operacion es $-4-(-1)=-4+1=-3$; cuyo resultado nos indica que el número á que corresponde el logaritmo es una fraccion decimal que debe tener dos ceros entre la coma y la primera cifra significativa.

Por complemento aritmético de las características.

log. 0‘00096=6·982 27123
Ménos log. 0‘6=9·778 15125

7·204 11998=0‘0016

No siendo posible restar la característica 9 de 6 se agregan á ésta 10 unidades y se resta 9 de 16, lo que equivale á determinar el complemento aritmético de la característica —3, que sin esto se hubiera encontrado. Sabiendo que en el resultado la característica expresa un complemento aritmético, corresponderá á la decimal 0‘0016.

X.—Elevar 625 al cubo por logaritmos.

log. 625=2‘795 8800
Multiplicado por 3=8‘387 6400=log. 24414

	6389	178
Dif.	1100	0‘0617
	320	
	1420	
	174	

Así $625^3=244140618$

resultado aproximado que difiere del verdadero 7 unidades, diferencia realmente corta cuando se trata de un valor que pasa de 244 millones, y se atiende á la facilidad con que se ha obtenido por medio de los logaritmos.

XI.—Elevar 0‘08 á la cuarta potencia por logaritmos.

log. 0‘08=$\bar{2}$‘903 08999
Multiplicado por 4=$\bar{5}$‘612 35996=log. 0‘000040960.

Al acabar de multiplicar la mantiza, decimos: 4 por 9 son 36: escribimos 6 décimas y retenemos 3 unidades positivas. En seguida 4 por —2 da —8 y +3 retenidas=—5 que es la característica que ponemos.

Así, pues, $0‘08^4$=0‘00004096

XII.—Elevar 0‘08 á la cuarta potencia haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

log. 0‘08=8·90308999
Multiplicado por 4=(3)5·61235996=0‘000040960

Al multiplicar la característica por 4 se obtiene el producto 35, y habiendo entrado cuatro complementos en este resultado debiamos rebajar 4 decenas; pero no siendo esto posible, si no se quiere un resultado negativo, suprimimos las 3 que hay, quedando un complemento aritmético, por lo cual el logaritmo hallado 5·61235996 corresponderá á una decimal que tiene cuatro ceros despues de la coma.

Cuando se quiere tener más aproximacion al elevar un número á una potencia se toma su logaritmo con mayor número de cifras decimales en las tablas que constan de la página (170) á (188) de las tablas de Callet.

XIII.—Extraer la raíz 8ª de 5764801

mantiza log. 57648= ‘760 7842
diferencia por 0‘01= 0‘8

log. 5764801= 6‘760 7843
$\frac{1}{8}$= 0‘845 0980=log. 7.

Luego $\sqrt[8]{5764801}=7$

XIV.—Extraer la raíz 4ª á la decimal 0‘000 04096

log. 0‘000 04096=$\bar{5}$‘612 3599
$\frac{1}{4}$=$\bar{2}$‘903 08998=log. 0‘08

Luego $\sqrt[4]{0‘0000\ 4096}$ =0‘08

Al tener que tomar la cuarta parte del log. $\bar{5}$‘612 3599 á fin de hacer que la mantiza del nuevo logaritmo sea positiva y solo la característica sea negativa, hemos agregado á la característica, $\bar{5}$,—3 unidades para obtener el número $\bar{8}$ que es divisible exactamente por 4; la cuarta parte de $\bar{8}$ es $\bar{2}$; y para compensar las 3 unidades quitadas al logaritmo $\bar{5}$‘612 3599, al continuar la division se las agregamos á la mantiza reducidas á décimas, y decimos: cuarta de 36 décimas es 9 décimas. Esta operacion equivale á quitar y agregar un mismo número á una cantidad, así se tiene:

$\bar{5}$‘612 3599=—5+0‘612 3599=—5—3+3+0‘612 3599=$\bar{8}$+3‘612 3599

por lo que se ve que el valor del logaritmo no se ha alterado; y se ha conseguido que la mantiza sea positiva.

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla.—*Cuando se tenga que dividir un logaritmo cuya característica sea negativa, por un número que no la divida exactamente, se le agregará el número de unidades que sea necesario para formar el divisor ó un múltiplo del divisor; se dividirá la característica negativa así* *formada; se tendrá cuidado de agregar á las décimas de la mantiza el mismo número que se agregó á la característica reducido á décimas; se dividirán éstas por el número dado, y se continuará la operacion.*

Esta regla es de muy frecuente uso.

