termina por medio de pocas reglas, y que la *mantiza* de las decimales sea la misma que la de los números enteros.

Del exámen de las dos séries que se han obtenido dando á $x$ valores enteros, negativos y positivos en la ecuacion $y=10^x$, resultan las siguientes consecuencias.

1ª Los logaritmos de 10 y de todas sus potencias son números enteros —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, etc.

2ª Los logaritmos positivos corresponden á números mayores que la unidad, esto es, á enteros, ó á enteros juntos con decimales.

3ª Los logaritmos negativos corresponden á números menores que la unidad, esto es, á decimales, ó á quebrados cuyo numerador es la unidad, y su denominador el número á que corresponde el logaritmo tomado como positivo.

4ª *La característica del logaritmo de un número entero consta de tantas unidades como cifras tiene el número ménos una.* En efecto, los números comprendidos entre 1 y 10, *que se escriben con un guarismo,* tienen por logaritmo *cero,* más una decimal. Los números comprendidos entre 10 y 100, *que se escriben con dos guarismos,* tienen por logaritmo 1 más una decimal. Los números comprendidos entre 100 y 1000, *que se escriben con tres guarismos,* tienen por logaritmo 2 más una decimal, etc.

5ª *La característica del logaritmo de un número mixto compuesto de enteros y decimales, es la que corresponde á la parte entera,* supuesto que todo número mixto está comprendido entre dos números enteros, cuyos logaritmos tienen la misma característica. Por ejemplo, 35'82, cuyo valor está comprendido entre 35 y 36, tendrá 1 por característica en razon de que tanto el logaritmo de 35 como el de 36 tienen 1 por característica.

6ª *La característica del logaritmo de una decimal, es negativa y consta de tantas unidades como ceros hay despues de la coma más uno.* En efecto, los números decimales cuyo valor está comprendido entre 0'001 y 0'01, *que se escriben con dos ceros despues de la coma,* tienen por logaritmo —3 *más* una decimal, esto es, su logaritmo será mayor que —3. Los números decimales comprendidos entre 0'01 y 0'1 *que se escriben con un cero despues de la coma,* tienen por logaritmo —2 *más* una decimal. Los números decimales comprendidos entre 0'1 y 1, *que se escriben sin ningun cero despues de la coma,* tienen por logaritmo —1 *más* una decimal.

Como se habrá notado, el logaritmo de las decimales consta de dos partes: la característica, que es negativa, y la mantiza, que es positiva. Para representar este sistema, se coloca debajo del signo ménos única-



mente la característica. Así, el log. de 0'075 que se escribe ......... $\bar{2}$'875 06126, es una simplificacion de la expresion

$$+0'875\ 06126-2.$$

En las decimales suele preferirse emplear en vez de las características negativas, sus complementos aritméticos.

*Se llama complemento aritmético de un número lo que le falta para ser igual á la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene.* Así por ejemplo, el complemento aritmético de 38 es 100—38=62, y como las características de los logaritmos no tienen más que una sola cifra, su complemento aritmético se determina tomando su diferencia á 10.

Si tenemos, por ejemplo, que la característica de una decimal es —2, su complemento aritmético será 8, supuesto que

$$10-2=8$$

en cuya ecuacion $\quad -2=8-10$

Se ve, pues, que podemos reemplazar ó sustituir la característica negativa —2 por su complemento aritmético 8, pero teniendo cuidado de restar 10. A esta clase de características, les llamaremos *características complementarias.*

Supuesto que para determinar el complemento aritmético de una característica la hemos de restar de 10, y que la característica negativa de una decimal consta de tantas unidades como ceros hay despues de la coma más uno, tendremos:

$$\text{comp. aritm.}=10-(\text{nº de ceros}+1)=10-\text{nº de ceros}-1$$

luego $\quad \text{comp. aritm.}=9-\text{número de ceros}$

de lo que se infiere que, *el complemento aritmético de la característica del logaritmo de una decimal es 9, ó un número tantas unidades menor que 9 como ceros hay despues de la coma.* Por ejemplo, el logaritmo de 0'075 con característica positiva es 8·87506126; pero debe tenerse presente que este logaritmo es una simplificacion de la verdadera expresion 8'87506126—10, teniéndose costumbre de omitir el —10. Por lo demás, es fácil comprobar que lo mismo es, $\bar{2}$'87506126 que.......... 8'87506126—10. Para distinguir los logaritmos en que se ha tomado el complemento aritmético de la característica, y en los que se ha omitido —10, los anotaremos poniendo un punto entre la característica y la mantiza, en vez de poner una coma.

