$$a(s'-x)=c(s'-x)+e'$$

despejando á e' $\quad (a-c)\,(s'-x)=e' \ldots\ldots.(5)$

Dividiendo la (3) por la (5) queda $\quad \dfrac{s-x}{s'-x}=\dfrac{e}{e'}$

quitando los denominadores $\quad se'-xe'=s'e-xe$

trasladando $\quad se'-s'e=xe'-xe$

Despejando á x $\quad x=\dfrac{se'-s'e}{e'-e} \ldots\ldots.(6)$

cuya fórmula nos enseña que para obtener el valor de la incógnita en una ecuacion de primer grado por el método de dos falsas suposiciones, debe practicarse la siguiente

REGLA.—*Despues de haber dado sucesivamente dos valores á la incógnita y calculado los errores respectivos, multiplíquese el primer supuesto por el error del otro, y recíprocamente el segundo supuesto por el error del primero, y atendiendo á los signos de los errores, divídase la diferencia de estos productos por la diferencia de los errores: el cociente será la incógnita buscada.*

352.—PROBLEMAS RESUELTOS POR LA REGLA DE DOS FALSAS SUPOSICIONES.—I.—*Un padre tiene* 40 *años y su hijo* 10, *se pregunta ¿dentro de cuántos años la edad del padre será triple de la de su hijo?*

Supuestos.	Errores.
8	+6
4	—2

$$\frac{(8\times-2)-(4\times6)}{}\qquad \frac{-2-6}{}\qquad \frac{-16-24}{-8}=5$$

Supongamos primero que el número de años buscado sea 8. Entónces la edad del padre será 48 años, y la del hijo 18; pero como el triple de 18 no es 48 sino 54, el error será de 6 años. En seguida supondremos que el número buscado sea 4. La edad del padre será 44 años, la del hijo 14, y como á su triple le faltan 2 para dar 44, el segundo error será —2.

Los productos recíprocos de los supuestos por los errores, tomados con sus signos, dan por diferencia —40; que dividida por —8, diferencia de los errores, da 5. En efecto dentro de 5 años, la edad del padre será 45 triple de 15, edad de su hijo.

II.—*Una persona ofrecia dar ocho pesos cada vez que se le duplicase el dinero que tenía: habiéndose efectuado así tres veces consecutivas, no le quedó nada. Se pregunta ¿cuántos pesos tenía esa persona?*

Supuestos.	Errores
10	+24
9	+16

$$\frac{10\times16\;-\;9\times24}{}\qquad \frac{16-24}{}\qquad \frac{160-216}{-8}=7$$

Supongamos primero que la persona tenía 10 pesos. Duplicada esta suma, y deduciendo 8 la primera vez, le quedarían 12 pesos. Duplicada esta cantidad y rebajando 8, le quedarian la segunda vez 16 pesos, los que duplicados y rebajando 8 por última vez, quedan, en lugar de cero 24, que es el error. Si en seguida suponemos que la persona tenia 9 pesos, veremos, que duplicando tres veces consecutivas esa suma, y rebajando en cada una de ellas 8, en vez de cero le quedarian 16 pesos, que es el error.

Dividiendo —56 diferencia de los productos recíprocos de los supuestos por los errores tomados con sus signos, por —8, diferencia de los errores, se obtiene por cociente 7, cuyo número satisface las condiciones del problema.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES y COMBINACIONES.

*(353)—DEFINICIONES.—Hay en el cálculo algunas cuestiones en las que es necesario prever las diferentes maneras con que pueden disponerse las cantidades literales ó los números distintos que forman un término, bien sea considerando todas las cantidades ó solamente algunas de ellas.

Si el término está compuesto de una sola cantidad, es claro que no podrá haber más que una sola disposicion.

Con dos cantidades a, b pueden formarse:

dos *ordenaciones:*	a, b
dos *permutaciones:*	ab, ba
y una *combinacion:*	ab.

Con tres cantidades a, b, c podrán formarse:

tres *ordenaciones* de una en una:	a, b, c
seis *id.* de dos en dos:	ab, ba, ac, ca, bc, cb.
seis *permutaciones*:	abc, bac, acb, cab, bca, cba.
tres *combinaciones* de dos en dos:	ab, ac, bc.
y una *id* de tres:	abc.

