39. 2ª *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por dos puntos dados en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x', z', u', las coordenadas del primer punto; x'', z'', u'', las del segundo; y tendrémos que las ecuaciones $z=ax+b$, $u=a'x+b'$, de una recta en general, deberán quedar satisfechas, si dicha recta ha de pasar por estos puntos, sustituyendo en ellas, en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo que se tendrá

$$\left\{\begin{array}{l} z'=a\,x'+b \\ u'=a'x'+b' \end{array}\right\} \text{ (m) para el primer punto,}$$

$$\text{y } \left\{\begin{array}{l} z''=a\,x''+b \\ u''=a'x'+b' \end{array}\right\} \text{ (n) para el segundo.}$$

Estas cuatro ecuaciones harán conocer las cuatro indeterminadas a, b, a', b'; y sustituyendo sus valores en las generales se tendrán las de la recta pedida. Para hacer el despejo y sustitucion con facilidad, restarémos las (n) de las (m), lo que dará

$$\left\{\begin{array}{l} z'-z''=a(x'-x'') \\ u'-u''=a'(x'-x'') \end{array}\right\},$$

de donde sale $a=\dfrac{z'-z''}{x'-x''}$, $a'=\dfrac{u'-u''}{x'-x''}$;

restando las (m) de las generales, se tendrá

$$\left\{\begin{array}{l} z-z'=a(x-x') \\ u-u'=a'(x-x') \end{array}\right\};$$

y sustituyendo en estas los valores de a, a', se tendrá

$$z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x'),\ u-u'=\frac{u'-u''}{x'-x''}(x-x'),$$

que son las ecuaciones de la línea pedida.

40. 3ª *Hallar la distancia de dos puntos* M, m (fig. 15), *cuyas coordenadas se conocen en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x'', z'', u'', las coordenadas del primero, y x' z', u', las del segundo; concíbase la mQ paralela al plano de las xz; y llamando D la distancia Mm que se pide, se tendrá

$$D=\sqrt{Qm^2+MQ^2}\ (A);$$

pero $MQ=MM'-M'Q=MM'-mm'=u''-u'$ (B);
y como $mQ=m'M'$, y tirando la $m'Q'$ paralela al eje de las x, será perpendicular (I, 280) á PM', el triángulo $m'Q'M'$ rectángulo en Q' *, dará $M'm'^2=$
$m'Q'^2+M'Q'^2$(C); pero $m'Q'=Pp=AP-Ap=x''-x'$,
$M'Q'=M'P-PQ'=M'P-m'p=z''-z'$;
luego la ecuacion (C) se convertirá
en $M'm'^2=(x''-x')^2+(z''-z')^2$;
luego sustituyendo en la ecuacion (A) el valor de $M'm'^2$ en vez de su igual Qm^2, y en vez de MQ su valor (B), la espresion (A) de la distancia pedida se convertirá en

$$D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2+(u''-u')^2}.$$

Esc. Si el punto m estuviese en el orígen A, sus coordenadas x', z', u', serían nulas, y la distancia del punto de orígen A (fig. 16) á otro cualquiera M del espacio, vendría espresada por $D=\sqrt{x''^2+z''^2+u''^2}$; lo que tambien se deduce de los triángulos rectángulos AM'M, AM'P, como deberán hacer los discípulos.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA,

Tomada del Curso de Matemáticas de la Escuela de San Cyr.

Teoremas y problemas.

41. El *método de las proyecciones* consiste en representar sobre una superficie dada, segun cierta ley, los puntos

* Cuando las figuras han de representar un objeto en que entren las tres dimensiones, es preciso ponerlas en perspectiva; en cuyo caso los principiantes tienen que vencer muchas dificultades para formarse una exacta idéa del objeto, por la figura, que á la verdad no le representa á nuestra vista como él es en sí. Por esta causa, no dejará de costar dificultad á un principiante, el concebir que los ángulos m'M'M, APM' y m'Q'M' (fig. 15) son rectos, cuando á la

situados en el espacio; esta parte de Geometría es la que se llama *Geometría descriptiva,* la cual se aplica frecuentemente á las artes gráficas.