En el caso en que la decimal tuviera más de nueve ceros despues de la coma, y que quisiera hacerse uso de las características complementarias, habria necesidad de tomar el complemento aritmético, restando la característica de 100, y recordar en las operaciones respectivas que está subentendida la resta de este número.

En lo que antecede se fundan las siguientes

Reglas para determinar las características de los logaritmos.—1ª *La característica del logaritmo de un número entero consta de tantas unidades como cifras tiene el número ménos una.*

2ª *La característica del logaritmo de un número compuesto de enteros y decimales es la que corresponde á la parte entera.*

3ª *La característica del logaritmo de una fraccion decimal es negativa y consta de tantas unidades como ceros hay despues de la coma más uno.*

4ª *La característica complementaria del logaritmo de una fraccion decimal es 9, ó un número tantas unidades menor que 9 como ceros hay despues de la coma.*

Pondremos los siguientes ejemplos para determinar las características de los logaritmos de las diferentes especies de números.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Característica | del logaritmo | del número | *entero* | 3526=3‘ |
| „ | „ | „ | „ | 8=0‘ |
| „ | „ | „ | *mixto* | 8‘046=0‘ |
| „ | „ | „ | „ | 325‘75=2‘ |
| „ | negativa | de una | *decimal* | 0‘0035=$\bar{3}$‘ |
| „ | „ | „ | „ | 0‘8756=$\bar{1}$‘ |
| „ | positiva | de una | „ | 0‘228=9· |
| „ | „ | „ | „ | 0‘004=7· |

329—Mantiza de los logaritmos.—Ya hemos dicho que se entiende por mantiza de un logaritmo su parte decimal, y ántes de dar las reglas correspondientes para determinarla, demostraremos el siguiente

Teorema.—*En el sistema de logaritmos vulgares la mantiza de un número* 10, 100, 1000, *etc. veces menor que otro es la misma que la de éste.*

Demostracion.—Sabemos que el logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo ménos el del divisor (325.2°), y que tomando 10 por base del sistema de logaritmos, el logaritmo de este número 10 y de cualquiera de sus potencias es un número entero. (328.—1ª)

Si representamos por $y$ un número cualquiera, $\frac{y}{10^n}$ representará otro número 10, 100, 1000, etc. veces menor que él y tendremos que



$$\text{logaritmo}\left(\frac{y}{10^n}\right)=\text{logaritmo } y\text{—logaritmo } 10^n$$

pero como 10 es la base del sistema, logaritmo $10^n=n$ y se tiene que

$$\text{logaritmo } \frac{y}{10^n}=\text{logaritmo } y-n$$

Ahora bien, como $n$ es número entero, al restarlo de logaritmo $y$ no no se alterará la parte decimal, por lo cual el logaritmo de $\frac{y}{10^n}$ tendrá la misma mantiza que el logaritmo de $y$, que es lo que debiamos demostrar.

| | |
|---|---|
| Por ejemplo, si el logaritmo de 75 es | 1‘87506126 |
| el logaritmo de 7‘5 será | 1‘87506126.—log. 10 |
| el logaritmo de 0‘75 será | 1‘87506126.—log. 100 |
| el logaritmo de 0‘075 será | 1‘87506126.—log. 1000 |

pero como el logaritmo de 10 es 1, el de 100 es 2 y el de 1000 es 3 resulta que

| | |
|---|---|
| siendo el logaritmo de | 75=1‘87506126 |
| será el logaritmo de | 7‘5=0‘87506126 |
| será el logaritmo de | 0‘75=$\bar{1}$‘87506126 |
| será el logaritmo de | 0‘075=$\bar{2}$‘87506126 |

lo que comprueba que el logaritmo de un número 10, 100, 1000 etc. veces mayor ó menor que otro no difiere de éste sino en la característica *teniendo la misma mantiza.*

Establecido este principio y habiendo dado una idea del modo de calcular los logaritmos de los números (326) podremos fijar las

Reglas para determinar las mantizas de los logaritmos.—1ª—*La mantiza del logaritmo de un número entero es la que se encuentra* (al lado de él) *en las tablas, segun lo explicaremos despues* (333).

2ª—*La mantiza del logaritmo de un número mixto, compuesto de enteros y decimales es la que corresponde al número que resulta prescindiendo de la coma.*

3ª—*La mantiza del logaritmo de una fraccion decimal, ya sea que se haga uso de las características negativas ó de sus complementos aritméticos, es la que corresponde al número que resulta prescindiendo de la coma.*

330.—Determinacion del logaritmo de un número.—Para determinar el logaritmo de un número, primero se pondrá la característica que le corresponda conforme á las reglas dadas (328) segun sea entero, mixto ó decimal; y en seguida se buscará en las tablas la mantiza que corresponda al número que resulte formado, prescindiendo de la coma en caso de que tenga decimales, ó en el de que el número sea fraccion decimal.

