radical es *negativa*, esto es, cuando además de ser positivo q en el primer miembro de la ecuacion: $q>\frac{p^2}{4}$.

2° El *signo* de x dependerá del que tenga el término mayor de los dos de que se compone su valor; siendo $\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, y $\frac{p}{2}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.

3° El valor de x será *exacto* cuando el valor numérico de la cantidad que está debajo del radical sea cuadrado perfecto; y será *aproximado* cuando dicha cantidad no lo sea.

Si el valor de x es *real*, el problema será posible; pero si es *imaginario*, el problema será absurdo.

Si el valor de x es *positivo*, contestará directamente al problema; pero si es *negativo*, y el problema no admite este género de valores, contestará indirectamente á él.

Si el valor de x es *exacto*, no diferirá nada del verdadero; faltándole ó sobrándole algo cuando sea *aproximado*.

De la ecuacion general

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

se deducen cuatro principales en las que se observará lo siguiente para los valores de x:

$\left.\begin{array}{l} x^2+px-q=0 \\ x^2-px-q=0 \end{array}\right\}$ siempre serán *reales, desiguales* y de *signos contrarios*.

$\left.\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ \\ \\ x^2-px+q=0 \end{array}\right\}$ si $q<\frac{p^2}{4}$ siempre serán *reales, desiguales* y con el *mismo signo;* siendo *negativos* en la primera ecuacion y *positivos* en la segunda. si $q>\frac{p^2}{4}$ serán *imaginarios*. Si $q=\frac{p^2}{4}$ los valores de x serán iguales.

Sean, por ejemplo, las siguientes ecuaciones:

1° $\left\{\begin{array}{ll} x^2+3x-10=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{reales}, \text{ porque 10 es negativo.} \\ x^2+3x+2=0 & \text{Id. id. porque } (\tfrac{3}{2})^2>2. \\ x^2+3x+3=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{imaginarios}, \text{ porque 3 es positivo, y además, } (\tfrac{3}{2})^2<3. \end{array}\right.$

2° $\left\{\begin{array}{ll} x^2+6x-27=0 & x \text{ será positivo ó negativo segun sea el signo del radical.} \\ x^2+6x+5=0 & \text{Los dos valores de } x \text{ serán negativos.} \\ x^2-6x+5=0 & \text{Los dos valores de } x \text{ serán positivos.} \end{array}\right.$

3° $\left\{\begin{array}{ll} x^2-8x+15=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{exactos} \text{ porque } \frac{8^2}{4}-15 \text{ tiene raíz exacta.} \\ x^2-10x+15=0 & \text{Son } \textit{aproximados}, \text{ porque } \frac{10^2}{4}-15 \text{ no tiene raíz exacta.} \end{array}\right.$

4° $x^2-6x+9=0$ Son *iguales*, porque $(\frac{6}{2})^2=9$.

316.—Discusion de algunos casos particulares.—I.—Consideremos el caso comprendido en la fórmula:

$$x^2+px+q=0$$

de la que se saca $\qquad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

cuyos valores siendo ambos negativos nos indican que el problema es imposible tal como viene propuesto, y en efecto, es imposible que la suma de tres cantidades positivas x^2+px+q pueda ser cero.

Si se supone $\qquad \frac{p^2}{4}=q$

el valor de x se convierte en $\qquad x=-\frac{p}{2}$

valor que podemos obtener directamente de la ecuacion

$$x^2+px+q=0$$

introduciendo la condicion $\frac{p^2}{4}=q$. En efecto, la ecuacion se cambia en

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0$$

ó lo que es lo mismo (290) $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\times\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$$

Y como para que el producto de dos factores pueda ser cero es necesario que uno de los factores sea cero, y aquí los dos factores son iguales, para que la ecuacion $\left(x+\frac{p}{2}\right)\times\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$ pueda subsistir es indispensable que se tenga

$$x+\frac{p}{2}=0$$

lo que da

$$x=-\frac{p}{2}$$

Esto nos demuestra que *se obtiene el mismo resultado introduciendo una hipótesis en el valor definitivo de la incógnita, ó en la ecuacion primitiva de donde se ha sacado, y que una ecuacion de segundo grado no tiene más que una raíz cuando es* q *positivo en el primer miembro de la ecuacion é igual á* $\frac{p^2}{4}$.

