Supuesto que la unidad en el trascurso de un año se convierte en q, para determinar en lo que se convertirá en los años siguientes, tendremos:

$$1 : q :: q : q^2 \text{ al fin del } 2^\circ \text{ año}$$
$$1 : q :: q^2 : q^3 \text{ al fin del } 3^{er.} \text{ año}$$

y 1 se convertirá en q^t al fin de t años.

Ahora bien, siendo c el capital impuesto, para calcular el importe s del capital y sus intereses al cabo del tiempo t, tendremos:

$$1 : q^t :: c : s = cq^t$$

En consecuencia el problema de que tratamos se resolverá por las fórmulas:

$$q = \tfrac{100+i}{100} \qquad s = cq^t \ldots\ldots..(3)$$

de cuyas fórmulas podremos despejar á cualquiera de las cantidades que entran en ellas conociendo las otras tres.

SEGUNDO CASO.—*Dada una renta* R *que debe pagarse cada año, el número* t *de años que deja de pagarse, y el tanto por ciento* i; *determinar la suma* s *que se debe por las rentas y sus intereses á interés compuesto.*

Al fin del $1^{er.}$ año sólo se deberá la renta R.

Al fin del 2° año se deberá además de la renta R, correspondiente á este 2° año, la suma en que se ha convertido la cantidad R que se debia al fin del primer año en el trascurso del segundo. Esta suma en que se ha convertido R durante un año, haciendo $\tfrac{100+i}{100} = q$, la determinaremos por la siguiente proporcion:

$$1 : q :: R : Rq$$

Esto es, al fin del 2° año se deberá: $R + Rq$

Al fin del $3^{er.}$ año se deberá, además de la renta R de ese año, la suma en que se haya convertido con los intereses de un año la cantidad $R + Rq$ que se debia al fin del 2° año, y la cual se determinará por la proporcion

$$1 : q :: R + Rq : Rq + Rq^2$$

En consecuencia, al fin del $3^{er.}$ año se deberá $R + Rq + Rq^2$.

Al fin del 4° año, se deberá, además de la renta R del 4° año, la cantidad en que se haya convertido la suma $R + Rq + Rq^2$ por los intereses que produce en un año y la cual es $Rq + Rq^2 + Rq^3$.

Por tanto, al fin del 4° año, se deberá $R + Rq + Rq^2 + Rq^3$ y al cabo de t años se deberá $R + Rq + Rq^2 + Rq^3 \ldots. + Rq^{t-1}$

Formando estos términos una progresion geométrica creciente cuya razon es q su suma será igual (322) al último término multiplicado por

la razon, ménos el primero; dividida la diferencia por la razon ménos uno, esto es:

$$s = \frac{Rq^{t-1}q - R}{q-1} = \frac{Rq^t - R}{q-1} = \frac{R(q^t - 1)}{q-1}$$

En consecuencia el problema que nos ocupa podrá resolverse por medio de las fórmulas

$$q = \tfrac{100+i}{100} \qquad s = \frac{R(q^t - 1)}{q-1} \ldots\ldots.(4)$$

Conociendo s é i podrá determinarse R fácilmente, y valiéndose de los logaritmos puede despejarse á t; pero si quisiéramos despejar á q, para determinar á i, obtendriamos una ecuacion mixta de grado superior de cuya resolucion no nos hemos ocupado en estos elementos de Algebra.

348.—PROBLEMAS DE LA REGLA DE INTERÉS COMPUESTO.—I.—*Se han impuesto $ 12000 al 5 p% anual, y se quiere determinar á lo que monta el capital con los intereses al cabo de 4 años á interés compuesto.*

La fórmula correspondiente es: $S = Cq^t$

poniendo los valores de las cantidades $S = 12000 \times 1'05^4$

ejecutando las operaciones resulta $S = 14586'075$ pesos, valor del capital y sus intereses á interés compuesto.