Repetiremos, porque es preciso tenerlo presente en los cálculos, que en caso de servirse de las características negativas la mantiza es positiva; y que cuando para los logaritmos de las decimales se usan los complementos aritméticos de sus características, está sobreentendida la sustraccion de 10.

Así, pues, logaritmo de $0'000416 = \bar{4}'6190933$
es abreviacion de $-4 + 0'6190933$
y logaritmo de $0'000416 = 6'6190933$
es abreviacion de $6'6190933 - 10$

331.—Disposicion de las tablas de logaritmos de Callet.— Entre las diversas tablas de logaritmos que hay, vamos á describir las de Callet, pues conocida la disposicion de éstas, fácilmente podrá comprenderse cualquiera otra. Nos ocuparemos únicameute de las tablas de los números, por no tener necesidad por ahora de hacer uso de las líneas trigonométricas cuyos logaritmos constan tambien en las expresadas tablas.

Las tablas de Callet dan los logaritmos de los números hasta 108 000 con la aproximacion de 7 y á veces de 8 cifras decimales. Están divididas en dos partes: en la primera constan los números desde el 1 hasta 1200; y en la segunda desde 1020 hasta 108000.

Antes hemos indicado que en todo logaritmo se distingue la parte entera, á la que se llama *característica,* y la parte decimal á la que se denomina *mantiza.* Como por reglas muy sencillas (328), puede determinarse la característica del logaritmo de un número, en las tablas de Callet no constan sino las mantizas.

En su primera parte, páginas 1 á 5, debajo de las columnas marcadas con la letra *N*, están los números desde 1 hasta 1200, y en la columna de la derecha al lado de los números constan las mantizas de sus respectivos logaritmos con la aproximacion de ocho decimales.

En la segunda parte de las tablas, páginas 6 á 168, arriba de cada llana constan al lado de la letra N las tres primeras cifras del número con que empieza la llana, y al lado de la letra L, las tres primeras cifras de la mantiza con que comienza la misma llana. El exámen de estas tres primeras cifras del número y del logaritmo que constan en cada página, facilita mucho el uso de las tablas. En esta segunda parte de las tablas nos ocuparemos de los *números,* de las *mantizas* y de las *diferencias* correspondientes á las mantizas.



Los *números* están representados divididos en dos partes: una que se compone de cuatro, y desde la página 155 en adelante de cinco guarismos que constan en la columna de la izquierda, señalada arriba y abajo con la letra *N*, y cuya parte puede considerarse como las decenas del número cuyo logaritmo se busca; y otra que puede reputarse como las unidades del número y que consta en una de las diez columnas de la derecha, marcadas arriba y abajo con los números 0, 1, 2.... 8, 9. Así por ejemplo, en la página 100 tenemos en la primera línea superior los números 66600, 66601, 66602, etc., hasta 66609 compuestos de una parte, 6660, considerada como decenas y de las unidades de 0 á 9 en las diez columnas de la derecha. En la página 160, en la última línea, tenemos, siempre descompuestos en dos partes, los números, 103190, 103191 hasta 103199.

Las *mantizas* de los logaritmos de los números están expresadas divididas en dos partes: hasta el número 99999 la primera parte de la mantiza es de tres cifras, y de 100 000 en adelante es de cuatro; pero en ambos casos está indicada á la izquierda en la columna marcada en cada página arriba y abajo con 0; las cuatro últimas cifras de la mantiza, que forman su segunda parte, constan en la tabla debajo de las cifras 0, 1, 2.... 8, 9 que hemos dicho pueden reputarse como las unidades del número. Por ejemplo, en la página 100, la mantiza del logaritmo del número 66 600 será 823 4742, y la mantiza del número 66 609 será 823 5329. En la misma página la mantiza del logaritmo del número 67 143 es 827 0007. Aquí se ve que las cuatro últimas cifras de la mantiza están un poco más abajo de las cuatro primeras cifras 6714 del número, y esto es porque entre el número 67142 y 67143 cambian de 826 á 827 las tres primeras cifras de la mantiza. En la página 160 la mantiza del logaritmo del número 103 195 es 0136 5866; y la del número 103 159 es 01350712.