II.—Considerando el caso de la fórmula

$$x^2-px+q=0$$

los valores de x son:

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Para que estos sean *reales* es necesario tener $\frac{p^2}{4}>q$, y una vez satisfecha esta condicion resulta que los dos valores de x serán positivos, esto es, ambos contestarán directamente la cuestion tal como viene propuesta.

Vamos á demostrar esto mismo deduciéndolo de la ecuacion primitiva.

$$x^2-px+q=0$$

Cambiando los signos tendremos:

$$px-x^2=q$$

sacando x como factor comun $\quad x(p-x)=q.$

Si se supone p dividido en dos partes de la que una es x, la otra será $p-x$, y en consecuencia se ve que la ecuacion $x^2-px+q=0$ no es más que una trasformacion de la que sirve para plantear el problema: *dividir un número dado* p *en dos partes,* x *y* p—x, *cuyo producto sea* q.

$$x[p-x]=q$$

y como la resolucion de la ecuacion nos debe conducir á conocer tanto el valor de una parte como el de la otra, por esta razon tendremos dos valores para la incógnita que resuelven directamente la cuestion.

Si suponemos que x sea la parte mayor, $p-x$ será la menor, la suma de ambas es p, su diferencia la llamaremos d. Conforme á lo demostrado (226 V) tendremos $\quad x=\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$

la parte menor: $\quad p-x=\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$

multiplicando estas ecuaciones $\quad x(p-x)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}$

y como $\quad x(p-x)=q$

tendremos. $\quad \frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}=q$

luego $\quad \frac{p^2}{4}>q$

condicion que habiamos demostrado que era necesario satisfacer en el valor de $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ para que no fuera *imaginario.*

III.—Consideremos los casos comprendidos en la fórmula

$$x^2+px-q=0$$

que da $\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

Veamos qué sucede con los valores de x.

1° Cuando se tiene $\quad q=0$

sustituido este valor en el de x se tiene

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$$

esto es, $\quad x=0, \qquad x=-p$

Estos valores de x podrán tambien deducirse de la ecuacion....... $x^2+px-q=0$, haciendo en ella $q=0$, cuyo supuesto la trasforma en

$$x^2+px=0$$

sacando x como factor $\quad x(x+p)=0$

y para que el producto de estos dos factores pueda ser cero, se necesita que uno de ellos sea igual á cero, esto es,

$$x=0$$

ó $\quad x+p=0$ que da $x=-p$

que son los resultados obtenidos del valor de x.

2° Si se tiene $\quad p=0$

el valor de $\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

se cambia en $\quad x=\pm\sqrt{q}$

resultado que puede obtenerse de la fórmula $x^2+px-q=0$ haciendo $p=0$, cuya hipótesis la trasforma en

$$x^2-q=0$$

la que da igualmente $\quad x=\pm\sqrt{q}$

3° Si se tiene al mismo tiempo

$$p=0, \qquad q=0$$

el valor de $\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

se cambia en $\quad x=0$

En efecto, introduciendo en la ecuacion $x^2+px-q=0$ las condiciones $p=0$, $q=0$ se tiene

$$x^2=0$$

lo que da igualmente $\quad x=0$

IV.—Discusion de la ecuacion $ax^2+bx=c$

Vamos ahora á considerar la ecuacion mixta de 2° grado en la forma

$$ax^2+bx=c$$

esto es, cuando despues de haber quitado los denominadores y de haber sacado como factores comunes á x^2 y á x no se ha quitado el coeficiente del cuadrado de la incógnita, á fin de examinar la influencia que tendrán sobre los valores de x las hipótesis de hacer $a=0$, $b=0$, y $c=0$.