II. *¿Al cabo de qué tiempo se habrá duplicado un capital impuesto al 6 p% anual á interés compuesto?*

Supuesto que el capital se ha de duplicar, la suma s será igual á 2 C y la fórmula (3) se convierte en

$$2C = C\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

suprimiendo C, tomando los logaritmos, y poniendo por i su valor se tiene:

$$\log. 2 = t \times \log. \left(\tfrac{106}{100}\right)$$

despejando á t $\qquad t = \dfrac{\log 2}{\log. 1'06} = \dfrac{0'30103000}{0'02530587} = 11'896^{\text{años}}$

Así es que en poco ménos de 12 años, el capital se habrá duplicado.

III. *¿Cuál será el tanto por ciento á que deba imponerse un capital á interés compuesto, para que se duplique al cabo de 18 años?*

La fórmula (3) se convierte en $\qquad 2C = C\left(\dfrac{100+i}{100}\right)^{18}$

suprimiendo C, y tomando los logaritmos se tiene

$$\log. 2=18. \log. (100+i)-18 \log. 100$$

de donde $\log. (100+i)=\frac{\log. 2+18. \log. 100}{18}=\frac{0'30103000+36}{18}$

ejecutando la operacion: $\log. (100+i)=2'01672388=\log. 103'92592$

luego $i=3'92592$ p%

para que el capital se duplique á los 18 años debe imponerse al 4 p% próximamente.

IV. Se ha arrendado una finca en $ 3000 anuales, causando el interés de 6 p% las rentas cuando no se cubran con puntualidad, y se trata de saber lo que se debe al cabo de 3 años por rentas é intereses á interés compuesto.

Las fórmulas (4) correspondientes son:

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad s=\frac{R(q^t-1)}{q-1}$$

sustituyendo los valores de las cantidades:

$$s=\frac{3000\,[\,(1'06)^3-1\,]}{0'06}$$

ejecutando las operaciones se tiene: $s=\$9550'80$
importe de las rentas é intereses al fin de los tres años.

349.—ANUALIDADES.—Hay veces en las que se impone un capital á interés con la condicion de obtener una renta anual fija por determinado tiempo, y cuya renta se va rebajando del capital y sus intereses, de modo que quede completamente amortizado ó extinguido al cabo del tiempo estipulado. Sobre esta base están establecidas las rentas vitalicias.

Llamando C el capital, R la renta anual que trata de obtenerse, t el tiempo ó número de años que debe disfrutarse la renta é i el tanto por ciento, tendremos, que si durante un año 100 se convierten en $100+i$, la unidad se convertirá en $\frac{100+i}{100}$ conforme á la proporcion:

$$100 : 100+i :: 1 : \frac{100+i}{100}$$

Para simplificar haremos: $\frac{100+i}{100}=q$

Por tanto, si durante un año la unidad de moneda se convierte en q, el capital C al fin del 1er. año se habrá convertido en Cq; pero como hay que pagar cada año la renta R, quedará en poder del prestamista.

al fin del 1er. año: $Cq-R$

esta suma en el trascurso del 2° año se convertirá en Cq^2-Rq de la que hay que deducir la anualidad R, quedando en poder del prestamista

al fin del 2° año Cq^2-Rq-R

Esta suma en el trascurso del tercer año se convierte en .... Cq^3-Rq^2-Rq de la que deduciendo la anualidad R quedará en manos del prestamista

al fin del 3er. año Cq^3-Rq^2-Rq-R

Esta suma durante el 4° año se convierte en
$Cq^4-Rq^3-Rq^2-Rq$, de la que deduciendo la anualidad R quedará en poder del prestamista

al fin del 4° año $Cq^4-Rq^3-Rq^2-Rq-R$

Bajo las mismas consideraciones, y supuesto que al fin de t años el capital debe quedar completamente extinguido, tendremos:

$$Cq^t-Rq^{t-1}-Rq^{t-2}-\ldots\ \ldots-Rq-R=0$$

ó $$Cq^t=R+Rq+\ldots\ldots\ldots\ldots\ Rq^{t-2}+Rq^{t-1}$$

siendo el 2° miembro de esta ecuacion una progresion geométrica en la que la razon es q, su suma será igual (322) á $\frac{Rq^{t-1}\times q-R}{q-1}$

de donde $$Cq^t=\frac{Rq^t-R}{q-1}=\frac{R(q^t-1)}{q-1}$$

Despejando á C, tendremos para resolver el problema de anualidades las fórmulas

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}\ldots\ldots\ldots(5)$$

Por medio de estas fórmulas podrá determinarse R conociendo C é i; pero si se quisiera determinar á i, que está en funcion de q, conociendo á C y á R se tropezaria con la dificultad de tener que resolver una ecuacion mixta de grado superior con respecto á q, de cuya resolucion no nos hemos ocupado en estos Elementos de Algebra.

