1° Con característica *negativa*.

$$\begin{array}{rl} \text{log.} & 5=0'698\ 97000 \\ \text{Ménos log.} & 8=0'903\ 08999 \\ \hline & \bar{1}'795\ 88001=\text{log. } \tfrac{5}{8}. \end{array}$$

Al ejecutar aquí la resta de las décimas, se ve que de 9 á 16 son 7 décimas que se escriben y va 1 unidad: de 1 á 0 la resta es —1, y por eso se ha indicado que la característica es negativa poniéndola debajo del signo —.

2° Con característica *positiva*, que es un complemento aritmético.

$$\begin{array}{rl} \text{log.} & 5=0'698\ 97000 \\ \text{Ménos log.} & 8=0'903\ 08999 \\ \hline & 9{\cdot}795\ 88001=\text{log. } \tfrac{5}{8} \end{array}$$

Aquí, al ejecutar la operacion y al llegar á las décimas, se dice: de 9 á 16, 7 y va 1 que restaremos de 10, lo que da 9; agregando 10 unidades á la característica del minuendo. Naturalmente para restituir á este logaritmo, en el que entra el complemento aritmético de la característica, su verdadero valor, es preciso quitarle 10 unidades, cuya operacion está sobreentendida. Así, pues, siempre que quiera determinarse el logaritmo de un quebrado con característica positiva, se tendrá cuidado de agregar á la memoria 10 unidades á la característica del minuendo.

3° Haciendo uso de los logaritmos defectivos:

Restaremos el log. de 5=0'698 97000
del log. de 8=0'903 08999 que tiene mayor valor y el resultado llevará signo —0'204 11999=log. $\frac{5}{8}$

En este último caso, tanto la característica como la mantiza, son negativas.

La forma más usada es la de característica negativa, y la ménos empleada es la de logaritmos defectivos.

Por lo demas, como se habrá comprendido, estos tres resultados tienen el mismo valor, y no difieren sino en la forma. En efecto, bastará ejecutar las operaciones indicadas en cada expresion.

1° log. $\frac{5}{8}=\bar{1}'795\ 88\ 001=-1+0'795\ 88\ 001=-0'204\ 11\ 999$
2° $=9{\cdot}795\ 88\ 001=9'795\ 88\ 001-10=-0'204\ 11\ 999$
3° $=-0'204\ 11\ 999=$ .... $=-0'204\ 11\ 999$

Sea como 2° ejemplo de este caso encontrar el log. de $\frac{16}{2560}$

1°, por característica negativa

$$\begin{array}{rl} \text{log.} & 16=1'204\ 1200 \\ \text{Ménos log.} & 2560=3'408\ 2400 \\ \hline & \bar{3}'795\ 8800=\text{log. } \tfrac{16}{2560} \end{array}$$

aquí al restar las primeras cifras de las mantizas se tiene: de 5 á 12 la diferencia es 7, y va 1 y 3 son 4: de 4 á 1 la diferencia es —3, que se escribe $\bar{3}$, para denotar que solo la característica es negativa.

2° Por complemento aritmético.

$$\begin{array}{rl} \text{log.} & 16=1'204\ 1200 \\ \text{Ménos log.} & 2560=3'408\ 2400 \\ \hline & 7{\cdot}795\ 8800=\text{log. } \tfrac{16}{2560} \end{array}$$

Aquí al ejecutar la operacion se supone que la característica del log. de 16 es 11 en vez de 1.

3° por logaritmo defectivo.

Restaremos el log. de 16=1'204 1200
del log. de 2560=3'408 2400 que tiene mayor valor, y el resultado será —2'204 1200=log. $\frac{16}{2560}$

334.—Ejemplos del primer problema de logaritmos.—Para ejercicio en el manejo de las tablas y de las reglas dadas, pondremos los siguientes ejemplos; debiendo los alumnos comparar los resultados que obtengan con los logaritmos que en seguida constan enfrente de cada número.

