distancias se tendrá determinada la posicion del punto M; pues al mismo tiempo que dista de la recta AX la magnitud MP, se sabe que dista de la otra recta AZ la magnitud MQ, y no hay otro punto que pueda cumplir con estas condiciones sino el M.

Igualmente, el punto M' quedará determinado por las rectas M'P', M'Q'; el M'' por las M''P'', M''Q''; y el M''' por las M'''P''', M'''Q'''.

22. Esto supuesto, las líneas MQ, M'Q', etc., ó sus iguales AP, AP', etc., se llaman *abscisas;* y la línea Xx en que se cuentan, se llama *eje de las abscisas.* Las líneas MP, M'P', etc., ó sus iguales AQ, AQ', etc., se llaman *ordenadas;* y la línea Zz en que se cuentan, se llama *eje de las ordenadas.*

Las abscisas y ordenadas juntas se llaman *coordenadas;* y entonces Xx, Zz, se llaman *ejes de las coordenadas;* el punto A desde donde se cuentan las coordenadas, se llama el *punto de orígen.*

23. Representemos en general las abscisas por x, y por z las ordenadas; y como el punto puede ser el M, ó M', M'', M''', es necesario dar á las x, z, el signo conveniente para saber en cual de los ángulos ZAX, XAz, zAx, xAZ, se halla el punto que se quiere fijar. Por lo cual todas las abscisas que se cuenten desde A hácia la derecha, las llamarémos *positivas,* y las que vayan hácia la izquierda se llamarán *negativas;* y todas las ordenadas que se cuenten desde A hácia arriba serán *positivas,* y las que desde A hácia abajo serán *negativas.* Así en el ángulo ZAX serán las coordenadas positivas; en el ángulo XAz serán las abscisas positivas y las ordenadas negativas; en el zAx, todo negativo; y en el xAZ serán abscisas negativas y ordenadas positivas. Luego si habiendo medido las longitudes AP, MP, se encuentra AP$=a$, PM$=b$, para fijar el punto M, se tendrán las ecuaciones $x=a$, $z=b$.

Las ecuaciones del punto M' serán $x=a$, $z=-b$; las del M'' serán $x=-a$, $z=-b$; y las del M''' serán $x=-a$, $z=b$.

24. Si permaneciendo una misma la abscisa AP, disminuye la ordenada MP, el punto M se aproximará al eje AX; si PM ó b llega á ser cero, el punto M caerá en P sobre el mismo eje de las abscisas, y *sus ecuaciones serán* $x=a$, $z=0$.

Si permaneciendo una misma la ordenada PM, la abscisa AP disminuye, el punto M se aproximará al eje AZ, con el cual coincidirá si AP ó a llega á ser cero, lo que da $x=0$, $z=b$, que son *las ecuaciones de un punto* Q *en el eje de las ordenadas.*

En fin, si la abscisa AP y la ordenada PM llegan á ser cero á un mismo tiempo, el punto M, que debe hallarse en ambos ejes, será su punto de interseccion, y por lo mismo caerá sobre el punto A, que es el *orígen de las coordenadas,* cuyas ecuaciones serán $x=0$, $z=0$.

Donde se ve, que suponiendo á las variables x y z todos los valores positivos y negativos posibles, desde cero hasta el infinito, se puede fijar la posicion de todos los puntos del plano en que se hallan los ejes.

25. Todo lo dicho hasta aquí equivale á la solucion general de este problema: *Dado un punto en un plano, hallar las ecuaciones que le determinan.* Tratemos ahora de resolver el inverso, á saber: *Dadas las ecuaciones* x=a, z=b, *hallar el punto* M (fig. 9) *que determinan.*

Para esto, considerando la primera como si existiese sola, conviene á todos los puntos cuya abscisa es igual con a. Pero si suponemos AP$=a$, todos los puntos de la línea PM prolongada indefinidamente satisfarán á esta condicion; luego *la ecuacion* x=a *pertenece á una recta* PM *paralela al eje de las ordenadas.*

Del mismo modo, *la ecuacion* z=b *conviene á todos los puntos de una línea* QM *paralela al eje de las abscisas.*

Si se verifican á un tiempo las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$, la primera corresponderá á un punto de una paralela al eje de las ordenadas, y la segunda á uno de una parale-

la al eje de las abscisas; luego si el punto que determinan se ha de hallar al mismo tiempo en estas dos rectas, será su punto de interseccion, que es la traduccion literal de la construccion geométrica que sirvió para encontrar dichas ecuaciones.

