó cuestion que se considera y en todos los semejantes, y esto es lo que en Algebra se llama discutir.*

En este capítulo nos ocuparemos de discutir las ecuaciones de segundo grado, á fin de determinar las relaciones que hay entre todas las cantidades que las forman.



Segun hemos dicho, las ecuaciones de segundo grado pueden ser puras ó mixtas, segun que contengan la incógnita elevada solamente á la segunda potencia, ó que la contengan elevada á la segunda y tambien á la primera potencia; y hemos demostrado (309) que en ambos casos la incógnita tiene dos valores que satisfacen igualmente la ecuacion. Vamos ahora á demostrar esto mismo siguiendo otro procedimiento.

I.—Sea la ecuacion incompleta ó pura en su forma más simple y general:

$$x^2=a\ldots\ldots..(1)$$

si se supone que $r$ sea un valor de $x$ que satisface la ecuacion tendremos:

$$r^2=a\ldots\ldots..(2)$$

Restando la ecuacion (2) de la (1), se obtiene:

$$x^2-r^2=0$$

Sustituyendo por $x^2-r^2$ su valor (251) $(x+r)\,(x-r)$ se tiene:

$$(x+r)\,(x-r)=0$$

y como para que el producto de dos cantidades sea igual á cero, es necesario que uno de los dos factores sea igual á cero, pudiendo serlo cualquiera de ellos, tendremos que para que subsista la anterior ecuacion es necesario tener $x+r=0$, ó bien $x-r=0$, verificándose la ecuacion, tanto con la primera condicion, como con la segunda.

De la 1ª ecuacion de condicion $x+r=0$ se saca $x=-r$.

De la 2ª ecuacion de condicion $x-r=0$ se saca $x=r$.

*Luego en toda ecuacion pura de 2° grado, x tendrá dos valores que diferirán en el signo.*

II.—Sea la ecuacion mixta de 2° grado en su forma más simple y general

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots..(1)$$

sobrentendiéndose que $x$, $p$ y $q$ pueden tener cualquier signo. Si suponemos que el valor $r$ dado á $x$ verifica esta ecuacion, tendremos:

$$r^2+pr+q=0\ldots\ldots..(2)$$

restando la (2) de la (1) $\quad x^2-r^2+p\,(x-r)=0$

poniendo por $x^2-r^2$ su valor $\quad (x+r)\,(x-r)+p\,(x-r)=0$

sacando $(x-r)$ como factor comun, se tiene:

$$(x-r)\,(x+r+p)=0\ldots\ldots..(3)$$

para que esta ecuacion se verifique, es preciso que se satisfaga una de las dos ecuaciones de condicion siguientes, verificándose con cualquiera de ellas:

$$x-r=0$$
$$x+r+p=0$$

la 1ª da para $x$ el valor $\qquad x=r$

la 2ª da: $\qquad x=-r-p$

Se ve, pues, que en toda ecuacion mixta de 2° grado, la incógnita tiene dos valores, y que si uno de ellos es $r$, el 2° valor se determina cambiándole signo y restando el coeficiente $p$ que en la ecuacion lleva $x$.

Definicion.—*Estos valores de la incógnita, que sustituidos en lugar de ella en la ecuacion, hacen el primer miembro idéntico al segundo, se llaman raíces de la ecuacion.*

$r$ y $-r-p$ son las raíces de la ecuacion $x^2+px+q=0$

Si llamamos $r'$ la 2ª raíz, cuyo valor es $-r-p$, fácilmente podremos deducirlo del de $r$ cuando esta raíz sea conocida. Por ejemplo: sabemos que uno de los valores de $x$ de la ecuacion

$$x^2+px+q=0$$

es $\qquad x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad$ que llamaremos $r$

$$r=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Conforme á la regla anterior se tendrá:

$$r'=-r-p=+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}-p=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$r'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

que es el segundo valor de $x$ que se obtiene por el método comun.

III.—Supuesto que de la ecuacion

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots\ldots(1)$$

llamando $r$ una de sus raíces, hemos obtenido, (ecuacion (3))

$$(x-r)\,(x+r+p)=0\ldots\ldots\ldots(2)$$

y como $\qquad r'=-r-p. \qquad$ cambiando signos $\qquad -r'=r+p$

sustituyendo en la ecuacion (2) se trasforma en

$$(x-r)\,(x-r')=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

comparando la (1) con la (3), tendremos:

$$x^2+px+q=(x-r)\,(x-r')$$



De cuya ecuacion inferimos que *en toda ecuacion de 2° grado de la forma $x^2+px+q=0$ el primer miembro es igual al producto de las diferencias entre $x$ y las raíces $r$ y $r'$ de la ecuacion.*