NOTA.—Deducidas las fórmulas que preceden, relativas á los problemas de interés y de anualidades, partiendo de la base que el interés i representa el tanto por ciento al año, unidad escogida para estimar el tiempo, y la renta R representa la renta en la misma unidad de tiempo; cuando en las aplicaciones, el interés no se estime por 100, ó este interés no esté referido á la unidad de tiempo que conste en los otros datos de la cuestion, ántes de hacer las sustituciones correspondientes en las fórmulas, es preciso hacer las reducciones respectivas calculando el interés por 100 en la unidad de tiempo escogida.

Si, por ejemplo, impuesto el capital de \$ 10000 al interés simple de $\frac{1}{2}$ p§ mensual se quiere saber cuánto se debe al cabo de 5 años; ántes de sustituir en la fórmula (1) tendremos que cambiar el $\frac{1}{2}$ p§ mensual en 6 p§ al año, ó dejando el $\frac{1}{2}$ p§ mensual convertir 5 años en 60 meses.

Si tuviéramos que resolver el mismo problema á interés compuesto tendriamos que estimar el tiempo en meses, que es el plazo ó unidad adoptada para el pago de los réditos, y la fórmula seria:

$$s=Cq^t=10000\times1'005^{60}$$

ó bien calcular el interés anual á que equivale el $\frac{1}{2}$ p§ mensual á interés compuesto, para lo que procederiamos como sigue:

$$100 : 100+i :: 1 : q \text{ en el 1er. mes.}$$
$$1 : q :: q : q^2 \text{ en el 2° mes.}$$

luego 1 peso se convertiria en q^{12} en un año.

En nuestro caso $q^{12}=q'=1'005^{12}=1'061\ 678$

y la fórmula apropiada sería:

$$s=Cq'^{t'}=10000\times1'061\ 678^5$$

siendo ambos resultados iguales.

350.—Problemas de anualidades.—I. *¿Qué capital deberá imponerse al 6 p§ anual para poder disfrutar por 10 años de la anualidad de \$2500?*

Las fórmulas respectivas son $\quad q=\frac{100+i}{100} \quad C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}$

sustituyendo: $\quad q=1'06 \quad C=\frac{2500[(1'06)^{10}-1]}{(1'06)^{10}\times0'06}$

Para obtener el resultado haremos uso de los logaritmos y comenzaremos por determinar el valor de $1'06^{10}$ cuyo logaritmo es igual á

$10\times$log. 1'06
log. 1'06=........0'02530587
10

log. $1'06^{10}$=........0'2530587=log. 1'790848
de donde resulta $\quad (1'06)^{10}-1=0'790848$

Ahora calcularemos por una parte el logaritmo del numerador y por otra el del denominador del valor de C.

		Numerador.		Denominador.
log.	2500......	3'397 9400	log. 0'06...	$\bar{2}$'778 1513
,,	0'790848......	$\bar{1}$'898 0930	,, $(1'06)^{10}$..	0'253 0587
		3'296 0330		$\bar{1}$'031 2100
	Ménos log. denomin.	$\bar{1}$'031 2100		
	log. C............	4'264 8230=log. \$18400'22		

El capital buscado que puede producir la anualidad de 2500\$ por 10 años impuesto al 6 por ciento, es \$18400'22.

Debemos hacer observar que este resultado obtenido con gran facilidad por el empleo de los logaritmos, aunque sumamente aproximado al verdadero, no es completamente exacto, en razon de que los logaritmos de las tablas de Callet solo se han calculado con la aproximacion de siete cifras decimales.