Para evitar el inconveniente que se tendria suponiendo $a=0$, de hacer desaparecer el término en que entra el cuadrado de la incógnita, lo que trasformaria la ecuacion en otra de primer grado, naturalmente ocurre el artificio de cambiar el factor en un divisor que al quitar los denominadores de la ecuacion trasformada, dejará intacto el coeficiente a de x^2. Por tanto nos valdremos del artificio de hacer $x=\frac{1}{y}$ siendo y una nueva indeterminada cuyo valor depende del de x, á fin de hacer cambiar convenientemente la forma de la ecuacion primitiva.

Sustituyendo por x su valor $\frac{1}{y}$ en la ecuacion.

$$ax^2+bx=c$$

esta se trasforma en $\quad \frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}=c$

ó bien $\quad cy^2-by-a=0$

Haciendo en ella: 1° $\quad a=0$ esta ecuacion se cambia en

$$cy^2-by=0$$

ó bien $\quad y(cy-b)=0$ en la que debiendo ser nulo alguno de los factores se tiene $y=0$ é $y=\frac{b}{c}$

sustituyendo estos valores en el de $x=\frac{1}{y}$ tendremos

$$x=\tfrac{1}{0}=\infty, \quad y \quad x=\frac{c}{b}$$

2° Si además de $a=0$ se tiene $b=0$

los valores de x serán $\quad x=\infty, \quad x=\frac{c}{0}=\infty$

3° Por último, si se tiene $a=0$, $b=0$ y $c=0$, el último valor de x será $\frac{0}{0}$ signo de la indeterminacion, y en efecto, cualquier valor que se dé á x verificará la ecuacion

$$ax^2+bx=c$$

cuando se tenga a, b y c iguales á cero.

* (317).—Propiedades de los trinomios de segundo grado.—Se llama trinomio de segundo grado toda expresion algebráica que puede ser de la forma

$$\pm my^2\pm ny\pm p=0$$

siendo m, n y p cantidades conocidas con cualquier signo, representando y, *una variable*, es decir, una cantidad á la que se le puede dar valores arbitrarios de cualquiera magnitud. El primer término podrá hacerse siempre positivo, y para simplificar nuestros raciocinios discutiremos la expresion $\quad my^2-ny+p=0$

dividiendo todos los términos por m y despejando á y, resulta:

$$y=+\frac{n}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{n^2-4mp}$$

Tres son los casos principales que pueden considerarse con respecto á la naturaleza del valor de y:

1° Se puede tener $n^2-4mp>0$, ó *positivo*, en cuyo caso las dos raíces serán *reales, desiguales y de signos cualesquiera.*

2° Puede tenerse $n^2-4mp=0$, en cuyo caso las raíces serán *reales, iguales y de signos cualesquiera.*

3° Si por último $n^2-4mp<0$, ó *negativo*, los dos valores de y serán *imaginarios.*

Vamos á examinar algunas propiedades relativas á estos casos:

Primero.—Siempre que un trinomio de segundo grado es tal que igualándolo á cero y resolviendo la ecuacion, se obtienen dos raíces reales y desiguales, *cualquiera cantidad* (positiva ó negativa), *cuyo valor esté comprendido entre los de las dos raíces, sustituida en lugar de la* *variable*, y, *en el trinomio, da necesariamente un resultado de signo contrario á aquel de que esté afectado* m, *coeficiente de* y^2; *pero cualquiera cantidad, cuyo valor no esté comprendido entre los de las dos raíces, sustituida en lugar de* y *da un resultado del mismo signo que el coeficiente de* y^2.

Demostracion.—Si se dividen por m todos los términos de la ecuacion

$$my^2-ny+p=0$$

quedará en la forma $\quad y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}=0$

si llamamos y' é y'' las raíces de esta última ecuacion, conforme á lo demostrado en el número 314 III, tendremos que

$$y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}=(y-y')\,(y-y'')$$

multiplicando por m los dos miembros se tiene

$$my^2-ny+p=m(y-y')(y-y'')\ldots\ldots..(1)$$

cuya ecuacion trasforma el trinomio de 2° grado en el producto del coeficiente m por dos factores $(y-y')$ é $(y-y'')$; dependiendo naturalmente el signo del resultado del que deban tener esos factores.