Así pues, *se entiende por ordenaciones los resultados que se obtienen* *disponiendo* m *cantidades en todos los órdenes posibles tomándolas de una en una, de dos en dos, de tres en tres.... de* m—1 *en* m—1, *con la condicion de no repetir ninguna cantidad en cada grupo, y de que el número de cantidades de que se forme ha de ser menor que el número* m *total de cantidades.*

Se llaman permutaciones los resultados que se obtienen con m *cantidades disponiendo unas á continuacion de las otras en todos los órdenes posibles, de manera que no se omita ni se repita ninguna cantidad.*

Se llaman combinaciones las ordenaciones diferentes entre sí que pueden hacerse con m *cantidades; debiendo ser cada grupo distinto de los otros, no por el órden de colocacion, sino por ser diversa cuando ménos una de las cantidades que lo forman.*

Así pues, es una condicion comun á estas tres clases de disposiciones que no se repita una misma cantidad en cada grupo. En las ordenaciones no entran todas las cantidades que se consideran, y son diferentes entre sí por el órden de la colocacion. Las permutaciones son ordenaciones en las que entran todas las cantidades; y las combinaciones son ordenaciones diferentes unas de otras, no por el órden, sino por las cantidades que forman cada grupo; además, las combinaciones difieren de las ordenaciones en que cuando ménos se forman los grupos con dos cantidades, y en que pueden formarse con el número total de ellas. A las combinaciones se les suele llamar productos diferentes porque en efecto lo son cuando las cantidades están representadas por letras.

*(354)—Ordenaciones.—*Dado un número* m *de cantidades* a, b, c, d.... *vamos á determinar el número total de ordenaciones que pueden hacerse formando grupos de* n *en* n *cantidades; debiendo ser* n *menor que* m.

Conocido el número de ordenaciones que pueden hacerse con m letras ó cantidades, formando grupos de $(n—1)$ en $(n—1)$ letras; si nos imaginamos estas ordenaciones escritas en una línea horizontal, y si debajo de la primera ordenacion escribimos al fin de las cantidades que la forman cada una de las letras $m—(n—1)$ que no entran en dicha ordenacion, resultará una columna vertical compuesta de tantos grupos como sean las letras $m—(n—1)$ no consideradas en la primera ordenacion. Con la segunda ordenacion podremos tambien formar $m—(n—1)$ ordenaciones diferentes por la última letra, poniendo al fin de las cantidades que la forman cada una de las que no forman parte de ella; y haciendo lo mismo con la tercera, cuarta, etc. ordenaciones de $(n—1)$ en $(n—1)$ cantidades, resultarán tantas ordenaciones de n en n letras como indique el producto del número de ordenaciones formadas de

$(n—1)$ en $(n—1)$, multiplicadas por el número $m—(n—1)$ de cantidades no consideradas en las ordenaciones de $(n—1)$ en $(n—1)$ cantidades.

Por ejemplo, si considerando cuatro cantidades a, b, c, d debajo de cada una de las cuatro ordenaciones que pueden formarse de una en una letra,

$$O_1^m = a, \quad b, \quad c, \quad d,$$

agregamos cada una de las letras no consideradas, tendremos:

$$O_2^m = \begin{cases} ab, & ba, \quad ca, \quad da. \\ ac, & bc, \quad cb, \quad db. \\ ad, & bd, \quad cd, \quad dc. \end{cases}$$

siendo cuatro las ordenaciones que pueden formarse de una en una letra, y siendo tres las que pueden agregarse á cada una de las cuatro primeras ordenaciones, resultan 4×3 ordenaciones de dos en dos letras.