Determínense los logaritmos de los números:

1° 895	2'951 82304
2° 0'000 32 con característica negativa	$\bar{4}$'505 14998
3° 3'25	0'511 88336
4° 8756	3'942 3058
5° 32'286	1'509 0142
6° 0'106 735 con característica negativa	$\bar{1}$'028 30685
7° 32 726 875	7'514 9045
8° 778'0537	2'891 0096
9° 0'358 947 con característica negativa	$\bar{1}$'555 0304
10° 0'000 25 con idem idem	$\bar{4}$'397 9401

11° 0'045 726 con idem idem.......................... $\bar{2}$'660 1632
12° 0'369 728 con idem idem.......................... $\bar{1}$'567 8823
13° 0'000 0375 con característica positiva............ 5·574 03127
14° 0'874 9937 con idem idem.......................... 9·942 0050
15° 0'002 51 785 con idem idem........................ 7·401 0299
16° $\frac{3225}{75}$.. 1'633 4684
17° $25+\frac{7}{12}$.. 1'407 95713
18° $555+\frac{16}{30}$.. 2'744 7101
19° $\frac{894}{12167}$ con característica negativa............... $\bar{2}$'866 1540
20° $\frac{3268}{169726}$ con característica positiva .... 8·284 5336
21° $\frac{8275}{346789}$ su logaritmo defectivo...................... —1'622 2973

335.—Segundo problema. — Determinar el número á que corresponde un logaritmo. — Consideraremos por separado los casos relativos á la mantiza y los correspondientes á la característica del logaritmo propuesto. Respecto á la mantiza ocurren dos casos; cuando ésta se encuentra en las tablas, y cuando no se encuentra exactamente en ellas. En cuanto á la característica, se presentan tres casos: cuando es positiva, cuando es negativa, y cuando es un complemento aritmético.

Primer caso.—*Cuando la mantiza del logaritmo dado se encuentra en las tablas.*

Encontradas las tres primeras cifras de la mantiza en la parte superior de las tablas al lado de la letra *L* ó sus próximas menores, se buscan en la columna 0 las tres primeras cifras de la mantiza. A la derecha ó abajo de estas se buscan las cifras próximas menores de las cuatro últimas cifras de la mantiza, y una vez halladas, se continúa en la línea horizontal hasta encontrar las cuatro últimas cifras de la mantiza propuesta. El número á que corresponde tendrá por decenas los guarismos puestos bajo la columna *N*, en la misma línea y á la izquierda de los cuatro últimos guarismos de la mantiza, y por unidades el guarismo que está indicado en las tablas arriba y abajo en la columna donde constan los cuatro últimos guarismos de la mantiza.

Sea como ejemplo buscar el número á que corresponden los logaritmos.

1° 4'978 3449=log. 95 136
2° 4'074 0481=log. 11 859
3° 4'545 0224=log. 35 077

Segundo caso.—*Cuando la mantiza del logaritmo dado no se encuentra exactamente en las tablas*, se busca segun se ha explicado; la mantiza próxima menor á la del logaritmo propuesto, escribiendo debajo de sus cuatro últimas cifras las de la mantiza encontrada en las tablas, y á su derecha el número á que corresponde. En seguida se determina la diferencia que hay entre la mantiza hallada en las tablas y la del logaritmo dado; pudiendo suceder que *esta diferencia se encuentre entre las diferencias correspondientes á las décimas,* y que constan en la columna de la derecha de las tablas, ó *que no se encuentre entre éstas.* Si la diferencia de los logaritmos consta entre las de las décimas, el número que está á la izquierda se escribirá á continuacion del número á que correspondió la mantiza próxima menor á la del logaritmo propuesto. *Si la diferencia de los logaritmos no consta entre las de las décimas, se divide por la diferencia logarítmica correspondiente á la unidad, y la parte decimal del cociente se escribirá á la derecha del número á que correspondió la mantiza próxima menor á la del logaritmo propuesto.*

Sea como ejemplo determinar el número á que corresponde el logaritmo 5'946 0724.

En la página (136) encontraremos la mantiza '946 0689 próxima menor á la del logaritmo propuesto, y la cual corresponde al número 88322. A la derecha del logaritmo dado escribiremos este número y abajo de las cuatro últimas cifras de su mantiza las halladas en las tablas.