II.—*Qué anualidad podrá producir el capital de \$18400'22 impuesto al 6 por 100 anual para quedar amortizado al cabo de diez años?*

Las fórmulas correspondientes son $\quad q=\frac{100+i}{100} \quad C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}$

sustituyendo los valores y despejando á R

$$q=1'06 \qquad R=\frac{18400'22(1'06)^{10}\times0'06}{(1'06)^{10}-1}$$

Haremos uso de los logaritmos, y comenzaremos por calcular el valor de $(1'06)^{10}$

log. 1'06............0'025 30587
10

log. $1'06^{10}$...........0'253 0587=log. 1'790 848
de donde resulta que $(1'06)^{10}-1 =$ 0'790 848

Calcularemos separadamente el log. del numerador y el del denominador de R para que restando el segundo del primero se determine el log. y por consiguiente el valor de R.

	Numerador.	Denominador.
log. 18400'22	........4'264 8230	
log. 0'06	........$\bar{2}$'778 1513	log. 0'790848 ...$\bar{1}$'898 0930
log. $(1'06)^{10}$	........0'253 0587	
	3'296 0330	
Ménos log. del denominador	$\bar{1}$'898 0930	
log. R	.... 3'397 9400=log. \$2500	

La anualidad que puede producir el capital dado en las condiciones del problema, es \$2500.

III.—*A una persona se le prestan \$18400'22 que han de ganar 6 p% al año á interés compuesto, y para pagarlos ofrece dar un abono anual de \$2500; se quiere calcular ¿al cabo de cuántos años estarán amortizados el capital y sus respectivos intereses?*

Las fórmulas aplicables al problema, son:

$$q=\frac{100+i}{100}, \qquad C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}$$

y con el objeto de despejar á t, que es la incógnita, quitaremos los denominadores en la última fórmula, y desarrollando el cálculo, tendremos:

$$Cq^t(q-1)=Rq^t-R, \qquad q^t[R-C(q-1)]=R$$

$$q^t=\frac{R}{R-C(q-1)}=\frac{2500}{2500-18400'22\times 0'06}=\frac{2500}{1395'9868}$$

$$t.\ \log.\ 1'06=\log.\ 2500-\log.\ 1395'9868$$

y finalmente $$t=\frac{\log.\ 2500-\log.\ 1395'9868}{\log.\ 1'06}$$

log. 2500........3'397 9400
—log. 1395'987....3'144 8813

0'253 0587   log. 1'06....0'0253 0587

$$t=\frac{0'2530587}{0'02530587}=10 \text{ años.}$$

351.—Regla de dos falsas suposiciones.—Muchas veces para resolver un problema de primer grado que no contiene más que una sola incógnita, en lugar de plantear el problema y resolver la ecuacion, segun lo hemos explicado (263 y 264), se emplea el método llamado de *falsa posicion*, y el cual consiste en suponer un valor arbitrario para la incógnita, en ejecutar con este *supuesto* las operaciones indicadas por el enunciado del problema, y determinar el *error* entre el resultado obtenido y el buscado; en dar en seguida otro valor tambien arbitrario á la incógnita, y determinar el error correspondiente, y deducir por último, de los dos valores *supuestos* y de sus *errores* respectivos, el verdadero valor de la incógnita.

La fórmula más general que podemos dar á una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, despues de haber quitado los denominadores, de haber trasladado algunas cantidades de un miembro á otro para que todas sean positivas, y de sacar la incógnita como factor comun, es:

$$ax+b=cx+d \text{........(1)}$$

Esta ecuacion, conforme á lo demostrado en el número 267, no admite más que una resolucion, no pudiendo verificarse sino en el caso de dar á x el valor correspondiente para satisfacer la ecuacion que se ha derivado de las condiciones del problema. Si suponemos que el valor de la incógnita sea s, cantidad mayor ó menor que x, no podremos tener $as+b=cs+d$, sino que forzosamente resultará un error que llamaremos e, y se tendrá:

$$as+b=cs+d+e \text{........(2)}$$

restando de esta ecuacion la (1), se tiene:

$$a(s-x)=c(s-x)+e.$$

despejando á e $$(a-c)\ (s-x)=e \text{........(3)}$$

Si supusiéramos que el valor de x fuera s' en la ecuacion primitiva (1), tendriamos otro error e' y la ecuacion:

$$as'+b=cs'+d+e' \text{........(4)}$$

restando de esta ecuacion la (1), se tiene:

$$a(s'-x)=c(s'-x)+e'$$

despejando á e' $$(a-c)(s'-x)=e'\ldots\ldots..(5)$$

Dividiendo la (3) por la (5) queda $$\frac{s-x}{s'-x}=\frac{e}{e'}$$

quitando los denominadores $$se'-xe'=s'e-xe$$
trasladando $$se'-s'e=xe'-xe$$

Despejando á x $$x=\frac{se'-s'e}{e'-e}\ldots\ldots..(6)$$

cuya fórmula nos enseña que para obtener el valor de la incógnita en una ecuacion de primer grado por el método de dos falsas suposiciones, debe practicarse la siguiente