Extraer la raíz 4^a de la decimal 0'000 04096 haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

$$\log 0'000\ 04096 = 5{\cdot}612\ 3599$$

$$\tfrac{1}{4} = 8{\cdot}903\ 08998 = \log.\ 0'08$$

Luego $\sqrt[4]{0'0000\ 4096} = 0'08$

Al tomar la cuarta parte del log. 5·612 3599 con el objeto de hacer que en el resultado esté expresado el complemento aritmético de la característica agregamos 3 decenas, y se toma la cuarta parte de 35 que es 8, y sobran 3 unidades que se unen á las décimas, se toma la cuarta de 36 que es 9 y se continúa la operacion. Este procedimiento está fundado en que al extraer la raíz de una cantidad por logaritmos es preciso restituir las decenas de la característica que se han suprimido al elevarla á la potencia respectiva, y las cuales son tantas unidades como tiene el índice de la raíz ménos una. En efecto, si se eleva á la cuarta potencia el número cuyo logaritmo es 8·903 0899, indicando la característica un complemento aritmético, al multiplicar este logaritmo por 4 la característica será 35; luego al extraer la raíz deberán restituirse las 3 decenas suprimidas.

De otro modo:

$$\log.\ 0'0000\ 4096 = 5{\cdot}612\ 3599 = -10 + 5'612\ 3599$$

Si tenemos que dividir este logaritmo por 4 y queremos que el resultado solo se componga de —10+ un cierto logaritmo para que la parte negativa pueda dividirse exactamente por 4, tendremos que restar y sumar á este valor 30 que son tantas decenas como unidades tiene el índice de la raíz ménos una. Así tendremos:

$$-10 + 5'612\ 3599 = -10 - 30 + 30 + 5'612\ 3599 =$$
$$-40 + 35'612\ 3599$$

tomando la cuarta parte del último valor $\quad -10 + 8'903\ 0899$
resultado que expresa un complemento aritmético.

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla.—*Cuando se tenga que extraer la raíz de un número decimal en cuyo logaritmo se exprese el complemento aritmético de la característica, ántes de dividir el logaritmo por el índice de la raíz, se le agregarán á la característica tantas decenas como unidades tenga el índice ménos una: se ejecutará la division y el logaritmo que resulte corresponderá á una decimal, cuyo valor se determinará atendiendo á que la característica del logaritmo encontrado expresa un complemento aritmético.*

339.—Aplicaciones de los logaritmos en las expresiones algebráicas.—Las propiedades de los logaritmos son de gran uso en Algebra, sea para trasformar algunas expresiones, sea para resolver determinados problemas, por lo cual ponemos á continuacion los siguientes ejemplos:

$$\log.\ abc = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c,$$

$$\log.\ \frac{a}{b} = \log.\ a - \log.\ b.$$

$$\log.\ \frac{abc}{df} = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c - \log.\ d - \log.\ f.$$

$$\log.\ a^n = n \log.\ a;\quad \log.\ a^n b^r c^s = n \log.\ a + r \log.\ b + s \log.\ c.$$

$$\log.\ a^{-n} = \log.\frac{1}{a^n} = -n \log.\ a;\quad \log.\ a^{\frac{n}{r}} = \frac{n}{r} \log.\ a$$

$$\log.\ \frac{bx^n}{d^r} = \log.\ b + n \log.\ x - r \log.\ d.$$

$$\log.\ \frac{ab+bc}{m+n} = \log.\ b + \log.\ (a+c) - \log.\ (m+n)$$

$$\log.\ \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2} \log.\ (x^2+y^2)$$

$$\log.\ \frac{a+x}{a-x} = \log.\ (a+x) - \log.\ (a-x)$$

$$\log.\ \sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}\Big(\log.\ (a+x) + \log.\ (a-x) \Big)$$

$$\log.\ x^3 + \log.\ x^{\frac{3}{4}} = 3 \log.\ x + \tfrac{3}{4} \log.\ x = \frac{15}{4} \log.\ x$$