5'946 0724=log. 88 322
0689

Dif. 35

Determinada la diferencia 35 entre la mantiza del logaritmo propuesto y la mantiza que se encuentra en las tablas, veremos si está entre las diferencias de las partes de la unidad; y encontrándose á la izquierda de 35 el número 7 décimas, pondremos este guarismo á continuacion del número á que correspondió la mantiza de las tablas, y tendremos:

5'946 0724=log. 883227

Determinaremos ahora el número á que corresponde el logaritmo 7'995 4011.

En la página (153) encontramos la mantiza próxima menor '995 3982 que corresponde al número 98946.

7'995 4011=log. 98946
3982

Dif. 29

no encontrándose la diferencia 29 entre las de las partes, debiamos establecer una proporcion diciendo: si 44 de diferencia entre dos logaritmos corresponde á 1 de diferencia entre los números; cuando la diferencia sea 29, ¿cuál será la de los números?

$$44 : 1 :: 29 : x$$

pero en la práctica se omite establecer la proporcion, y se divide 29 por 44, cuyo cociente aproximado es 0‘659. La parte decimal se escribe á continuacion y á la derecha del número á que correspondió la mantiza encontrada en la tabla, y tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 290 & 44 \\ \cline{2-2} 260 & 0‘659 \\ 400 & \\ 04 & \end{array}$$

$$7‘995\ 4011 = \log.\ 98\ 946\ 659$$

Pondremos como ejemplos de este caso los siguientes:

1°	5‘095 3264=log. 124 545
2°	7‘429 5513=log. 26 887 555
3°	5‘562 0286=log. 364 778
4°	7‘168 1009=log. 14 726 546

Regla.—*Para determinar el número á que corresponde un logaritmo se comienza por buscar el numero á que corresponde la mantiza, prescindiendo de la característica, y en seguida se considera ésta atendiendo á si es positiva, negativa, ó un complemento aritmético.*

1°—*Si la característica es positiva, el número á que corresponde el logaritmo será entero, ó compuesto de enteros y decimales; constando la parte entera de tantos guarismos como unidades tenga la característica, más uno.* (328—1ª y 2ª).

2°—*Si la característica es negativa, el número á que corresponde el logaritmo será una fraccion decimal, debiendo ponerse tantos ceros entre la coma y la primera cifra significativa como unidades tenga la característica ménos uno.* (328—3ª).

3°—*Si la característica es un complemento aritmético, el número á que corresponde el logaritmo será una fraccion decimal, debiendo ponerse tantos ceros entre la coma y la primera cifra significativa como unidades le faltan á la característica para ser igual á 9.* (328—4ª).

Por último, si todo el logaritmo es negativo, corresponderá á un quebrado cuyo numerador sea la unidad y su denominador el número á que corresponda el logaritmo tomado como positivo. (325—5ª).

336.—Ejemplos del segundo problema de logaritmos.—Por vía de ejercicio de las reglas y explicaciones anteriores, los alumnos determinarán los números á que pertenecen los siguientes logaritmos.

1°	4‘978 2947	
2°	4‘587 0120	
3°	$\bar{2}$‘406 7343	
4°	$\bar{1}$‘089 1276	
5°	6‘079 1812	la característica es comp. aritm.
6°	8‘545 5124	idem idem.
7°	—2‘736 3965	el log. es defectivo.
8°	—3‘989 3062	idem idem.

Resoluciones.

1°	log. de 95125
2°	,, 38637‘768
3°	,, 0‘02551146
4°	,, 0‘12278
5°	,, 0‘00012
6°	,, 0‘0351166
7°	,, $\frac{1}{545}$
8°	,, $\frac{1}{9756‘77} = \frac{100}{975677}$

337.—Observaciones sobre el cálculo de logaritmos.—I.—Al ejecutar cualquiera operacion en que entran logaritmos con características negativas, debe tenerse presente que la mantiza es positiva, y por tanto al sumar ó multiplicar esta clase de logaritmos las unidades que resultan retenidas por las operaciones ejecutadas con las décimas de las mantizas son números positivos de los que deben restarse las características negativas. Cuando hay que dividir por un número un logaritmo con característica negativa, es necesario agregarle á ésta el número de unidades negativas suficientes para formar un número que sea divisible exactamente, teniendo cuidado, para no alterar el resultado, de agregar el mismo número de unidades positivas reducidas á décimas á la primera cifra de la mantiza. Desde ahora llamamos la atencion sobre este punto, sobre el que volveremos á insistir en el número 338 en los problemas respectivos.

