Podemos llegar á la misma conclusion tomando como base de nuestros raciocinios la fórmula (1)

$$my^2-ny+p=m(y-y')(y-y'')$$

En efecto, cuando las dos raíces son iguales, se tiene $y'=y''$, y la ecuacion se trasforma en

$$my^2-ny+p=m(y-y')^2$$

No tomando para y el valor de la raíz y', en cuyo caso el trinomio será igual á cero, sino adoptando para y un valor cualquiera a, se tendrá:

$$ma^2-na+p=m(a-y')^2$$

y como cualquiera que sea el signo de $(a-y')$ su cuadrado es positivo, se infiere que su producto por m, que es equivalente al trinomio..... ma^2-na+p, dará un resultado del mismo signo que m.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuacion $3y^2-24y+48=0$
resulta $y^2-8y+16=0$
de la que $y=4\pm\sqrt{4^2-16}=4$
las dos raíces son iguales $y=4$

haciendo $y=2$ número <4 se tiene $3y^2-24y+48=3.4-24.2+48=+12$
,, $y=10$,, >4 ,, $3y^2-24y+48=300-240+48=+108$

teniendo ambos resultados el mismo signo que el coeficiente 3 de y^2

Esta propiedad nos conduce á establecer un principio que es de uso frecuente en el análisis.

Siempre que un trinomio de segundo grado my^2+ny+p, *es un cuadrado perfecto, se tiene entre sus coeficientes la relacion* $n^2-4mp=0$.

En efecto, si este trinomio es cuadrado perfecto y de la forma..... $(m'y+n')^2$, las dos raíces de la ecuacion $my^2+ny+p=0$ (314 III) deben ser iguales; pero para que lo sean se necesita que la cantidad que en los valores de y está dentro del radical sea nula, esto es, que se tenga la relacion $n^2-4mp=0$.

Recíprocamente si se tiene entre los coeficientes la relacion........ $n^2-4mp=0$ el trinomio será un cuadrado perfecto; porque de esta relacion se deduce $p=\frac{n^2}{4m}$ luego

$$my^2+ny+p=my^2+ny+\frac{n^2}{4m}=\left(y\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2$$

Tercero.—En fin, si las dos raíces son imaginarias, *cualquiera cantidad real,* positiva ó negativa, *sustituida en lugar de* y, *dará un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y^2.

Porque supuesto que las dos raíces son imaginarias, se tiene la relacion

$$n^2-4mp<0,\ \text{ó}\ 4mp>n^2$$

dividiendo por $4m^2$ $\quad \frac{p}{m}>\frac{n^2}{4m^2}$

esto es $\quad \frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}+k^2$

representando k^2 una cantidad esencialmente positiva, de lo que resulta

$$my^2-ny+p=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}+k^2\right)$$

esto es, $\quad my^2-ny+p=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2+mk^2$

expresion que siempre tendrá el mismo signo que m cualquiera que sea el valor que se le dé á y, por ser esencialmente positivos los factores de m, en los dos términos del segundo miembro de la ecuacion.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuacion $2y^2-20y+100=0$
resulta $y^2-10y+50=0$
de la que $y=5\pm\sqrt{25-50}$
cuyas raíces son imaginarias
haciendo

$y=+10$ se tiene $2y^2-20y+100=2.10^2-20.10+100=+100$
$y=-3$ $\quad 2y^2-20y+100=2.-3^2-20.-3+100=+178$

teniendo ambos resultados el mismo signo que 2 coeficiente de y^2.

En resúmen, resulta que cuando en el trinomio $my^2-ny+p=0$ se da á y un valor comprendido entre los de las raíces que verifican la ecuacion, el resultado tendrá signo contrario al de m, y que en todos los demás casos el resultado será del mismo signo que m.

PROPORCIONES.

318.—Propiedades de las proporciones.—Tratándose en estas de las relaciones que ligan unas cantidades con otras, todas las propiedades y teoremas que dejamos demostrados en Aritmética, pueden demostrarse por los métodos del Algebra, pero solo nos ocuparemos de los principales.