Esto supuesto, sea a una cantidad cuyo valor esté comprendido entre y' é y'', esto es, que se tenga

$a>y'$ pero $a<y''$, lo que da $a-y'>0$, y $a-y''<0$

ó bien $\quad a<y'$ pero $a>y''$, lo que da $a-y'<0$, y $a-y''>0$

sustituyendo $\quad ma^2-na+p=m(a-y')(a-y'')\ldots\ldots..[2]$

se ve, pues, que en cualquiera de los dos supuestos los factores $(a-y')$ $(a-y'')$ de m en la ecuacion (2) tendrán signos contrarios, por lo que su producto será negativo, y en consecuencia $m(a-y')\,(a-y'')$ ó su valor ma^2-na+p resultará con un signo contrario al que tenga el coeficiente m de y^2 en el trinomio $my^2-ny+p=0$

Si al contrario se supone

$a>y'$ y tambien $a>y''$ esto da $a-y'>0$ y $a-y''>0$

ó $\quad a<y'$ y tambien $a<y''$ esto da $a-y'<0$ y $a-y''<0$

en cualquiera de los dos supuestos los dos factores $(a-y')$ y $(a-y'')$ tendrán el mismo signo, por lo que su producto será *positivo*, y en consecuencia $m(a-y')(a-y'')$ ó su valor ma^2-na+p tendrá el mismo signo que el coeficiente m, que es lo que debiamos demostrar:

Ejemplo.—Si tenemos la ecuacion $\quad 3y^2-48y+180=0$

resulta $\quad y^2-16y+60=0$

de la que $\quad y=8\pm\sqrt{64-60}$

las raíces serían tomando sucesivamente el signo + y el signo — del radical

$$y'=10,\ \text{é}\ y''=6$$

Dando, pues, á y un valor como 8 intermedio entre los de y' é y'', esto es, $y=8$ siendo $8<10$ y $8>6$, se tiene

$$3y^2-48y+180=3\times64-48\times8+180=-12$$

resultado de signo contrario á 3, coeficiente de y^2 en el trinomio.

Haciendo $y=5$ número menor que las dos raíces, supuesto que $5<10$, y $5<6$ se tiene

$$3y^2-48y+180=3\times25-48\times5+180=+15$$

resultado del mismo signo que el coeficiente 3 de y^2.

Haciendo $y=12$ siendo $12>10$ y $12>6$ se tiene:

$$3y^2-48y+180=3\times144-48\times12+180=+36$$

resultado tambien del mismo signo que 3, coeficiente de y^2 en el trinomio de 2° grado $3y^2-48y+180=0$.

Segundo.—Si las raíces son reales é iguales, *cualquiera cantidad diversa de la que reduce el trinomio á cero sustituida en él, da un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y^2.

Demostracion.—Supuesto que las dos raíces son iguales se tiene la relacion $n^2-4mp=0$ de la que resulta $p=\frac{n^2}{4m}$

por lo que el trinomio $\quad my^2-ny+p=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)$

podrá ponerse en la forma $\quad m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}\right)=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$

esto es, $\quad my^2-ny+p=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$

Ahora bien, de esta última expresion resulta que si se da á y un valor cualquiera que no la haga igual á cero, esto es, que no sea $y=+\frac{n}{2m}$ para que sea nulo el factor de m, la cantidad $\left(y-\frac{n}{2\,m}\right)^2$ será siempre positiva por ser un cuadrado, y por tanto, el producto $m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$ de dos factores de los que uno de ellos $\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$ es positivo ó su valor my^2-ny+p dará un resultado que tendrá el mismo signo que el coeficiente m.