26. Como la ecuacion $x=a$ representa una recta paralela al eje de las ordenadas, segun sea a positiva ó negativa, esta recta se hallará á la derecha ó á la izquierda del eje de las ordenadas; y si a es nula, coincidirá con este eje; de manera *que la ecuacion del eje de las ordenadas es* $x=0$.

Igualmente, segun sea b positiva ó negativa, la recta cuya ecuacion es $z=b$ estará por la parte de arriba ó por la de abajo del eje de las abscisas; y si b es nula, coincidirá con este eje, cuya ecuacion será $z=0$.

En fin, si se verifican á un tiempo las dos ecuaciones $x=0$, $z=0$,
como la primera conviene al eje de las ordenadas, y la segunda al de las abscisas, el sistema de dichas ecuaciones determinará su punto de interseccion, que es el orígen A de las coordenadas; luego *las ecuaciones del punto de orígen* son $x=0$, $z=0$, que es lo mismo que hallamos antes.

27. Generalizando este resultado, se ve, que si todos los puntos de una línea recta ó curva, son tales que existe la misma relacion entre las coordenadas de cada uno de ellos, la ecuacion entre x y z, que esprese esta relacion, debe caracterizar á esta línea, y por lo mismo se llama *ecuacion de dicha línea*. Recíprocamente, siendo dada la ecuacion, se deduce de ella la naturaleza de la línea; porque si se quieren encontrar aquellos puntos que corresponden á una abscisa determinada, bastará sustituir por x este valor en la ecuacion; está no contendrá ya mas incógnita que la z, y dará los valores correspondientes de las ordenadas, las cuales se colocarán con relacion al eje de las abscisas, conforme al signo de que estén afectas. Igualmente, siendo dada z, la ecuacion manifestará los valores correspondientes de x.

28. Con estos conocimientos pasemos á resolver algunos problemas; y sea el primero

Dada una recta BM (fig. 10), *hallar su ecuacion.*

Res. y *Dem.* Tírense primero los ejes rectangulares AX, AZ; despues se medirá la distancia AA', que se conoce, por ser dada la recta y los ejes, y se hará $AA'=b$; por la misma razon es conocido el ángulo MBA que forma dicha recta con el eje de las abscisas, y cuya tangente trigonométrica representarémos por a; tírense las coordenadas AP, PM, de un punto cualquiera M, y por el punto A' la A'Q paralela al eje de las abscisas, con lo cual será el ángulo

$$MBA=MA'Q, \text{ y } A'Q=AP=x,$$
$$MQ=MP-PQ=MP-AA'=z-b;$$

ahora, el triángulo rectángulo MA'Q dará (I, § 465)

$$R : tang.\ MA'Q :: A'Q : QM, \text{ ó } 1 : a :: x : z-b;$$

de donde sale $z=ax+b$ para la ecuacion pedida.

En efecto, esta misma relacion se verificará entre todos los puntos de la recta BM; pues tirando las coordenadas AP', P'M', que representarémos por x', z', el triángulo A'Q'M' dará $1 : a :: x' : z'-b$,
de donde sale $z'=ax'+b$, que es la misma de antes.

29. Esta ecuacion es la mas general de la línea recta, siendo rectangulares los ejes; y contiene dos indeterminadas a, b (que varían de una recta á otra, y son constantes para una misma recta), porque para fijar la posicion de una recta se necesitan dos condiciones; las x y z son variables que van fijando sucesivamente todos los puntos de la recta.

30. Tambien conviene dicha ecuacion á los puntos como el m que están por debajo del eje; para lo cual se dan á x todos los valores que se quieran positivos y negativos, y se van sacando los correspondientes de z. Ademas, segun los valores que se den á a, la recta tomará otras tantas posiciones respecto del eje de las abscisas.