IV.—Una vez que las raíces de la ecuacion

$$x^2+px+q=0$$

son

$$r=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$r'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}\ldots\ldots\ldots(2)$$

sumando estas ecuaciones se tiene:

$$r+r'=-p$$

luego *la suma de las raíces de una ecuacion de la forma $x^2+px+q=0$ es igual al coeficiente $p$ de $x$ tomado como signo contrario al que tiene en la ecuacion.*

V.—Si se multiplica la ecuacion (1) por la (2), atendiendo á que la primera es la suma de $-\frac{p}{2}$ con la expresion radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ y la (2) es la diferencia de las mismas cantidades, y se recuerda que el producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia de sus cuadrados (251) se tiene:

$$rr'=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

reduciendo $\qquad rr'=q$

luego *el producto de las raíces de la ecuacion* $x^2+px+q=0$ *es igual al término conocido* $q$ *afectado del signo que tiene en el primer miembro de la ecuacion.*

Sea por ejemplo: $\qquad x^2+6x-27=0$

resolviéndola se tiene $\qquad x=-3\pm\sqrt{27+9}$

las raíces de la ecuacion serán $\qquad r=3,\ $ y $\ r'=-9$

la segunda raíz debe ser igual á $-3$, ménos 6, coeficiente de $x$, $=-9$

$(x-r)\,(x-r')=(x-3)\,(x+9)=x^2+6x-27$, que es el primer miembro de la ecuacion.

La suma de las raíces $\qquad r+r'=3-9=-6$

coeficiente de $x$ con signo contrario al que tiene en la ecuacion.

El producto de las raíces $rr'=3\times-9=-27$ valor del término conocido con el signo que tiene en el primer miembro de la ecuacion.

VI.—Conocidas las raíces de una ecuacion de 2° grado se puede formar ésta, supuesto que la suma de las raíces expresa el coeficiente de $x$

con signo contrario, y que su producto es el valor de $q$, cantidad conocida independiente de $x$ con el signo que tiene en el primer miembro de la ecuacion.

Si por ejemplo, conocidas las raíces de una ecuacion de 2° grado cuyos valores son 3 y $-9$, se quiere reconstruir la ecuacion de donde proceden, tomaríamos la suma $3-9=-6$ con signo contrario para coeficiente de $x$, y su producto $3\times-9=-27$ para valor del término conocido en el primer miembro de la ecuacion, la cual sería

$$x^2+6x-27=0$$

Igualmente podria obtenerse esta ecuacion, formado el producto de $(x-r)$ por $(x-r')$

$$(x-r)\,(x-r')=(x-3)\,(x+9)=x^2-3x+9x-27=x^2+6x-27$$

VII.—De la propiedad que tienen las raíces de una ecuacion de 2° grado de dar por suma el coeficiente del 2° término con signo contrario, y por producto el término conocido en el primer miembro de la ecuacion, se deduce que la resolucion de toda ecuacion de 2° grado reducida á la forma general $x^2+px+q=0$ consiste en buscar dos números cuya suma sea $-p$, y cuyo producto sea $q$.

Por ejemplo, si se quiere resolver la ecuacion

$$x^2+6x-27=0$$

la cuestion se reduce á buscar dos números cuya suma sea $-6$, y cuyo producto sea $-27$; cuestion que conduce á la resolucion de una ecuacion mixta de 2° grado.

Así, pues, de lo que hemos expuesto en este párrafo se infiere:

1° Que toda ecuacion pura de 2° grado tiene dos raíces del mismo valor numérico, pero de signos contrarios.

Por ejemplo, si se tiene $\quad x^2=64$
los valores de $x$ serán dos $\quad +8,\ y\ -8$

2° Toda ecuacion mixta de 2° grado tiene igualmente dos raíces, y si la ecuacion se ha traido á la forma $x^2+px+q=0$ conocida la 1ª raíz $r$, la segunda será igual á $-r-p$.

Por ejemplo, sea la ecuacion

$$x^2-8x+15=0$$

en la que una de las raíces tiene por valor 5.
La otra raíz será $\quad r'=-r-p=-5+8=3$

3° En toda ecuacion de segundo grado de la forma $x^2+px+q=0$ cuyas raíces son $r$ y $r'$ el primer miembro es igual al producto de $(x-r)$ por $(x-r')$.



Por ejemplo, si las raíces de la ecuacion $x^2-8x+15=0$ son 5 y 3, se tendrá $\quad x^2-8x+15=(x-5)\,(x-3)$

4° En la ecuacion $x^2+px+q=0$ la suma de las raíces $r+r'$ es igual á $-p$.