Podemos llegar á la misma conclusion tomando como base de nuestros raciocinios la fórmula (1)

$$my^2-ny+p=m(y-y')(y-y'')$$

En efecto, cuando las dos raíces son iguales, se tiene $y'=y''$, y la ecuacion se trasforma en

$$my^2-ny+p=m(y-y')^2$$

No tomando para y el valor de la raíz y', en cuyo caso el trinomio será igual á cero, sino adoptando para y un valor cualquiera a, se tendrá:

$$ma^2-na+p=m(a-y')^2$$

y como cualquiera que sea el signo de $(a-y')$ su cuadrado es positivo, se infiere que su producto por m, que es equivalente al trinomio..... ma^2-na+p, dará un resultado del mismo signo que m.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuacion $3y^2-24y+48=0$
resulta $y^2-8y+16=0$
de la que $y=4\pm\sqrt{4^2-16}=4$
las dos raíces son iguales $y=4$

haciendo $y=2$ número <4 se tiene $3y^2-24y+48=3.4-24.2+48=+12$
„ $y=10$ „ >4 „ $3y^2-24y+48=300-240+48=+108$

teniendo ambos resultados el mismo signo que el coeficiente 3 de y^2

Esta propiedad nos conduce á establecer un principio que es de uso frecuente en el análisis.

Siempre que un trinomio de segundo grado my^2+ny+p, *es un cuadrado perfecto, se tiene entre sus coeficientes la relacion* $n^2-4mp=0$.

En efecto, si este trinomio es cuadrado perfecto y de la forma..... $(m'y+n')^2$, las dos raíces de la ecuacion $my^2+ny+p=0$ (314 III) deben ser iguales; pero para que lo sean se necesita que la cantidad que en los valores de y está dentro del radical sea nula, esto es, que se tenga la relacion $n^2-4mp=0$.

Recíprocamente si se tiene entre los coeficientes la relacion........ $n^2-4mp=0$ el trinomio será un cuadrado perfecto; porque de esta relacion se deduce $p=\frac{n^2}{4m}$ luego

$$my^2+ny+p=my^2+ny+\frac{n^2}{4m}=\left(y\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2$$

Tercero.—En fin, si las dos raíces son imaginarias, *cualquiera cantidad real,* positiva ó negativa, *sustituida en lugar de* y, *dará un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y^2.

Porque supuesto que las dos raíces son imaginarias, se tiene la relacion

$$n^2-4mp<0, \text{ ó } 4mp>n^2$$

dividiendo por $4m^2$ $\quad \frac{p}{m}>\frac{n^2}{4m^2}$

esto es $\quad \frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}+k^2$

representando k^2 una cantidad esencialmente positiva, de lo que resulta

$$my^2-ny+p=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}+k^2\right)$$

esto es, $\quad my^2-ny+p=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2+mk^2$

expresion que siempre tendrá el mismo signo que m cualquiera que sea el valor que se le dé á y, por ser esencialmente positivos los factores de m, en los dos términos del segundo miembro de la ecuacion.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuacion $2y^2-20y+100=0$
resulta $y^2-10y+50=0$
de la que $y=5\pm\sqrt{25-50}$
cuyas raíces son imaginarias
haciendo

$y=+10$ se tiene $2y^2-20y+100=2.10^2-20.10+100=+100$
$y=-3$ $\quad 2y^2-20y+100=2.-3^2-20.-3+100=+178$

teniendo ambos resultados el mismo signo que 2 coeficiente de y^2.

En resúmen, resulta que cuando en el trinomio $my^2-ny+p=0$ se da á y un valor comprendido entre los de las raíces que verifican la ecuacion, el resultado tendrá signo contrario al de m, y que en todos los demás casos el resultado será del mismo signo que m.

PROPORCIONES.

318.—Propiedades de las proporciones.—Tratándose en estas de las relaciones que ligan unas cantidades con otras, todas las propiedades y teoremas que dejamos demostrados en Aritmética, pueden demostrarse por los métodos del Algebra, pero solo nos ocuparemos de los principales.

1° Si se tiene la proporcion aritmética, $\quad a.\ b : c.\ d$