31. Segun sea la b positiva ó negativa, la recta cortará al eje de las ordenadas mas arriba ó mas abajo del punto de orígen; y si se supone $b=0$, la recta BM, que debe cortar

al eje de ordenadas á ninguna distancia del orígen, pasará por él y será la AN, cuya ecuacion resulta $z=ax$.

32. Si en la ecuacion $z=ax+b$, se hace $x=0$, dará $z=b$, que es el valor de AA', y determina la distancia del orígen á que corta la recta al eje de las ordenadas; y haciendo $z=0$, dará $x=-\frac{b}{a}$, que es la distancia negativa AB á que dicha recta corta al eje de las abscisas.

33. Recíprocamente, si dada la ecuacion $z=ax+b$, se quiere trazar la recta que representa, se principiará por tirar los ejes AX, AZ; despues se hará $x=0$, y se tendrá $z=b$, que determina el punto A'; en seguida, se hará $z=0$, y se tendrá $x=-\frac{b}{a}$, que determina el punto B; y tirando una recta por estos dos puntos, será la línea pedida. Tambien se puede determinar dicha línea por cualesquiera otras dos condiciones.

34. Prob. 2º *Hallar la ecuacion de una recta que pase por dos puntos* M, M' (fig. 11), *cuyas coordenadas se conocen.*

Res. y *Dem.* Bájense desde dichos puntos perpendiculares al eje de las abscisas, con lo que se tendrán las coordenadas de cada uno de estos puntos; llamándolas x', z', x'', z'', y teniendo presente que la ecuacion de la recta en general es $z=ax+b$, esta deberá quedar satisfecha sustituyendo en ella en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo cual se tendrá

$z'=ax'+b$ (A) para el punto M,
y $z''=ax''+b$ (B) para el M'.

Despejando en estas dos ecuaciones las indeterminadas a y b, y sustituyendo sus valores en la ecuacion $z=ax+b$ (C), se tendrá la de la recta sujeta á las condiciones del problema. Este despejo se hace con mucha sencillez, restando la ecuacion (B) de la (A), lo que dará

$z'-z''=a(x'-x'')$, y $a=\frac{z'-z''}{x'-x''}$ (D);

restando la (A) de la (C), se tendrá $z-z'=a(x-x')$ (E); y sustituyendo en esta el valor (D) de a, se tendrá

$$z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x'),$$

que es la ecuacion de la recta buscada.

35. Prob. 3º *Hallar la distancia de dos puntos* M, M' (fig. 11) *cuyas coordenadas se conocen.*

Res. y *Dem.* Sean x', z', las coordenadas del primero, y x'', z'', las del segundo; concíbase la MQ paralela al eje de las abscisas, y llamemos D la distancia MM' que se pide; hecho esto, el triángulo MQM' rectángulo en Q dará

$MM'=\sqrt{MQ^2+M'Q^2}$;
pero $MQ=PP'=AP'-AP=x''-x'$,
y $M'Q=P'M'-P'Q=P'M'-PM=z''-z'$;
luego, sustituyendo estos valores, se tendrá

$$D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2},$$

que es lo que se pedía.

Esc. Si el punto M estuviese en el orígen, sus coordenadas x', z', serían nulas, y la distancia del punto de orígen A (fig. 12) á un punto cualquiera M' del plano, vendrá espresada

por $D=\sqrt{x''^2+z''^2}$;
lo que tambien se confirma por el triángulo AP'M' rectángulo en P', que da $AM'=\sqrt{AP'^2+P'M'^2}$.

De los puntos y de la línea recta considerados en el espacio.