Por ejemplo, las raíces de la ecuacion $\quad x^2-8x+15=0$
siendo 5 y 3, se tiene $\quad 5+3=8$

5° En la misma ecuacion $x^2+px+q=0$ el producto de las raíces $r\,r'$ es igual á $q$.

Por ejemplo, en la ecuacion $\quad x^2-8x+15=0$
el producto de sus raíces da: $\quad 5\times3=15$

6° Conocidas las raíces de una ecuacion puede reconstruirse.

Por ejemplo, si las raíces de una ecuacion son los números 5 y 3, la ecuacion de que proviene será:

$$x^2-[5+3]\,x+5\times3=0$$

7° En vez de resolver directamente una ecuacion de segundo grado, se pueden obtener los valores de la incógnita buscando dos números cuya suma sea el coeficiente de $x$ con signo cambiado y cuyo producto sea $q$, despues de haber traido la ecuacion á la forma general $x^2+px+q=0$.

315.—Condiciones para que el valor de x sea real ó imaginario, positivo ó negativo, exacto ó aproximado.—Una vez quitados los denominadores, pasadas todas las cantidades al primer miembro de la ecuacion y efectuadas las demas operaciones hasta haber hecho que el cuadrado de la incógnita sea positivo y que no tenga coeficiente, la forma más general de una ecuacion mixta de segundo grado hemos dicho que es:

$$x^2\pm px\pm q=0$$

En esta fórmula consideraremos *con cada uno de sus signos á q*, y en seguida á $px$ para determinar qué condiciones de relacion deben existir entre las cantidades conocidas para que el valor de $x$ pueda ser *real ó imaginario; positivo ó negativo; exacto ó aproximado*. La fórmula general se descompone en las siguientes:

$$x^2\pm px\pm q=0\begin{cases}x^2\pm px-q=0\begin{cases}x^2+px-q=0\ldots\ldots\ldots(1)\\x^2-px-q=0\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}\\[2ex]x^2\pm px+q=0\begin{cases}x^2+px+q=0\ldots\ldots\ldots(3)\\x^2-px+q=0\ldots\ldots\ldots(4)\end{cases}\end{cases}$$

Resultan, pues, cuatro casos diferentes que vamos á considerar sucesivamente.

I.—De la ecuacion (1) $x^2+px-q=0$

se obtienen para $x$ los valores: $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

1° Los dos valores de $x$ serán *reales* a causa de que los dos términos $\frac{p^2}{4}$ y $q$, que están dentro del radical, son positivos y que la raíz par de una cantidad positiva es *real*. El primer término $\frac{p^2}{4}$ es positivo, porque el cuadrado de cualquier monomio, positivo ó negativo, siempre es positivo, y el segundo término $q$ es positivo en el caso que consideramos, porque estaba con el signo — en el primer miembro de la ecuacion.

Si el valor de $x$ es *real* significa que el problema es posible.

2° Para determinar el *signo* de $x$, observaremos que su valor consta de dos términos: $\frac{p}{2}$ y $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, y que llevará el signo del término que sea mayor.

Ahora bien, como

$$\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}}$$

y

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

se infiere que

$$\frac{p}{2}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

Por tanto, siendo

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

cuando tomemos el radical con el signo + el valor de $x$ será *positivo*, y cuando tomemos el radical con el signo — el valor de $x$ será *negativo*.

Debemos recordar que todo valor *positivo* contesta *directamente* el problema tal como ha sido establecido, y que todo valor *negativo* encontrado para la incógnita, en el caso de que el problema por su naturaleza no admita valores de esta clase, no contesta la cuestion sino *indirectamente;* debiendo modificarse el enunciado del problema cambiando de sentido los períodos en que entre la incógnita. Ademas, el valor *negativo* de la incógnita sustituido en la ecuacion, la convierte en identidad.



3° Como la expresion $\frac{p^2}{4}+q$, que está dentro del radical es un *binomio*, y algebráicamente no puede extraerse raíz cuadrada á un binomio, para que el valor de $x$ pueda ser *exacto*, se necesita que el valor *numérico* de $\frac{p^2}{4}+q$ tenga raíz *exacta*, pues el término $\frac{p}{2}$ siempre representa un valor numérico exacto. Al contrario, si $\frac{p^2}{4}+q$ no es un número que tenga raíz cuadrada exacta, el valor de $x$ será *aproximado*.

