mosférica de la columna aérea en que la termométrica de la base sea igual á cero, la cual á su vez servirá para todos los demás casos en que ocurra hacer la inquisición de datos semejantes. De consiguiente, llamando H° y T° respectivamente á la altura y temperatura de esa columna, cuya base tenga un calor como cero del Centígrado, plantearemos la siguiente proporción y sentaremos la ecuación respectiva, con los demás elementos que dedujimos en el ejemplo anterior.

$$H : H^\circ = \sqrt{T} : \sqrt{T^\circ}$$

$$T^\circ = T\left(\frac{H^\circ}{H}\right)^2 = 71.0451\left(\frac{15978.8}{17797}\right)^2 = 57.27 \text{ grados atmosféricos.}$$

$$a = \frac{H}{\sqrt{T}} = \frac{15978.8}{\sqrt{57.27}} = 2113 \text{ metros.}$$

$$b = H\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{T}}\right) = 15978.8\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{57.27}}\right) = 140 \text{ metros.}$$

$$t' = t - T' = 0 - 57.27 = -57^\circ 27.$$

$$K = \frac{H}{a} = \frac{15978.8}{2113} = 7.56.$$

$$b' = (H-h)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{T-T'}}\right) = 7989.4\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{14.32}}\right) = 284 \text{ metros.}$$

$$t' = t - T' = 0 - 42.95 = -42^\circ 95.$$

CAPÍTULO IV.

OTRAS FORMULAS: AVERIGUACION DE LAS ALTURAS CON SOLO LAS INDICACIONES DEL TERMOMETRO Y DEL BAROMETRO: ERROR DE LA FORMULA DE MR. LAPLACE PARA LA CORRECCION DE LAS ALTURAS POR LA TEMPERATURA DEL AIRE.

125.—Conocida está ya la progresión térmica en todos sus elementos: se sabe cuál es su primer término y su diferencia; se puede determinar la suma de los términos, ó el número de grados correspondiente á la columna atmosférica, y el espacio en que se desarrolla cada grado, desde el primero de arriba hasta el último de abajo; y por fin, se puede calcular la temperatura termométrica de las alturas á que no ha podido llegar el hombre, con sólo seguir el desarrollo de la progresión hácia su origen. Pero no está por demás tomar en consideración otras relaciones del calor atmosférico que hasta ahora no se han tenido en cuenta, sentando las fórmulas que de ellas se deducen, además de las que constan en el capítulo precedente, lo que servirá para conocer mejor y en todos sus detalles esta importante materia, que se había conservado completamente fuera de las investigaciones de los físicos.

126.—En el párrafo 124 dejé planteada la siguiente proporción:

$$H : H^\circ = \sqrt{T} : \sqrt{T^\circ},$$

en la cual H° es igual á 15978.8 metros, altura de la atmósfera correspondiente á la temperatura de cero del Centígrado en la base, y T° igual á 57.27 grados, temperatura atmosférica desarrollada bajo las mismas circunstancias. Y como estos datos han de servir de punto de partida para inquirir la altura y temperatura de otras columnas, conviene deducir las ecuaciones que de esa proporción se desprenden, y son las siguientes:

$$H = H^\circ \sqrt{\frac{T}{T^\circ}} = 15978.8 \sqrt{\frac{T}{57.27}} = 2113 \sqrt{T} \qquad (1)$$

$$T = T^\circ \left(\frac{H}{H^\circ} \right)^2 = 57.27 \left(\frac{H}{15978.8} \right)^2 = \frac{H^2}{4458216}. \qquad (2)$$

127.—Como el aire se dilata ó comprime un 0.003665 de su volumen por cada grado de calor en el Centígrado, al pié de la columna atmosférica, esta circunstancia da una nueva medida para calcular su altura: por este principio, llamando D á los 272.85 grados de calor absoluto que hay hasta el cero del termómetro expresado, y conservando á t la significación de calor en la base, tendremos:

$$H = H^\circ\,(1 \pm 0.003665\,t) = 15978.8\,(1 \pm 0.003665\,t) = (58.5623\,(D \pm t) \qquad (1)$$

$$t = \frac{H}{58.5623} - D \qquad (2)$$

128.—Bajo el mismo principio, de que el aire se comprime ó dilata á proporción de la temperatura termométrica t del suelo, siendo uno mismo el peso de la atmósfera, se establece la siguiente proporción con las ecuaciones respectivas:

$$H^\circ : H = D : D \pm t$$

$$H = H^\circ \frac{D \pm t}{D} = 15978.8 \left(1 \pm \frac{t}{D} \right) \qquad (1)$$

$$t = D \frac{H}{H^\circ} - D = D \left(\frac{H}{15978.8} - 1 \right). \qquad (2)$$