36. Hasta ahora hemos considerado los puntos y rectas situados sobre un mismo plano; ahora vamos á considerarlos en el *espacio*. Para dar una idéa justa de lo que nos proponemos, se debe saber que por espacio se entiende la *estension indefinida del universo donde se conciben colocados*

todos los cuerpos. Para poder fijar la posicion relativa de cualesquiera puntos, se conciben tres planos indefinidos ZAX, XAU, ZAU (fig. 13), que se corten de un modo cualquiera, que para mayor sencillez los supondrémos rectangulares; y un punto M queda determinado cuando se conocen las distancias respectivas MM', MM'', MM''', á cada uno de dichos planos. Estos forman en A un ángulo sólido, semejante al que forman en un rincon de una sala dos paredes de ella y el suelo: y prolongados indefinidamente formarán ocho ángulos sólidos, que comprenderán todos los puntos que se quieran del espacio, así como los cuatro ángulos que forman los ejes rectangulares (23) comprenden todos los puntos situados sobre un plano. Los planos ZAX, XAU, ZAU, á que se refieren los puntos del espacio, se llaman *planos coordenados;* las líneas MM', MM'', MM''', ó sus iguales (I, § 375) AR, AQ, AP, se llaman las coordenadas del punto M, que espresan las distancias de dicho punto M á los planos coordenados; las líneas AU, AZ, AX, sobre que se cuentan las coordenadas, se llaman *ejes de las coordenadas;* y el punto A es el orígen. Las coordenadas que como AR se cuentan en el eje AU, se representan por u, y la línea AU se llama *eje de las u;* las AQ que se cuentan en la AZ, se representan por z, y la AZ es el *eje de las z;* y la línea AX es el *eje de las x.*

El plano ZAX se llama *plano de las xz;* el XAU, *plano de las xu;* y el ZAU será *el de las zu.*

Los puntos M', M'', M''', en que las perpendiculares MM', etc., encuentran á los planos ZAX, etc., se llaman las *proyecciones* del punto M.

37. Esto entendido, si habiendo medido las tres distancias AP, AQ, AR, se halla $x=a$, $z=b$, $u=c$, estas serán *las ecuaciones del punto* M; y combinando los signos, se determinará el ángulo en que se halla dicho punto.

Si se supone $c=0$, se tendrá $x=a$, $z=b$, $u=0$, que determinan un punto M' en el plano de las xz; $x=a$, $z=0$, $u=c$, determinan un punto M'' en el plano de las xu; $x=0$, $z=b$, $u=c$, determinan un punto M''' en el plano de las zu; $x=a$, $z=0$, $u=0$, determinan un punto P en el eje de las x; $x=0$, $z=b$, $u=0$, determinan un punto Q en el eje de las z; $x=0$, $z=0$, $u=c$, determinan un punto R en el eje de las u; y finalmente, $x=0$, $z=0$, $u=0$, son las ecuaciones del punto de orígen A.

38. Pasemos ahora á la resolucion de algunas cuestiones.

1ª *Dada una recta* MN (fig. 14) *en el espacio, hallar las ecuaciones que la determinan.*

Res. y *Dem.* Para resolver este problema, debemos advertir, que así como un punto queda determinado por la interseccion de dos rectas (25), del mismo modo una recta queda determinada por la interseccion de dos planos; ademas se llama *proyeccion* de una recta sobre un plano, la interseccion de este plano con otro (que se llama *plano proyectante*), que le es perpendicular y pasa por dicha recta. Así, la recta M'N' es la proyeccion de la recta MN en el plano de las xz; la M''N'' es la proyeccion de la misma recta MN sobre el plano de las xu; y la recta MN queda ya determinada por la interseccion de los planos proyectantes MN', MN''.

Ahora, como la recta es dada, tambien se conocerán sus proyecciones M'N', M''N'', cuyas ecuaciones son

$$z=ax+b,\ u=a'x+b',$$

en que a, a', espresan las tangentes trigonométricas de los ángulos que dichas proyecciones forman con el eje de las x; y b, b', espresan la distancia á que dichas proyecciones cortan á los ejes de las z y de las u; y como conociendo estas proyecciones y tirando por ellas planos perpendiculares á los coordenados, su interseccion determinará la recta MN en el espacio, resulta que las ecuaciones de esta serán

$$z=ax+b,\ u=a'x+b'.$$

Si la recta pasase por el orígen, sería $b=0$, $b'=0$, y sus ecuaciones se convertirían en $z=ax$, $u=a'x$.