1º Si se tiene la proporcion aritmética, $\quad a.\ b : c.\ d$

fundándonos en la definicion de proporcion aritmética podremos formar la ecuacion $a-b=c-d$

de la que trasladando b y d resulta $a+d=c+b$

luego *la suma de los extremos es igual á la de los medios.*

2° Recíprocamente si se tiene: $a+d=c+b$

trasladando respectivamente d y b: $a-b=c-d$

se obtiene la proporcion aritmética $a.\ b : c.\ d$

luego *siempre que la suma de dos cantidades sea igual á la de otras dos, con las cuatro cantidades podrá formarse una proporcion aritmética.*

3° Si se busca el cuarto término de una proporcion aritmética

$$a.\ b : c.\ x$$

fundándonos en que la suma de los extremos es igual á la de los medios tendremos $a+x=b+c$

despejando $x=b+c-a$

lo que demuestra la regla dada (222) para hallar el cuarto término de una proporcion aritmética.

4° Si se tiene la proporcion geométrica $a : b :: c : d$ fundándonos en la definicion de proporcion geométrica podemos establecer la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

quitando los denominadores resulta $ad=cb$

lo que demuestra *que el producto de los extremos es igual al de los medios.*

5° Si se tienen cuatro cantidades cuyos productos dan la ecuacion $ad=cb$

dividiendo por db resulta $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

lo que da la proporcion $a : b :: c : d$

que demuestra *que siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas sea igual al de las otras dos, con las cuatro cantidades podrá formarse una proporcion geométrica.*

6° Si se quiere hallar un medio geométrico entre dos cantidades a y b, debemos tener:

$$a : x :: x : b$$

fundándonos en que el producto de los extremos es igual al de los medios tendremos: $ab=x^2$

y $x=\sqrt{ab}$

resultado que demuestra la regla dada (223) para encontrar un medio geométrico.

7° Sea la proporcion $a : b :: c : d$

que da la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

agregando ± 1 á los dos miembros $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$

incorporando $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

lo que da la proporcion $a\pm b : b :: c\pm d : d$

resultado que demuestra las trasformaciones que hemos llamado *componiendo y dividiendo.*

8° Sean las razones iguales

$$a : b :: c : d :: e : f$$

tendremos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=q$

siendo todas las razones iguales á q tendremos $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q$ etc.

de donde $a=bq,\quad c=dq,\quad e=fq\ldots\ldots(1)$

sumando estas ecuaciones $a+c+e=q(b+d+f)$

de donde $\frac{a+c+e}{b+d+f}=q=\frac{a}{b}$

luego $a+c+e : b+d+f :: a : b$

esto es, *la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*—Si en vez de sumar la série de ecuaciones (1) las restamos, demostraremos que la *diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes como un antecedente á su consecuente.*

9°—Sean las proporciones $a : b :: c : d$

$e : f :: g : h$

que dan las ecuaciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$

multiplicándolas, se tiene $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$

lo que da la proporcion $ae : bf :: cg : dh$

resultado que demuestra *que pueden multiplicarse ordenadamente dos proporciones.*

10° Sea la proporcion $a : b :: c : d$

que da la ecuacion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

elevando á la potencia m $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$

extrayendo la raíz n $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$

estas ecuaciones dan las proporciones

$$a^m : b^m :: c^m : d^m \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

luego *se puede elevar, ó se les puede extraer la misma raíz á los cuatro términos de una proporcion geométrica, subsistiendo ésta.*

PROGRESIONES.

319.—PROGRESIONES.—*Se llama progresion una série ó continuacion de términos en proporcion contínua.* La progresion puede ser aritmética ó geométrica. Se dice que es aritmética cuando cada término le lleva al que le precede ó sigue una cantidad constante, que se llama *razon.* Se dice que la progresion es geométrica cuando cada término cabe en el que le precede ó sigue el mismo número de veces.

Una progresion puede ser creciente ó decreciente. Se dice que es creciente cuando los términos van aumentando, y decreciente cuando van disminuyendo.

320.—PROGRESION ARITMÉTICA.—DEF.—*Se llama progresion aritmética, una série de términos en la que cada uno le lleva al que le precede ó sigue una cantidad constante que se llama razon.* A la progresion *aritmética,* atendiendo á su formacion, se le llama tambien progresion por *diferencia,* y se indica generalmente como sigue:

$$\div\ 2.\ 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ 17$$

Se lee: 2 es á 5, como 5 es á 8, como 8 es á 11, como 11 es á 14, como 14 es á 17. Se ve que la progresion es una série de proporciones contínuas, en la que todos los términos son antecedentes ménos el último, y todos los términos son consecuentes ménos el primero.