$$\log.\ \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n} \log.\ (a^3-x^3) = \frac{m}{n} \log.\ (a-x) +$$
$$+ \frac{m}{n} \log.\ (a^2+x^2+ax)$$

$$\log.\ \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a+x)^2} = \tfrac{1}{2} \log.\ (a^2-x^2) - 2 \log.\ (a+x)$$
$$= \tfrac{1}{2} \log.\ (a+x) + \tfrac{1}{2} \log.\ (a-x) - 2 \log.\ (a+x)$$
$$= \tfrac{1}{2} \log.\ (a-x) - \tfrac{3}{2} \log.\ (a+x)$$

$$\log.\ z^3+\tfrac{3}{4}\log. z=3\log. z+\tfrac{3}{4}\log. z=\frac{15}{4}\log. z=\log. z^{\frac{15}{4}}=$$

$$=\log. \sqrt[4]{z^{15}}$$

Aunque las cantidades negativas no tienen logaritmos reales (324—3°) hemos dicho que para obviar este inconveniente se hace uso de la siguiente

REGLA.—*Cuando en un cálculo entren una ó varias cantidades negativas, se tomarán sus logaritmos considerándolas como positivas, y el resultado se afectará del signo que le corresponda por las reglas del Algebra* (337—IV).

340.—ECUACIONES EXPONENCIALES.—Se llaman ecuaciones exponenciales aquellas en que la incógnita está como exponente de una cantidad. La resolucion de esta clase de ecuaciones se efectúa tomando los logaritmos de las cantidades que las forman.

Así por ejemplo, si se tiene la ecuacion

$$a^x=b$$

tomando los logaritmos, se tiene

$$x.\ \log. a=\log. b.$$

de donde

$$x=\frac{\log. b}{\log. a}$$

Debemos advertir que el valor de esta expresion es exacto considerado algebráicamente; pero desde el momento en que se dan valores númericos á las cantidades, como los logaritmos son números comunmente inconmensurables que solo pueden ser aproximados, resulta tambien que el valor numérico de la incógnita solo puede obtenerse por aproximacion.

Si se quiere resolver la ecuacion $b^{c^z}=d$, con respecto á z haremos $c^z=x$, y tendremos $b^x=d$, de donde

$$x=\frac{\log. d}{\log. b}=c^z$$

volviendo á tomar los logaritmos, se tiene:

$$z.\ \log. c=\log. \left(\frac{\log. d}{\log. b}\right)=\log.\ \log. d-\log.\ \log. b$$

$$z=\frac{\log.\ \log. d-\log.\ \log. b}{\log. c}$$

para obtener el logaritmo del logaritmo de d, se considera log. d como un número ordinario.

Así es como, siempre por aproximacion, pueden resolverse *las ecuaciones exponenciales de diversos órdenes.*

En la progresion geométrica, se ha visto que el último término se determina por la fórmula

$$l=aq^{n-1}$$

en la que n entra como exponente: y cuando la incógnita es el número de términos de la progresion, tendremos que resolver la ecuacion exponencial por medio de logaritmos.

$$\log. l=\log. a+(n-1)\log. q$$

de donde

$$n=\frac{\log. l-\log. a}{\log. q}+1$$

Sea como ejemplo, determinar el número de términos de una progresion geométrica en la que el primer término es 3, la razon es 4, y el último término 3072. Tendremos:

log. 3072=3'487 4212
Ménos log. 3 =0'477 1212

log. l—log. a=3'010 3000 | 0'602 0600=log. 4
000 0000 | 5

luego $n=6$. En efecto, la progresion es

$$\div\ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072$$

aquí el resultado fué exacto, pero las más veces solo es aproximado.

341.—FUNCIONES ALGEBRAICAS SIMPLES.—Con la relacion correspondiente á las ecuaciones exponenciales, hemos completado el corto cuadro de las funciones analíticas simples de que se hace uso en el Algebra.