129.—Pero si el aire ocupa más ó menos espacio á proporción de la temperatura termométrica del suelo, como acaba de decirse y tantas veces se ha repetido, sin embargo, la temperatura en su desarrollo por la columna atmosférica crece como el cuadrado de los espacios; luego también crece como el cuadrado de la temperatura termométrica del suelo, y de aquí la proporción y ecuaciones siguientes:

$$D^2 : (D \pm t)^2 = T^\circ : T$$

$$T = T^\circ \left(1 \pm \frac{t}{D} \right)^2 = 57.27 \left(1 \pm \frac{t}{D} \right)^2 \qquad (1)$$

$$t = D \left(\sqrt{\frac{T}{T^\circ}} - 1 \right) = D \left(\frac{\sqrt{T}}{7.5676} - 1 \right) \qquad (2)$$

130.—Tanto el calor atmosférico, como el peso del aire, según tengo demostrado, crecen como el cuadrado de los espacios, luego ambos entre sí se hallan en razón directa. De aquí es que, si llamamos P el peso del aire en el barómetro al nivel del mar, y p al que tenga en cualquiera otro punto superior, se obtendrá la proporción y ecuaciones siguientes:

$$P-p : P = T-T' : T;$$

$$T=\frac{T'}{1-\frac{p}{P}} \quad (1); \qquad T'=T\left(1-\frac{p}{P}\right) \quad (2);$$

$$p=P\left(1-\frac{T'}{T}\right) \quad (3).$$

131.—La temperatura atmosférica T crece de arriba para abajo como $\frac{p}{P}$; en consecuencia, lo hará de abajo para arriba como $1-\frac{p}{P}$, expresión algebraica que viene á ser el equivalente de T', que es igual á $t-t'$, según se dijo en el párrafo 121. Así es que, haciendo la debida sustitución, sacaremos:

$$T\left(1-\frac{p}{P}\right)=t-t';$$

$$T=\frac{t-t'}{1-\frac{p}{P}} \quad (1); \qquad t=T\left(1-\frac{p}{P}\right)+t' \quad (2);$$

$$t'=t-T\left(1-\frac{p}{P}\right) \quad (3).$$

132.—Si suponemos la temperatura de 1° absoluto, ó lo que es lo mismo, de $-271°85$ termométricos en la base de la columna atmosférica, suposición que no cabe

actualmente en los hechos posibles, pero sirve para los cálculos, hallaremos que la altura del aire y la temperatura atmosférica son, en el origen de su desarrollo, lo que indican como resultado las ecuaciones número (1) de los párrafos 128 y 129, en los términos siguientes:

$$H=15.978.8\left(1-\frac{271.85}{272.85}\right)=58.5623 \text{ metros.}$$

$$T=57.27\left(1-\frac{271.85}{272.85}\right)^2=0.00077.$$

Ahora, tomando estos resultados como principio del desarrollo de la altura y temperatura atmosféricas, y recordando que la primera crece como la raíz cuadrada de la segunda, y ésta como el cuadrado de la temperatura de la base de la columna, sentaremos también las siguientes ecuaciones:

$$H=58.5623\sqrt{\frac{T}{0.00077}} \quad (1); \qquad T=0.00077\,(D+t)^2 \quad (2);$$

de donde sacaremos estas otras:

$$T=0.00077\left(\frac{H}{58.56}\right)^2 \quad (3); \qquad t=\frac{\sqrt{T}}{0.027749}-D \quad (4).$$

133.—He dicho que las alturas de la atmósfera son proporcionales á la temperatura del suelo al nivel del mar; de donde se infiere que partes alícuotas de aquellas guardarán también con ésta la misma proporción: en consecuencia, podremos decir:

$$H^\circ\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right) : H\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right)=D : D\pm t.$$

Y como $H\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right)$ es la altura que antes he denominado h, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$h=H^\circ\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right)\left(\frac{D\pm t}{D}\right)=15978.8\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right)\left(1\pm\frac{t}{D}\right),$$

$$t=\frac{D\,h}{H^\circ\left(1-\sqrt{\frac{p}{P}}\right)}-D=D\left(\frac{h}{15978.8\left(1-\frac{\sqrt{p}}{27.568}\right)}-1\right).$$

134.—Así como las alturas totales de la atmósfera son proporcionales á las raíces cuadradas de sus temperaturas atmosféricas, según he demostrado ántes, del mismo modo cualesquiera distancias verticales, tomadas en cualquiera parte de la columna aérea, deben ser proporcionales á las raíces cuadradas de las temperaturas ó número de grados de calor que se desarrollan dentro de esas distancias ó espacios. Con el objeto de plantear la proporción respectiva, voy á determinar algebraicamente sus términos, y para esto llamaré, como ántes, P al peso total del aire, según la indicación barométrica, que es de 760 milímetros, P' al que da el barómetro en el punto de observación inferior, P'' al de la estación superior, t' á la temperatura que señala el termómetro donde el barómetro indica P', y t'' donde indica P'', siendo H° y T° los que ya he dicho en otro lugar (párrafo 124), y Z la distancia vertical ó diferencia de nivel que se busca.