En la progresion aritmética creciente, cada término es igual al que le precede más la razon, ó al que le sigue ménos la razon; y en la decreciente, cada término es igual al que le antecede ménos la razon, ó al que le sigue más la razon.

Siendo muy fácil deducir las propiedades de la progresion decreciente cuando se conocen las de la creciente, nos ocuparemos particularmente de ésta.

TEOREMA.—*En la progresion aritmética, un término cualquiera es igual al primero, más tantas veces la razon como términos hay ántes de él.*

Sea la progresion $\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ e \ldots.$

cuya razon es r

fundándose en la definicion de la progresion, tendremos

el segundo término	$b=a+r$	
y como	$c=b+r$	poniendo por b su valor.
el tercero	$c=a+2r$	
y como	$d=c+r$	poniendo por c su valor.
el cuarto término	$d=a+3r$	
y como	$e=d+r$	sustituyendo por d su valor.
el quinto término	$e=a+4r$	

luego atendiendo á que los términos de una progresion aritmética se forman agregando al primero sucesivamente la razon, se deduce que un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la razon como términos hay ántes de él.

En general, si se representa por l el último término de la progresion aritmética creciente

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d \ldots\ldots\ldots\ldots h\ .\ i\ .\ j\ .\ l$$

en la que la razon es r y n es el número de sus términos, tendremos:

$$l=a+(n-1)r \ldots (1)$$

cuya fórmula nos servirá para determinar un término de cierto órden en una progresion, sin necesidad de formar los intermedios, ó para determinar una de las cuatro cantidades $a,\ r,\ n$ ó l, cuando se conocen las otras tres.

Si la progresion es decreciente, basta considerar que la razon r es negativa, y la fórmula (1) se trasforma en

$$l=a-(n-1)r$$

TEOREMA.—*En toda progresion aritmética la suma de los extremos es igual á la de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos.*

Sea la progresion creciente $\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ldots\ldots\ldots h\,.\,i\,.\,j\,.\,l.$

Demostraremos este principio de dos maneras:

1ª—Si consideramos los extremos a y l y los términos inmediatos á estos extremos b y j, notaremos que con estas cuatro cantidades podemos formar la proporcion aritmética

$$a\,.\,b : j\,.\,l$$

fundándonos en que la razon entre a y b es r, lo mismo que entre j y l; y como en la proporcion aritmética, la suma de los extremos es igual á la de los medios, el principio que venimos demostrando será cierto con los términos equidistantes b y j que hemos considerado.

Ahora, si consideramos los términos equidistantes c é i, con ellos y los extremos podremos formar una proporcion

$$a\,.\,c : i\,.\,l$$

en la que la razon es $2r$, en virtud de cuya proporcion inferimos que la suma de los extremos es igual á la de los términos equidistantes c é i.

Otro tanto deduciríamos de los términos d y h, entre los que la razon es $3r$, y de otros cualesquiera equidistantes.

2º Hemos visto que en una progresion aritmética creciente, un término cualquiera es igual al primero *más* tantas veces la razon como términos hay ántes de él, y comparando con el último término el penúltimo, el antepenúltimo y todos los anteriores, es fácil deducir que un término cualquiera es igual al último, *ménos* tantas veces la razon como términos hay despues de él. Por tanto en la siguiente progresion:

$$\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ldots\ldots\ldots h\,.\,i\,.\,j\,.\,l$$

tendremos

$$\left.\begin{aligned} b&=a+r\\ j&=l-r \end{aligned}\right\}\ \text{luego } b+j=a+l$$
$$\left.\begin{aligned} c&=a+2r\\ i&=l-2r \end{aligned}\right\}\ \text{luego } c+i=a+l$$
$$\left.\begin{aligned} d&=a+3r\\ h&=l-3r \end{aligned}\right\}\ \text{luego } d+h=a+l$$

y en general si representamos por x un término que tiene p términos

ántes de él, y por y otro término equidistante del último, que tien términos despues de él, tendremos:

$$x=a+pr$$
$$y=l-pr$$

sumando estos valores $\quad x+y=a+l$

luego, la suma de los extremos de una progresion aritmética es igual á la de dos términos cualesquiera equidistantes de ellos.