II.—Cuando en los cálculos entran logaritmos cuya característica es un complemento aritmético, debe tenerse presente que se ha omitido la resta de 10 en cada logaritmo que contiene un complemento, por lo cual es necesario algunas veces expresar esta operacion sobreentendida, otras es preciso suprimir las decenas de la característica, y otras por último, es forzoso agregar á la característica las decenas necesarias para que el resultado exprese el complemento aritmético de la característica. Presentaremos ejemplos de esta observacion en el número 338 al resolver los problemas respectivos.

III.—Vamos á demostrar que *la diferencia logarítmica entre dos números consecutivos disminuye á medida que el valor absoluto de los números aumenta.*

Sean los números consecutivos y é $y+1$: la diferencia de sus logaritmos será

$$\log.(y+1)-\log.\ y=\log.\left(\frac{y+1}{y}\right)=\log.\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

llamando d la diferencia logarítmica correspondiente á la unidad, se tiene:

$$d=\log.\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

como $\frac{1}{y}$ disminuye al crecer y, esta expresion nos hace comprender que el valor de d disminuye á medida que y aumenta, aproximándose más y más á log. $1=0$.

Por esto se habrá observado en las tablas que limitando la aproximacion á siete cifras decimales á medida que el valor de los números aumenta, la diferencia de los logaritmos de los números consecutivos va disminuyendo sucesivamente, y además que esta diferencia permanece constante entre mayor cantidad de números.

Como los logaritmos son números en progresion aritmética que corresponden á números puestos en progresion geométrica, se comprende que para determinar el logaritmo de un número comprendido entre dos números cuyos logaritmos constan en la tabla, debía procederse interpolando respectivamente entre los números dados y entre sus logaritmos el número de medios geométricos y de medios aritméticos que fueran necesarios; pero en virtud de que cuando se limita la aproximacion de los logaritmos á cierto número de cifras decimales, la diferencia entre los logaritmos consecutivos permanece *constante* entre muchos números, resulta que no hay inconveniente en considerar que la diferencia entre los logaritmos, dentro de determinados límites, es proporcional á la diferencia entre los números. En efecto, si cuando se limita el cálculo de las mantizas á 7 decimales es un hecho que por 2 unidades de diferencia entre los números, hay entre sus logaritmos una diferencia doble de la que corresponde á la unidad; y si cuando la diferencia entre dos números es de 10 unidades, la diferencia entre sus logaritmos es 10 veces mayor que cuando difieren una unidad, es perfectamente fundado establecer que por una *fraccion* de la unidad de diferencia entre los números debe corresponder la *misma fraccion* de la diferencia logarítmica; pero debemos observar que esto solo es aproximado y que si se calcularan los logaritmos con mayor número de decimales, el procedimiento empleado no conduciría á un resultado exacto. Por esta razon es necesario llevar la aproximacion á un grado mayor cuando los números pasan de cierto límite; así en las tablas de Callet, desde 100000 en adelante los logaritmos están calculados ya con 8 cifras decimales.

IV.—A menudo sucede que aplicando los logaritmos al cálculo es necesario ejecutar operaciones con cantidades negativas; pero como hemos visto que tomando por base una cantidad positiva no se pueden representar por logaritmos las cantidades negativas; á fin de evitar esa dificultad, *cuando hay que ejecutar una operacion por logaritmos en la que entran cantidades negativas, se buscan los logaritmos de estas como si fueran positivas, se ejecutan las operaciones indicadas y el resultado se afecta del signo que le corresponde conforme á las reglas del álgebra.*

Por ejemplo, si se tiene que multiplicar 40 por —5, se buscarán los logaritmos de estos dos números, se sumarán, se buscará á qué número corresponde la suma, y este número se afectará del signo ménos.

Si tenemos que elevar —20 al cuadrado, multiplicaremos por 2 el logaritmo de 20, y el número á que corresponda lo precederemos del signo *más*, porque toda potencia par de una cantidad negativa da un resultado positivo.