135.—En la columna H° y en la estación de más abajo, la temperatura, que sigue la progresión de los pesos del aire, debe ser $T^\circ\frac{P'}{P}$, y en la estación de más arriba $T^\circ\frac{P''}{P}$; luego entre una y otra estación se comprende un número de grados igual á $T^\circ\frac{P'-P''}{P}$. En la misma columna H° que, lo mismo que todas las alturas, crece de arriba para abajo como la raíz cuadrada de los pesos atmosféricos, la distancia de la estación inferior á su origen arriba es $H^\circ\sqrt{\frac{P'}{P}}$, y la de la superior es $H^\circ\sqrt{\frac{P''}{P}}$; por lo cual la distancia entre ambas será $H^\circ\left(\sqrt{\frac{P'}{P}}-\sqrt{\frac{P''}{P}}\right)=$ $H^\circ\frac{\sqrt{P'}-\sqrt{P''}}{\sqrt{P}}$. En cualquiera otra columna hay á los extremos de la distancia Z los grados t' y t'', que se sacan por la observación, siendo $t'-t''$ el número que media entre ellos. Pues bien, siendo que las alturas ó sus partes alícuotas son como las raíces cuadradas de las temperaturas ó del número de grados que en ellas se comprenden, formaremos la siguiente proporción:

$$\sqrt{T^\circ\frac{P'-P''}{P}} : \sqrt{t'-t''}=H^\circ\frac{\sqrt{P'}-\sqrt{P''}}{\sqrt{P}} : Z.$$

Formando la ecuación respectiva y despejando á Z, sacaremos

$$Z=\sqrt{t'-t''}\,\frac{H^\circ\left(\sqrt{P'}-\sqrt{P''}\right)}{\sqrt{T^\circ\left(P'-P''\right)}}:$$

y puesto que H° y T° son cantidades conocidas, y que a es igual á 2113, reduciendo hallaremos

$$Z = a\sqrt{t' - t''}\,\frac{\sqrt{P'} - \sqrt{P''}}{\sqrt{P'} - P''} \quad (1).$$

136.—Con esta fórmula y con sólo las indicaciones simultáneas del termómetro y del barómetro en dos puntos de observación situados verticalmente, se puede medir la distancia que entre ellos existe, sin necesidad de tomar en cuenta otros datos, pues en ella se han considerado ya los que pudieran modificar el volumen del aire, según demostré en el párrafo 104. Y como dicha fórmula toma los datos relativos á la temperatura á distancias elevadas, fuera del alcance de las irregularidades producidas en la progresión atmosférica por el calor reversivo de la tierra, se halla menos expuesta á errores que la que los tomase en la superficie de ésta, y mucho menos también, aunque por otro motivo, que la de Mr. Laplace, á que me referí en los párrafos 57 y siguientes, y de la cual voy á ocuparme de nuevo, para discutir la corrección que le hace, á fin de acomodarla á los cambios que en la altura produce el calor, así como la fuerza de gravedad según la latitud. La fórmula indicada es

$$Z = 18336 \log. \frac{H}{h} (1 + 0.002837 \cos. 2\,l.) \left(1 + \frac{T + t}{545.70}\right),$$

en la cual Z designa la distancia vertical entre dos lugares cuya diferencia de nivel se busca; H representa la altura del barómetro en la estación inferior, y h la de la superior; T y t son las temperaturas del aire correspondientes á cada punto de observación, y l es la latitud.

137.—Ya antes he dicho (párrafo 57 y siguientes), cuán errónea es la parte principal de esa fórmula

$$Z = 18336 \log. \frac{H}{h};$$

y en otro lugar (párrafo 29) he indicado también, que las diferencias de la gravedad según la latitud se resuelven en cambio de temperatura, que es el dato concreto que sirve de base á mi fórmula. Por esto deberé ahora ocuparme solamente de examinar si la corrección que se pretende hacer con aquella otra parte $\left(1 + \frac{T + t}{545.7}\right)$ se apoya en buenos principios físicos, lo que me anticipo á expresar en sentido negativo. Basta, para calificarla de inexacta por esta otra causa, con advertir que esa corrección supone el crecimiento de la altura proporcional á la temperatura, y que es aditiva ó sustractiva, según que la temperatura suba ó baje del cero termométrico. Pero ya he demostrado científicamente, demostración que resulta de entera conformidad con repetidas observaciones hechas en globos aerostáticos, que los espacios correspondientes á cada grado de calor, lejos de aumentar uniformemente, crecen más y más, á medida que se alejan de la superficie de la tierra, y este crecimiento acelerado de los espacios no puede ir de acuerdo con la temperatura, que cabalmente disminuye más en las alturas. Pero aun suponiendo dicha corrección bien establecida con total arreglo á las leyes físicas, ella sería innecesaria en mi fórmula, una vez que ésta se ha calculado de entera conformidad con dichas leyes.