Si llamamos x la variable independiente é y la variable correlativa que depende de ella, tendremos expresadas en las ocho fórmulas siguientes todas las funciones simples de una sola variable de que se sirve el Algebra, teniendo cada funcion su *inversa*, que resulta de la *directa* cuando se relaciona x á y en lugar de relacionar y á x:

1° $\begin{cases} y=a+x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{funcion de } \textit{suma}. \\ y=a-x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{funcion de } \textit{diferencia}. \end{cases}$

$$2^{\circ}\begin{cases} y=ax \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{funcion de } \textit{producto.} \\ y=\frac{a}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{funcion de } \textit{cociente.} \end{cases}$$

$$3^{\circ}\begin{cases} y=x^{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{funcion de } \textit{potencia.} \\ y=\sqrt[a]{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{funcion de } \textit{raíz.} \end{cases}$$

$$4^{\circ}\begin{cases} y=a^{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{funcion } \textit{exponencial.} \\ y=\log.\ x \text{ (siendo } a \text{ la base)} & \text{funcion } \textit{logarítmica.} \end{cases}$$

La dificultad que presentan algunas cuestiones para resolverse por Algebra, consiste principalmente en que no disponemos sino de un corto número de funciones simples elementales para poder formar ecuaciones que expresen las relaciones que ligan las cantidades desconocidas con las conocidas. Las ocho funciones anteriores, expresan las operaciones simples fundamentales, por medio de las cuales se engendra una cantidad desconocida de un modo peculiar y diferente en cada una de ellas.

REGLAS DE ALIGACION, INTERES Y ANUALIDADES.

342.—Casos y fórmulas de las reglas de aligacion.—Dos son los casos relativos á las cuestiones comprendidas en la regla que generalmente se llama de *aligacion:* 1°, *cuando conociéndose el número de unidades y el precio de la unidad en cada una de varias clases de un efecto, se trata de determinar el precio medio de la mezcla;* 2°, *cuando conociéndose los precios de cada clase de un efecto, se quiere determinar cuántas unidades deben tomarse de cada clase para que la mezcla pueda venderse á un precio medio fijo.*

Por ejemplo, es un problema relativo al primer caso el siguiente:

Habiéndose comprado tres partidas de maíz

una de 400 cargas á \$ 4'50 carga
otra de 600 ,, á 5 ,, ,,
y otra de 700 ,, á 4'25 ,,

se quiere determinar el precio medio de cada carga de la mezcla total.

Es un problema relativo al segundo caso el siguiente:

Teniendo aguardiente de dos clases

una que vale á 40 \$ el barril
otra que vale á 62 \$ el id.

se quiere saber cuántos barriles de aguardiente se han de tomar de cada una de las dos expresadas clases para formar una mezcla cuyo precio medio sea de 50 \$.

Comprendidos bien los casos de la regla de aligacion, vamos á ocuparnos de fijar las fórmulas que sirven para resolver cada uno de ellos; pero ántes diremos que *por precio se entiende el valor de la unidad,* y que conforme al primer uso de la multiplicacion *el valor total de un efecto se obtiene multiplicando el número de unidades por el precio de la unidad.*

El principio que nos servirá de fundamento para deducir las fórmulas de aligacion es el siguiente:

La suma de los valores de las partes de la mezcla, estimando cada parte á su precio, es igual al valor de la mezcla al precio medio, supuesto que lo mismo ha de ser vender cada clase á su precio que la mezcla al precio medio.

Primer caso.—Si llamamos c, c', c'' las cantidades de cada una de las clases de un efecto, p, p' y p'' los precios respectivos de cada clase, y m el precio medio de la mezcla, en virtud del principio que antecede podemos establecer la siguiente ecuacion:

$$cp+c'p'+c''p''=(c+c'+c'')\,m$$

de la que despejando á m tendremos

$$m=\frac{cp+c'p'+c''p''}{c+c'+c''} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

esta fórmula, que fácilmente puede ampliarse para cuando se conocen más de tres clases de un efecto y sus precios, nos servirá para resolver los problemas del primer caso de la regla de aligacion, enseñándonos que *el precio medio es igual al cociente que resulta de dividir la suma de los productos de cada cantidad por su precio, por la suma de las cantidades.*

Conocido el precio medio que da la fórmula (1) sin perder ni ganar, será fácil determinar por medio de una simple proporcion, el precio de la mezcla cuando se quiera perder ó ganar un tanto por ciento.

Si por ejemplo, se quiere fijar el precio de la mezcla ganando un 5 por ciento sobre los precios de compra, se pondrá:

$$100 : 5 :: m : x=\frac{5m}{100}$$

y el precio será $=m+x=m+\frac{5m}{100}=\frac{105\,m}{100}$

Segundo caso.—Si conocidos los precios de dos clases de un efecto,