TEOREMA.—*La suma de todos los términos de la progresion aritmética, es igual á la suma del primero y el último, multiplicada por la mitad del número de términos.*

Sea la progresion $\qquad \div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ldots\ldots\ldots h\,.\,i\,.\,j\,.\,l$

escribiéndola en sentido inverso $\div\ l\,.\,j\,.\,i\,.\,h\ldots\ldots\ldots d\,.\,c\,.\,b\,.\,a$

Sumando ordenadamente estas dos progresiones término á término, es claro que obtendremos el valor de la doble suma de la primera progresion, supuesto que hemos repetido sus términos. Llamando s la suma, tendremos:

$$2s=(a+l)+(b+j)+(c+i)+\ldots(i+c)+(j+b)+(l+a)$$

y como conforme al teorema anterior, todos los sumandos del segundo miembro de la ecuacion son iguales, y hay tantos sumandos como número de términos tiene la progresion, tendremos:

$$2s=(a+l)n$$

de donde $\qquad s=\dfrac{(a+l)}{2}n\ldots\ldots\ldots(2)$

fórmula que nos da el valor de la suma de los n términos de una progresion aritmética sea creciente ó decreciente, supuesto que es independiente de r y en consecuencia del signo de la razon.

FÓRMULAS GENERALES DE LA PROGRESION ARITMÉTICA.—Cinco son las cantidades que entran como datos ó como incógnitas en los problemas relativos á la progresion aritmética: a, l, n, r y s, y hasta ahora hemos demostrado dos fórmulas fundamentales de las que pueden deducirse otras tres.

No contiene á s		$l=a+(n-1)r\ldots\ldots\ldots(1)$
No contiene á r		$s=\dfrac{(a+l)}{2}n\ldots\ldots\ldots(2)$
Resulta eliminando	á a	$2s=2ln-rn(n-1)\ldots(3)$
„ „	á l	$2s=2an+rn(n-1)\ldots(4)$
„ „	á n	$2rs=l^2-a^2+ar+lr\ldots(5)$

De estas cinco fórmulas se hará uso para resolver cualquier problema relativo á la progresion aritmética, sirviéndonos de la (1) cuando la suma no entra como dato ni como incógnita en el problema propuesto: usaremos la (2) cuando la razon no entra como dato ni como incógnita: de la (3) cuando no se conoce ni se busca á a: de la (4) cuando no se conoce ni se pide á l, y de la (5) cuando no forma parte del enunciado del problema el número de términos.

321.—Problemas de la progresion aritmética.—Los más comunes son tres: encontrar un término de determinado órden sin calcular los que le preceden: interpolar varios medios aritméticos entre dos números dados; y calcular la suma de los términos de una progresion.

I.—Se quiere determinar el 10° término de la progresion

$$\div\ 2.\ 5.\ 8\ldots.$$

para esto haremos uso de la fórmula (1)

$$l = a + (n-1)\,r$$

haciendo $a=2$, $r=3$ y $n=10$, sustituyendo resulta:

$$l = 2 + 9 \times 3 = 29$$

En efecto, $\div 2.\ 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ 17.\ 20.\ 23.\ 26.\ 29.$

II.—Se quieren interpolar cinco medios aritméticos entre los números 3 y 27, esto es, se trata de formar una progresion en la que 3 y 27 sean los extremos debiendo haber entre ellos otros cinco términos.

Para esto haremos uso de la fórmula (1)

$$l=a+(n-1)r$$

en la cual conocemos el valor de $l=27$, de $a=3$ y el de n igual á los dos números dados, más cinco que se van á interpolar, esto es, $n=7$. En consecuencia, determinando el valor de r, podremos formar nuestra progresion.

Despejando r tendremos $r=\dfrac{l-a}{n-1}$

Sustituyendo tendremos $r=\dfrac{27-3}{7-1}=4$

Una vez conocida la razon 4 es fácil formar los cinco medios buscados de la progresion

$$\div 3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19.\ 23.\ 27.$$

III.—Se quiere determinar la suma de los ocho primeros términos de la progresion

$$\div 4.\ 9.\ 14.\ 19.\ 24.\ 29.\ 34.\ 39.$$

para esto haremos uso de la fórmula (2)

$$s=\frac{(a+l)n}{2}$$

Sustituyendo se tiene $s=\dfrac{(4+39)\ 8}{2}=172$

IV.—Sea como ejemplo determinar el primer término de una progresion cuya razon es 4, el número de términos es 7, y la suma de ellos 105.