REGLA.—*Despues de haber dado sucesivamente dos valores á la incógnita y calculado los errores respectivos, multiplíquese el primer supuesto por el error del otro, y recíprocamente el segundo supuesto por el error del primero, y atendiendo á los signos de los errores, divídase la diferencia de estos productos por la diferencia de los errores: el cociente será la incógnita buscada.*

352.—PROBLEMAS RESUELTOS POR LA REGLA DE DOS FALSAS SUPOSICIONES.—I.—*Un padre tiene 40 años y su hijo 10, se pregunta ¿dentro de cuántos años la edad del padre será triple de la de su hijo?*

Supuestos.	Errores.
8	+6
4	—2

$$(8\times-2)-(4\times6)$$
$$-2-6$$
$$\frac{-16-24}{-8}=5$$

Supongamos primero que el número de años buscado sea 8. Entónces la edad del padre será 48 años, y la del hijo 18; pero como el triple de 18 no es 48 sino 54, el error será de 6 años. En seguida supondremos que el número buscado sea 4. La edad del padre será 44 años, la del hijo 14, y como á su triple le faltan 2 para dar 44, el segundo error será —2.

Los productos recíprocos de los supuestos por los errores, tomados con sus signos, dan por diferencia —40; que dividida por —8, diferencia de los errores, da 5. En efecto dentro de 5 años, la edad del padre será 45 triple de 15, edad de su hijo.

II.—*Una persona ofrecia dar ocho pesos cada vez que se le duplicase el dinero que tenía: habiéndose efectuado así tres veces consecutivas, no le quedó nada. Se pregunta ¿cuántos pesos tenía esa persona?*

Supuestos.	Errores
10	+24
9	+16

$$10\times16-9\times24$$
$$16-24$$
$$\frac{160-216}{-8}=7$$

Supongamos primero que la persona tenía 10 pesos. Duplicada esta suma, y deduciendo 8 la primera vez, le quedarían 12 pesos. Duplicada esta cantidad y rebajando 8, le quedarian la segunda vez 16 pesos, los que duplicados y rebajando 8 por última vez, quedan, en lugar de cero 24, que es el error. Si en seguida suponemos que la persona tenia 9 pesos, veremos, que duplicando tres veces consecutivas esa suma, y rebajando en cada una de ellas 8, en vez de cero le quedarian 16 pesos, que es el error.

Dividiendo —56 diferencia de los productos recíprocos de los supuestos por los errores tomados con sus signos, por —8, diferencia de los errores, se obtiene por cociente 7, cuyo número satisface las condiciones del problema.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES y COMBINACIONES.

*(353)—DEFINICIONES.—Hay en el cálculo algunas cuestiones en las que es necesario prever las diferentes maneras con que pueden disponerse las cantidades literales ó los números distintos que forman un término, bien sea considerando todas las cantidades ó solamente algunas de ellas.

Si el término está compuesto de una sola cantidad, es claro que no podrá haber más que una sola disposicion.

Con dos cantidades a, b pueden formarse:

dos *ordenaciones:*	a, b
dos *permutaciones:*	ab, ba
y una *combinacion:*	ab.

Con tres cantidades a, b, c podrán formarse:

tres *ordenaciones* de una en una:	a, b, c
seis *id.* de dos en dos:	ab, ba, ac, ca, bc, cb.
seis *permutaciones*:	abc, bac, acb, cab, bca, cba.
tres *combinaciones* de dos en dos:	ab, ac, bc.
y una *id* de tres:	abc.

Así pues, *se entiende por ordenaciones los resultados que se obtienen*