En general, si suponemos conocido el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de $(n—1)$ en $(n—1)$, y representamos este número de ordenacion por O_{n-1}^m determinaremos el número de ordenaciones que podrán hacerse con las mismas m cantidades formando grupos de n en n multiplicando el número O_{n-1}^m por el número de letras no consideradas en las ordenaciones de $(n—1)$ en $(n—1)$, y cuyas letras son: $m—(n—1)=m—n+1$. Cuyo resultado quedará cifrado en la fórmula

$$O_n^m = O_{n-1}^m (m-n+1) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Si por ejemplo, queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades combinándolas de dos en dos, aplicando la fórmula (1) tendremos que siendo $n=2$, $n—1=1$, y como el número de ordenaciones que puede hacerse con m letras tomándolas de una en una es m, se tiene $O_{n-1}^m = m$. Por otra parte

$$m-n+1=m-2+1=m-1.$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula (1) resulta:

$$O_2^m = m\,(m-1)$$

Si queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de tres en tres, tendremos que $O_{n-1}^m = m\,(m-1)$, segun acabamos de verlo, y el factor $m-n+1=m-3+1=m-2$; luego sustituyendo en la fórmula (1) se tiene

$$O_3^m = m\,(m-1)\,(m-2)$$

Si queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de cuatro en cuatro, tendremos: $n=4$, $O^m_{n-1}=m(m-1)(m-2)$, y $m-n+1=m-4+1=m-3$, luego sustituyendo en la fórmula (1) resulta:

$$O^m_4=m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)$$

y en general representando por O^m_n el número de ordenaciones que con m cantidades pueden hacerse tomándolas en grupos de n en n tendremos:

$$O^m_n=m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ [m-(n-1)]\ldots\ (2)$$

Es decir, que el número de ordenaciones se compone del producto de los números consecutivos decrecientes m, (m — 1), (m — 2).... *hasta* m—(n—1) *inclusive.*

*(355)—PERMUTACIONES.—Hemos visto que *se llaman permutaciones á los resultados que se obtienen con* m *cantidades disponiendo unas á continuacion de las otras en todos los órdenes posibles, de manera que en cada grupo no se omita ni se repita ninguna cantidad.* Por consiguiente las permutaciones son ordenaciones en las que entran todas las cantidades que se consideran.

Si representamos por P_m el número de permutaciones que pueden hacerse con m cantidades, es claro que cuando se hace $n=m$, $O^m_n=P_m$; luego para determinar el número de permutaciones que pueden hacerse con m cantidades, bastará hacer en la fórmula (2) $n=m$ y se tiene:

$$P_m=m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ 2\times1\ \ldots\ (3)$$

invirtiendo el órden de los factores y observando que siendo 1 el último factor, el penúltimo es 2, el antepenúltimo es 3, etc., se obtiene

$$P_m=1\times2\times3\times4\ldots\ (m-2)\ (m-1)\ m\ldots\ (4)$$

Es decir, que el número de permutaciones se determina formando el producto de la série de los números enteros comprendidos desde 1 hasta m inclusive.

*(356)—COMBINACIONES.—Hemos dicho que *se entiende por combinaciones las ordenaciones que con* m *cantidades pueden hacerse diferentes entre sí, no por el órden de colocacion, sino por estar compuesto cada grupo cuando ménos de una cantidad diversa.*

Si conociéramos el número de combinaciones que pueden formarse con m cantidades tomándolas de n en n y las escribiéramos en una línea horizontal, y si debajo de cada grupo formamos todas las permutaciones á que pueda dar lugar, resultarán las ordenaciones que con m

cantidades pueden formarse de n en n. Por ejemplo, considerando cuatro letras, las combinaciones de tres en tres son:

Combinaciones: $C^4_3=abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$

Haciendo las permutaciones de cada grupo....
$$\begin{cases} bac, & bad, & cad, & cbd, \\ acb, & adb, & adc, & bdc, \\ cab, & dab, & dac, & dbc, \\ bca, & bda, & cda, & cdb, \\ cba, & dba, & dca, & dcb, \end{cases}$$

resulta, como se ve, el número total de ordenaciones que con cuatro cantidades pueden formarse, tomándolas de tres en tres. Luego llamando o las ordenaciones, c las combinaciones y p las permutaciones, tendremos: $o=c\times p$

ó en general $$O^m_n=C^m_n\times P_n$$

despejando á C^m_n y sustituyendo por O^m_n y por P_n sus valores (2) y (4) se tiene:

$$C^m_n=\frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ [m-(n-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ (n-1)\ n}\ldots\ (5)$$

Tal es la fórmula que sirve para determinar el número de combinaciones que pueden formarse con m cantidades en grupos de n en n cantidades.