338.—Operaciones y problemas resueltos por logaritmos.—Los problemas que pueden resolverse por logaritmos son numéricos ó algebráicos: los primeros tienen por objeto ejecutar con los números las operaciones que pueden efectuarse por medio de logaritmos, y los segundos tienen por objeto la resolucion ó trasformacion de las ecuaciones valiéndose de los logaritmos.

Ni la suma ni la resta pueden ejecutarse con los logaritmos; pero sirviéndose de ellos se facilita la multiplicacion, la division, la elevacion á potencias y la extraccion de raíces, y segun se ha visto (325) las reglas que deberán seguirse para ejecutar estas operaciones son las siguientes:

1° *Para multiplicar dos ó más números se buscarán los logaritmos de los factores, se sumarán y se buscará el número á que corresponde la suma de los logaritmos, cuyo número será el producto buscado.*

2° *Para dividir dos números se restará el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y se determinará el número á que corresponde la diferencia de los logaritmos, el cual será el cociente buscado.*

3° *Para elevar un número á una potencia dada, se multiplicará el logaritmo del número por el exponente de la potencia, y determinando el número á que corresponde el logaritmo obtenido, se tendrá la potencia buscada.*

4° *Para extraer la raíz de un número se dividirá el logaritmo del número por el índice de la raíz, y determinando el número á que corresponde el logaritmo obtenido, se tendrá la raíz buscada.*

Cuando en las operaciones entran logaritmos con características negativas se hará de modo que la mantiza sea siempre positiva; y cuando los logaritmos están representados por medio de los complementos aritméticos de las características, se tendrá presente al ejecutar las operaciones que está sobrentendida la resta de 10 unidades.

Vamos á resolver conforme á estas reglas los siguientes problemas numéricos:

I.—Multiplicar los números enteros 375 por 2846.

log. 375=2‘5740313
Más log. 2846=3‘4542349
6‘0282662=log. 1067250 producto buscado

II.—Determinar el producto de 82‘96×0‘048.

log. 82‘96=1‘9188687
Más log. 0‘048=$\bar{2}$‘6812412
0‘6001099
0‘6001013=log. 3‘9820
Dif. 86 que corresponde á 0‘8.

El producto de los números dados es 3‘98208.

III.—Determinar el producto de las decimales 0‘345×0‘00428.

log. 0‘345=$\bar{1}$‘5378191
Más log. 0‘00428=$\bar{3}$‘6314438
$\bar{3}$‘1692629=0‘0014766 producto.

IV.—Determinar el producto 0‘345×0‘00428 haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

log. 0‘345=9·537 8191
Más log. 0‘00428=7·631 4438
(1)7·169 2629=0‘0014766 producto.

Aquí debe suprimirse una decena en el logaritmo de la suma por haberse empleado dos complementos aritméticos y deber quedar comprendido en el resultado un complemento.

V.—Determinar el cociente de 82225 dividido por 50.

log. 82225=4‘9150039
Ménos log. 50=1‘6989700
3‘2160339=log. 1644‘5 cociente.

VI.—Dividir 0‘095 por 2‘85

log. 0‘095=$\bar{2}$‘9777236
Ménos log. 2‘85=0‘4548449
$\bar{2}$‘5228787=log. 0‘033 333 cociente.

VII.—Dividir 0‘985 por 0‘0075

log. 0‘985=$\bar{1}$‘9934362
Ménos log. 0‘0075=$\bar{3}$‘8750613
2‘1183749=log. 131‘33
3639
Dif. 1100 | 331
1070 | 0‘33
077

El cociente buscado será 131‘3333.

VIII.—Determinar el cociente de 0‘985 dividido por 0‘0075 haciendo uso del complemento aritmético de las características.

log. 0‘985=9·993 4362
Ménos log. 0‘0075=7·875 0613
2‘118 3749=log. 131‘333. Este resultado no ha necesitado modificarse, porque habiendo un complemento en el minuendo y otro en el sustraendo, esto equivale á haber agregado +10 á los dos términos.

IX.—Dividir 0‘00096 por 0‘6 haciendo uso de características negativas y tambien de sus complementos aritméticos.

Por características negativas.

log. 0‘00096=$\bar{4}$‘98227123
Ménos log. 0‘6=$\bar{1}$‘77815125
$\bar{3}$‘20411998=log. 0‘0016

Al llegar á restar las características debiendo restarse —1 de —4, la