A la derecha de las diez columnas de las unidades del número y debajo del encabezado "*dif.*" constan unas tablitas en las que el número superior indica *la diferencia* que existe entre las mantizas de los logaritmos de dos números consecutivos cuya diferencia es la unidad, y debajo de ella, enfrente de los números 1 á 9 constan *las diferencias de la mantiza* correspondientes á 1, 2, 3 ...9 *décimas* entre los números. Por ejemplo, en la página 160

| | |
|---|---|
| la mantiza del log. del número | 103 195 es 0136 5866 |
| la del número | 103 194 es 0136 5445 |
| Diferencia correspondiente á 1 unidad | 421 |

que es la que consta á la derecha en las tablas. Tomando sucesivamente $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ .... $\frac{9}{10}$ de 421 se forma la tablita que consta debajo del expresado número 421, indicando por tanto los números 42, 84........379 las diferencias de las mantizas correspondientes á las décimas entre los números.

332.—Los problemas relativos al uso de las tablas de logaritmos pueden dividirse en dos: *buscar el logaritmo de un número; y determinar el número á que corresponde un logaritmo dado;* pudiendo suceder que el número ó el logaritmo propuesto se encuentre en las tablas ó que no se halle en ellas. Vamos á considerar los diferentes casos que se presentan en los dos problemas dichos.

333.—PRIMER PROBLEMA.—DETERMINAR EL LOGARITMO DE UN NÚMERO.—Cuando se trata de determinar el logaritmo de un número por las tablas de Callet pueden considerarse los siguientes casos: 1° cuando el número propuesto es menor que 1200: 2° cuando es mayor que 1200 y menor que 108000: 3° cuando es mayor que 108000: 4° cuando está compuesto de enteros y decimales: 5° cuando es una fraccion decimal: 6° cuando es un quebrado impropio ó consta de enteros y quebrados: y 7° cuando es un quebrado propio.

PRIMER CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es menor que* 1200, *se pondrá su característica por la regla respectiva* (328) *y en seguida se buscará el número propuesto en la primera parte de las tablas, páginas* 1 *á* 5, *al lado de cuyo número consta la mantiza correspondiente.*

Por ejemplo, se busca el logaritmo del numero 976: su característica es 2, y al lado del número 976 en la página 5, encontraremos la mantiza 98944982, por lo que

logaritmo 976=2'98944982

SEGUNDO CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es mayor que* 1200 *y menor que* 108000, se pondrá su característica por la regla correspondiente (328), en seguida se buscarán en la parte superior de las tablas al lado de la letra N las tres primeras cifras del número propuesto ó sus próximas menores, luego se buscarán las decenas del número en la columna N y las unidades en una de las diez de la derecha, y se formará la mantiza escribiendo en primer lugar las tres primeras cifras que están en la columna cero, generalmente arriba de las decenas del número y á veces enfrente ó un renglon abajo de ellas, y en seguida las cuatro cifras que en la misma línea horizontal están bajo la columna indicada por las unidades del número propuesto.

Sea como ejemplo determinar el logaritmo del número 83564.

Su característica es 4, y su mantiza la hallaremos en la página (128.)



Siendo las decenas del número 8356 y 4 sus unidades las tres primeras cifras de su mantiza son 922 y las cuatro últimas 0192: luego

logaritmo 83564=4'9220192

TERCER CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es mayor que* 108000 se pondrá la característica que le corresponda, en seguida se separarán á la derecha las cifras que sea necesario para que á la izquierda quede un número menor que 108000 de cuyo número se buscará la mantiza: *si los guarismos separados á la derecha son más de dos*, se consideran como decimales y se multiplican por la diferencia logarítmica correspondiente á una unidad, agregando la parte entera del producto á la mantiza hallada para el número menor que 108000 que se separó á la izquierda: *si los guarismos separados á la derecha del número propuesto son uno ó dos*, se determinará lo que ha de agregarse á la mantiza, como lo explicaremos en seguida, por medio de las diferencias logarítmicas de las partes de la unidad que constan en la última columna de la tabla debajo de la diferencia relativa á la unidad.

Sea como ejemplo determinar el logaritmo del número 92473268. La característica del logaritmo de este número será 7, y separando las tres últimas cifras de la derecha 268, determinaremos la mantiza del número 92473'268 que es igual á la del propuesto (329). La mantiza de 92473 es '9660149 á la que debemos agregar la diferencia correspondiente á 0'268 para tener la del número que buscamos. Supuesto que segun se ve en las tablas, 47 es la diferencia que hay entre los logaritmos de dos números cuya diferencia es una unidad, determinaremos la diferencia correspondiente á 0'268 por la siguiente proporcion:

$$1 : 0'268 :: 47 : x = 12'596$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \hline 1876 \\ 1072 \\ \hline 12'596 \end{array}$$