II.—Considerando la fórmula (2)

$$x^2-px-q=0$$

tendremos los valores:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

1° Los dos valores de $x$ serán *reales*, porque siendo $q$ negativo en el primer miembro de la ecuacion, la cantidad $\frac{p^2}{4}+q$ que está debajo del radical es positiva.

2° Siendo $\frac{p}{2}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, el signo de $x$ depende del que se tome para el radical. En consecuencia, los problemas comprendidos en la fórmula que se discute conducen á dos resultados, de los que uno contesta directamente, y el otro indirectamente la cuestion.

3° Los valores de $x$ serán *exactos* cuando $\frac{p^2}{4}+q$ sea un cuadrado perfecto, y *aproximados* en el caso contrario.

III.—De la ecuacion (3) $x^2+px+q=0$

se obtienen para $x$ los valores: $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

1° Para que el primer valor de $x$ sea una cantidad *real*, lo que se necesita es: que la cantidad $\frac{p^2}{4}-q$, á la cual se ha de extraer la raíz cuadrada, sea positiva,(289) para lo cual se debe tener $\frac{p^2}{4}-q>0$, ó $\frac{p^2}{4}>q$.

En consecuencia, siempre que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término sea mayor que la suma de las cantidades conocidas independientes de $x$, que hemos representado por $q$, el valor de $x$ será *real*. Y recíprocamente el valor de $x$ será *imaginario* cuando los valores numéricos de los datos de la cuestion den $\frac{p^2}{4}<q$.

Si el valor de $x$ es *real* será posible resolver el problema; por el contrario, si es *imaginario* el problema será absurdo.

2° Para determinar si el valor de $x$, que estamos considerando, será *positivo* ó *negativo*, observaremos que del valor de $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ tenemos que restar $\frac{p}{2}$, por lo que $x$ llevará el signo de aquella de estas dos cantidades que sea la mayor. Para averiguar esto, observaremos que

$$\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}}$$

y que
$$\sqrt{\frac{p^2}{4}}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

luego
$$\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

En consecuencia, siendo $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

su valor será *negativo*, porque la cantidad mayor es negativa.

Ya hemos visto (268) que cuando la cuestion por su naturaleza no admite soluciones negativas y el valor de la incógnita es *negativo*, este no resuelve directamente el problema.

3° Para que el valor de $x$ sea *exacto*, se necesita que el número representado por $\frac{p^2}{4}-q$, y al cual se le ha de extraer la raíz, sea racional, esto es, que si es entero sea un cuadrado perfecto, y que si es quebrado lo sean sus dos términos (199) despues de simplificado.

Al contrario, si $\frac{p^2}{4}-q$ *no es un cuadrado perfecto*, el valor de $x$ solo podrá obtenerse *aproximado*, pudiendo llevarse la aproximacion hasta el grado que se quiera.

Consideraremos el 2° valor de $x$ de la ecuacion (3) $x^2+px+q=0$

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$



1° El valor de $x$ será *real* si se tiene $\frac{p^2}{4}>q$.

2° En este caso $x$ será negativo, por ser negativos los dos términos que expresan su valor: $\frac{p}{2}$ y $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

3° El valor de $x$ será *exacto* si $\frac{p^2}{4}-q$ es cuadrado perfecto, y *aproximado* en el caso contrario.

IV.—Considerando la fórmula (4) $x^2-px+q=0$,

sacaremos para $x$ los valores:
$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$
$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

1° Para que los valores de $x$ sean *reales*, es necesario que la cantidad que está debajo del radical $\frac{p^2}{4}-q$ sea positiva, esto es, se necesita que $\frac{p^2}{4}>q$. En caso contrario, cuando $\frac{p^2}{4}<q$, los valores de $x$ serán *imaginarios*.

2° En este caso, en el que $p$ es negativo en el primer miembro de la ecuacion, y $q$ positivo, los dos valores de $x$ son *positivos*, porque $\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Así en los casos comprendidos en la fórmula $x^2-px+q=0$ que consideramos, satisfecha la condicion de que $\frac{p^2}{4}>q$, los dos valores de $x$ resuelven directamente el problema.

3° Los valores de $x$ serán *exactos* si el valor numérico de $\frac{p^2}{4}-q$ es un cuadrado perfecto, y *aproximados* en el caso contrario.

En *resúmen*, considerando la fórmula general

$$x^2\pm px\pm q=0$$

1° El valor de $x$ será *real* cuando la cantidad que está debajo del radical sea *positiva*, lo cual tiene lugar cuando $q$ lleva signo — en el primer miembro de la ecuacion, y cuando siendo positivo: $q<\frac{p^2}{4}$.

El valor de $x$ será *imaginario* cuando la cantidad que está debajo del