*(357)—DEDUCCION DE LA REGLA PARA FORMAR LOS COEFICIENTES DE LOS TÉRMINOS EN LA FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON.—Si despues de haber obtenido el producto de m factores binomios $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)\ldots$ hacemos $a=b=c=d\ldots$ obtendremos el valor de $(x+a)^m$, por lo que para tener el desarrollo del binomio elevado á una potencia, bastará formar el producto indicado, y hacer en seguida los segundos términos de los binomios iguales entre sí.

Ejecutando sucesivamente la multiplicacion de $x+a$ por $x+b$, multiplicando en seguida el resultado por $x+c$, y despues el producto por $x+d$, y sacando x y sus potencias como factor comun en cada resultado, se tiene:

$$(x+a)\ (x+b)=x^2+x\ (a+b)+ab\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)=x^3+x^2\ (a+b+c)+x\ (ab+ac+bc)+abc\ldots\ (2)$$
$$\begin{aligned}(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)=&\,x^4+x^3\ (a+b+c+d)\\ &+x^2\ (ab+ac+bc+ad+bd+cd)\\ &+x\ (abc+abd+acd+bcd)+abcd\ldots\ (3)\end{aligned}$$

Este procedimiento nos va á permitir descubrir la ley de la formacion de los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia de un binomio. Para facilitar nuestras explicaciones nos fijaremos en el último resultado. Haciendo en la ecuacion (3) $a=b=c=d$, el primer miembro se convierte en $(x+a)^4$, y respecto al segundo se observa que:

El primer término es x^4 y tiene por coeficiente la unidad.

En el segundo término, x^3 está multiplicado por $a+b+c+d$, cuyo factor conforme á nuestro supuesto, se convertirá en a, repetido tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de una en una. En el caso general de buscar el desarrollo de $(x+a)^m$, el primer término sería x^m, y en el segundo el factor de x^{m-1} sería a, multiplicado por el número de combinaciones que con m letras pueden formarse, tomándolas de una en una, y como $C_1^m=m$, este sería el coeficiente del segundo término. En el tercer término de nuestro resultado (3), cuando los segundos términos de los factores binomios son iguales, x^2 resulta multiplicado por a^2 repetida tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de dos en dos, y como $C_2^4=\frac{4.3}{1.2}=6$, este número deberá ser el coeficiente de este término. En el caso general de $(x+a)^m$, en el tercer término del desarrollo el factor de x^{m-2} sería a^2, multiplicada por el número que expresa las combinaciones que con m letras pueden hacerse, tomándolas de dos en dos, y como $C_2^m=\frac{m(m-1)}{1.2}$ esta expresion será el coeficiente del tercer término.

En el cuarto término de nuestro resultado (3), y bajo el supuesto de ser $a=b=c=d$, el factor de x será a^3 repetida tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de tres en tres, y como $C_3^4=\frac{4\times3\times2}{1.2.3}=4$, este número será el coeficiente del cuarto término. En el caso general de $(x+a)^m$, en el cuarto término del desarrollo, el factor de x^{m-3} será a^3 multiplicada por el número de combinaciones que con m letras pueden hacerse tomándolas de tres en tres, y como $C_3^m=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, esta expresion será el coeficiente de dicho cuarto término.

En nuestro resultado (3), y bajo el supuesto de que $a=b=c=d$, el último término se convierte en a^4; y en el caso general de $(x+a)^m$ el último término será a^m.

De lo que antecede se infiere que el desarrollo de la potencia de un binomio será:

$$(x+a)^m=x^m+m.x^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}a^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}a^4\ldots+m.x.a^{m-1}+a^m$$

que es la fórmula deducida por Newton y en la cual los coeficientes de cada término expresan las combinaciones que con m letras pueden hacerse tomándolas sucesivamente de una en una, de dos en dos, de tres en tres, etc.; obteniéndose los mismos valores que los dados por la regla prescrita en el número 305.

FIN.