En la práctica se omite establecer la proporcion, pues siendo 1 el extremo conocido *basta multiplicar la diferencia logarítmica de la unidad por la parte decimal.* Asi, pues, tenemos.

| | | |
|---|---|---|
| | Mantiza de | 92473='9660149 |
| | Diferencia correspondiente á 0'268.........+ | 13 |
| | Mantiza de | 92473'268='9660162 |
| luego | logaritmo | 92473268=7'9660162 |

Sea como segundo ejemplo de este caso, determinar el log. del número 10734528. La característica será 7. Para dejar un número que se encuentre en las tablas separaremos los dos guarismos de la derecha y determinaremos la mantiza de 107345'28 sirviéndonos de las diferencias logarítmicas de las partes:

| | | |
|---|---|---|
| Mantiza de | 107345=0'0307 8182 | |
| Mas dif. por | 0'2 | 81 |
| Mas dif. por | 0'08 | 32 ' 4 |
| Mantiza de | 107345'28='0307 8295 | |
| log. | 10734528=7'03078295 | |

Estos resultados, como todos aquellos que no están en las tablas, no son enteramente exactos sino aproximados.

CUARTO CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca, está compuesto de enteros y decimales, se determina la característica correspondiente á la parte entera, y se busca la mantiza del número que resulte formado prescindiendo de la coma.*

Por ejemplo, se busca el logaritmo del número 532'685.

Estando comprendido este número entre 532 y 533, la característica de su logarítmo será la misma que la de la parte entera, esto es, 2. Respecto á la mantiza, como 532'685, es 1000 veces menor que 532 685 su mantiza será igual á la de este último número (329).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Mantiza de | 53268 | ='726 4664 |
| | Dif. por | 0'5 | 41 |
| | Mantiza de | 532685 | ='726 4705 |
| luego | log. | 532'685 | =2'726 4705 |

QUINTO CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es una fraccion decimal,* se determinará su característica bien sea negativa ó positiva por las reglas dadas, (328—3ª y 4ª) y se buscará en las tablas la mantiza correspondiente al número que resulte formado prescindiendo de la coma. (329)

Sea como ejemplo, determinar el logaritmo de la fraccion decimal 0'00985, su característica negativa será $\bar{3}$. La mantiza la hallaremos en la primera parte de las tablas, página 5 al lado del número 985 que resulta prescindiendo de la coma, y es 99343623. Por tanto.

log. 0'00985=$\bar{3}$'99343623

Sea como segundo ejemplo, determinar el log. de la fraccion deci-



mal 0'0978756 haciendo uso de las características positivas. La característica *positiva* será 8. (328—4ª.) La mantiza de

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 97875 | es | 9906718 | pág. | 152 |
| +dif. por 0'6 | | 27 | | |

| | | |
|---|---|---|
| Mantiza de | 978756 | 9906745 |
| Por lo que log. | 0'0978756=8'9906745 | |

El 1er. log. $\bar{3}$'99343623 es abreviacion de—3+0'99343623
El 2º. log. 8'9906745 es abreviacion de 8'9906745—10

Ejecutando las restas indicadas se ve que son idénticos ambos valores.

SEXTO CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es quebrado impropio, ó está compuesto de enteros y quebrados.* Si se trata de un quebrado impropio, su logaritmo se determinará restando del logaritmo del numerador el del denominador. Si se trata de un número mixto, se incorporará el entero con el quebrado, y en seguida se determinará el logaritmo del quebrado impropio.

Sea como ejemplo, determinar el logaritmo de $\frac{82745}{3560}$

| | |
|---|---|
| log. | 82745=4'917 7418 |
| Ménos log. | 3560=3'551 4500 |
| | 1'366 2918 será el log. de $\frac{82745}{3560}$ |

Esto está fundado en que todo quebrado es el cociente que resulta de dividir el numerador por el denominador, y en que el log. del cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el del divisor.

Sea como segundo ejemplo determinar el log. de $2+\frac{325}{650}$

Incorporando tendremos que $2+\frac{325}{650}=\frac{1625}{650}$

| | |
|---|---|
| log. | 1625=3'210 8534 |
| Ménos log. | 650=2'812 9134 |
| | 0'397 9400=log. $2+\frac{325}{650}$ |

SÉTIMO CASO.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es un quebrado propio,* se determinará restando el logaritmo del denominador del del numerador; pero pueden darse tres formas al resultado: 1° con característica negativa: 2° con el complemento aritmético de la característica, y 3° con el de logaritmos defectivos, en los que tanto la característica como la mantiza, son negativas.

Sea como ejemplo determinar el log. de $\frac{5}{8}$.