No formando parte del problema el último término, haremos uso de la ecuacion (4)

$$2s=2an+rn\ (n-1)$$

Despejando $a=\dfrac{2s-rn\ (n-1)}{2n}$

Sustituyendo los valores $a=\dfrac{2.105-4\times7\times6}{2\times7}=3$

322.—Progresion geométrica.—Def.— *Se llama progresion geométrica á una série ó continuacion de términos en la que cada uno contiene al que le precede ó sigue el mismo número de veces.* A la progresion *geométrica* se le llama igualmente *por cociente.*

La razon de la progresion geométrica es el cociente que resulta de dividir un término por el que le antecede. En la progresion geométrica creciente la razon es mayor que la unidad, y en la decreciente es un quebrado.

La progresion geométrica se indica generalmente como sigue:

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48$$

y se lee 3 es á 6, como 6 es á 12, como 12 es á 24, como 24 es á 48.

Se vé, pues, que la progresion es una serie de proporciones contínuas en la que todos los términos son antecedentes ménos el último, y todos son consecuentes ménos el primero.

De la definicion de progresion geométrica resulta que cualquier término es igual al que le antecede multiplicado por la razon.

Teorema.—*Un término de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por la razon elevada á una potencia, cuyo grado indica el número de términos que hay ántes de él.*

Sea la progresion geométrica

$$\div a : b : c : d : e : \ldots\ldots j : l$$

cuya razon es q. Conforme á la definicion de la progresion tendremos:

que el segundo término	$b=aq$	
y como	$c=bq,$	sustituyendo por b su valor
el tercer término	$c=aq^2$	
y como	$d=cq,$	sustituyendo por c su valor
el cuarto término	$d=aq^3$	
y como	$e=dq,$	sustituyendo por d su valor
el quinto término	$e=aq^4$	

y en general si representamos por l el último término de una progresion que consta de n términos se tendrá:

$$l=aq^{n-1} \ldots\ldots. (1)$$

fórmula que nos sirve para determinar un término de una progresion geométrica, cuando se conoce el primero, la razon y el órden del término que se busca, esto es, el número de términos de la progresion. Igualmente puede servir para determinar la razon q é interpolar un cierto número de medios geométricos entre dos números dados.

TEOREMA.—*La suma de todos los términos de una progresion geométrica, es igual al producto del último término por la razon, ménos el primero, dividida esta diferencia por la razon despues de haberle rebajado la unidad.*

Sea la progresion geométrica

$$\div a : b : c : d \ldots\ldots\ldots i : j : l$$

llamando s la suma tendremos

$$s=a+b+c+d+\ldots\ldots\ldots i+j+l$$

llamando q la razon y sustituyendo el valor de todos los términos, ménos el del primero, resulta

$$s=a+aq+bq+cq+\ldots\ldots\ldots +iq+jq$$

sacando q como factor comun

$$s=a+(a+b+c+\ldots\ldots\ldots +i+j)\, q$$

y observando que el factor que multiplica q es igual á la suma de todos los términos de la progresion, ménos el último, esto es, $s-l$, tendremos

$$s=a+(s-l)\, q$$

ejecutando las operaciones $\quad s=a+sq-lq$

pasando s al segundo miembro y trasladando lq y a

$$lq-a=sq-s$$

y despejando $\quad s=\dfrac{lq-a}{q-1}\ldots\ldots\ldots (2)$

cuya fórmula es la expresion algebráica del teorema que debiamos demostrar.

Esta fórmula nos servirá para determinar la suma de una progresion ó alguna de las cantidades a, l, q, cuando se conozca la suma y las otras dos.

Si en la fórmula $s=\dfrac{lq-a}{q-1}$ sustituimos el valor de $l=aq^{n-1}$ se convertirá en

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}$$

cuya expresion servirá para determinar el valor de la suma en funcion del primer término de la razon y del número de términos de la progresion.