39. 2ª *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por dos puntos dados en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x', z', u', las coordenadas del primer punto; x'', z'', u'', las del segundo; y tendrémos que las ecuaciones $z=ax+b$, $u=a'x+b'$, de una recta en general, deberán quedar satisfechas, si dicha recta ha de pasar por estos puntos, sustituyendo en ellas, en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo que se tendrá

$$\left\{\begin{array}{l} z'=a\,x'+b \\ u'=a'x'+b' \end{array}\right\} \text{ (m) para el primer punto,}$$

$$\text{y } \left\{\begin{array}{l} z''=a\,x''+b \\ u''=a'x'+b' \end{array}\right\} \text{ (n) para el segundo.}$$

Estas cuatro ecuaciones harán conocer las cuatro indeterminadas a, b, a', b'; y sustituyendo sus valores en las generales se tendrán las de la recta pedida. Para hacer el despejo y sustitucion con facilidad, restarémos las (n) de las (m), lo que dará

$$\left\{\begin{array}{l} z'-z''=a(x'-x'') \\ u'-u''=a'(x'-x'') \end{array}\right\},$$

de donde sale $a=\dfrac{z'-z''}{x'-x''}$, $a'=\dfrac{u'-u''}{x'-x''}$;

restando las (m) de las generales, se tendrá

$$\left\{\begin{array}{l} z-z'=a(x-x') \\ u-u'=a'(x-x') \end{array}\right\};$$

y sustituyendo en estas los valores de a, a', se tendrá

$$z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x'),\ u-u'=\frac{u'-u''}{x'-x''}(x-x'),$$

que son las ecuaciones de la línea pedida.

40. 3ª *Hallar la distancia de dos puntos* M, m (fig. 15), *cuyas coordenadas se conocen en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x'', z'', u'', las coordenadas del primero, y x' z', u', las del segundo; concíbase la mQ paralela al plano de las xz; y llamando D la distancia Mm que se pide, se tendrá

$$D=\sqrt{Qm^2+MQ^2}\ (A);$$

pero $MQ=MM'-M'Q=MM'-mm'=u''-u'$ (B);
y como $mQ=m'M'$, y tirando la $m'Q'$ paralela al eje de las x, será perpendicular (I, 280) á PM', el triángulo $m'Q'M'$ rectángulo en Q' *, dará $M'm'^2=$
$m'Q'^2+M'Q'^2$(C); pero $m'Q'=Pp=AP-Ap=x''-x'$,
$M'Q'=M'P-PQ'=M'P-m'p=z''-z'$;
luego la ecuacion (C) se convertirá
en $M'm'^2=(x''-x')^2+(z''-z')^2$;
luego sustituyendo en la ecuacion (A) el valor de $M'm'^2$ en vez de su igual Qm^2, y en vez de MQ su valor (B), la espresion (A) de la distancia pedida se convertirá en

$$D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2+(u''-u')^2}.$$

Esc. Si el punto m estuviese en el orígen A, sus coordenadas x', z', u', serían nulas, y la distancia del punto de orígen A (fig. 16) á otro cualquiera M del espacio, vendría espresada por $D=\sqrt{x''^2+z''^2+u''^2}$; lo que tambien se deduce de los triángulos rectángulos AM'M, AM'P, como deberán hacer los discípulos.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA,

Tomada del Curso de Matemáticas de la Escuela de San Cyr.

Teoremas y problemas.

41. El *método de las proyecciones* consiste en representar sobre una superficie dada, segun cierta ley, los puntos

* Cuando las figuras han de representar un objeto en que entren las tres dimensiones, es preciso ponerlas en perspectiva; en cuyo caso los principiantes tienen que vencer muchas dificultades para formarse una exacta idéa del objeto, por la figura, que á la verdad no le representa á nuestra vista como él es en sí. Por esta causa, no dejará de costar dificultad á un principiante, el concebir que los ángulos m'M'M, APM' y m'Q'M' (fig. 15) son rectos, cuando á la