Si en esta expresion:

$$s=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}$$

introducimos la condicion de que la razon $q=1$, se convertirá en

$$s=\frac{0}{0}$$

y pareceria á primera vista que estando expresado s por el símbolo de la indeterminacion podria tener cualquier valor. Esto procede de la existencia de un factor comun al numerador y al denominador que en virtud de la hipótesis de $q=1$ se ha hecho nulo, y como lo hemos explicado (269—5°) es preciso hacer desaparecer ese factor comun ántes de introducir la condicion que lo hace igual á cero. En efecto, como

$$\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots\ldots\ldots q+1$$

tendremos: $\quad s=a\,(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots\ldots\ldots q+1)$

haciendo ahora $q=1$; $s=a+a+a+\ldots\ldots\ldots\ldots a$

ó $\quad s=na$

resultado verdadero, supuesto que cuando la razon es la unidad, la progresion se convierte en

$$\div a : a : a : : \ldots\ldots\ldots : a$$

cuya suma es na.

Si consideramos una progresion decreciente al infinito, tendremos que $q<1$ y como los términos sucesivamente van decreciendo, cuando su número sea infinito el valor del último llegará á ser $l=0$.

Introduciendo estas dos condiciones en la expresion

$$s = \frac{lq-a}{q-1}$$

se convertirá en

$$s = \frac{-a}{q-1}$$

ó multiplicando por -1 los dos términos del quebrado

$$s = \frac{a}{1-q}$$

fórmula que da la suma de una progresion decreciente al infinito y de la cual suele hacerse uso en el análisis.

Fórmulas generales de la progresion geométrica.—En las dos fórmulas fundamentales que hemos demostrado, entran cinco cantidades, a, l, n, q y s, y eliminando entre estas dos fórmulas sucesivamente una cantidad, pueden deducirse otras tres.

No contiene á s	$l=aq^{n-1}$	(1)
No contiene á n	$s=\frac{lq-a}{q-1}$	(2)
Resulta eliminando á a	$lq^n-l+sq^{n-1}-sq^n=0$	(3)
Idem á l	$aq^n-a+s-sq=0$	(4)
Idem á q	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$	(5)

De estas cinco fórmulas se hace uso para resolver cualquier problema relativo á la progresion geométrica, teniendo cuidado de servirse de aquella en la que esté eliminada la cantidad que no entra como dato ni como incógnita en el problema.

Cuando la incógnita es n y esta cantidad entra como exponente, es preciso resolver la ecuacion por logaritmos, como lo explicaremos en el número 340.

323.—Próblemas de la progresion geométrica. —Los problemas más frecuentes son tres: determinar un término sin calcular los anteriores; interpolar varios medios geométricos entre dos números dados, y calcular la suma de los términos de la progresion.

I.— Se quiere determinar el 5° término de la progresion cuyos dos primeros términos son: ∸2 : 6.

Haremos uso de la fórmula (1):

$$l = aq^{n-1}$$

Sustituyendo $a=2$, $q=3$ y $n=5$

$$l=2\times3^4=2\times81=162$$

II.—Supongamos que se quieren interpolar *tres* medios geométricos entre los números 2 y 162.

Como aquí, lo que se trata de determinar es la razon, y no forma parte del problema la suma, haremos uso de la fórmula (1)

$$l = aq^{n-1}$$

despejando á

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

considerando que siendo dos los términos conocidos y 3 los que van á interpolarse, $n=5$, sustituyendo se tendrá:

$$q=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3$$

conocida la razon 3 se formará la progresion

∸ 2 : 6 : 18 : 54 : 162

Hay casos en que este problema no puede resolverse sino por medio de logaritmos. Tal es, por ejemplo, cuando hay que extraer raíz 5ª ó 7ª, cuya operacion, además de ser complicada, no hemos enseñado á ejecutarla hasta ahora, pero en el próximo capítulo lo haremos, sirviéndonos de los logaritmos.

III. Sea por averiguar la suma de los términos de la progresion

∸ 2 : 10 : 50 : 250 : 1250 : 6250 :

nos serviremos de la fórmula

$$s = \frac{lq-a}{q-1}$$

sustituyendo

$$s = \frac{6250\times5-2}{5-1}=7812.$$