42. *Un punto es dado en el espacio por sus distancias á tres planos conocidos.* Se suponen regularmente estos planos rectangulares, y así los considerarémos aquí (fig. 17).

Sea M el punto de que se habla, y que está referido á los tres planos rectangulares *bac, dab, cad.* Las rectas MM', MM'', MM''', midiendo las distancias de este punto á cada uno de estos planos, son las aristas contíguas del paralelipípedo M''' *n*; pero en este cuerpo el cuadrado de la diagonal *a*M es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas de un mismo ángulo triedro; porque

$$\overline{aM}^2 = \overline{aM'}^2 + \overline{MM'}^2 \text{ y } \overline{aM'}^2 = \overline{an}^2 + \overline{nM'}^2 .$$

Luego el cuadrado de la distancia de un punto cualquiera M *del espacio, á aquel en que se encuentran los tres planos coordenados, es igual á la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto* M *á cada uno de estos planos.*

El pie de la perpendicular bajada de un punto dado sobre un plano, se llama la *proyeccion ortogonal,* ó simplemente la *proyeccion* de este plano.

Los planos sobre los cuales se proyectan los puntos del espacio, se llaman *planos de proyeccion* ó *planos coordenados.* Para fijar mejor las idéas, supondrémos que uno de

vista parecen agudos; que *mm'*=QM'; que *m'*M' es igual y paralela con *m*Q; que *m'*M' es mayor que *m'*Q'; y que AM (fig. 16) es mayor que la MM', cuando aparece menor que AM' tambien es mayor que AP, y que el ángulo AM'P representa un ángulo agudo, siendo así que en la figura aparece obtuso.

Siempre que yo he esplicado las Matemáticas, he procurado presentar á los sentidos de mis discípulos los objetos, al mismo tiempo que sus figuras. Así es, que en la Geometría, ideé las dos láminas de figuras recortadas (que se incluyen en el Tradado elemental, para que se pudiesen formar de bulto los cuerpos que representan; y con el fin de hacer sensible tanto estas figuras como otras de la Aplicacion del Algebra á la Geometría, me valía de los punteros que había para uso del encerado, y de líneas que se trazaban en el suelo. Cuando estuve en París, me resultó la mayor satisfaccion en ver, que el sabio y eminente Profesor Mr. S. F. Lacroix usaba de medios análogos para el mismo objeto.

estos planos es horizontal, y que los otros dos son verticales.

La *proyeccion de una recta* sobre un plano (fig. 18) es la interseccion de este plano con otro que se llama *plano proyectante,* que le es perpendicular, y que pasa por la recta propuesta. Así, la recta MN tiene por proyeccion horizontal M'N', y por proyeccion vertical M''N''.

43. *La posicion de una recta está determinada en el espacio por sus proyecciones sobre los planos coordenados.*

En efecto, si por las proyecciones de esta recta se levantan planos perpendiculares á los planos de proyeccion respectivos, cada uno de ellos contendrá la recta de que se trata; luego será la seccion comun de estos planos.

De aquí es facil inferir que una de las tres proyecciones de una recta depende esencialmente de las otras dos. Así, no considerarémos ya mas que dos planos de proyeccion, el horizontal y el vertical, y supondrémos tambien que el plano vertical se ha ido bajando sobre el plano horizontal, haciéndolo girar alrededor de su comun seccion como charnela.

Esta circunstancia da lugar á una advertencia importante, es que *las dos proyecciones de un mismo punto se hallan sobre una misma recta perpendicular á la interseccion de los dos planos de proyeccion.*

Por ejemplo (fig. 17), en la figura en *perspectiva,* el punto M está proyectado sobre los planos *bac, bad,* segun las perpendiculares MM', MM''; las rectas M''*n*, M'*n*, respectivamente paralelas á estas perpendiculares, forman pues ángulos rectos con la línea *ab*; luego, bajando el plano *dab* sobre el plano *bac*, los puntos M', M'' estarán sobre la misma recta M', M'' perpendicular á *ab*.

44. En la arquitectura, el dibujo ejecutado sobre el plano horizontal de proyeccion, se llama *plano geométrico;* este hace conocer la situacion respectiva de las proyecciones de todos los puntos notables de un edificio; y estas proyecciones, segun lo que se ha dicho, se determinan por los pies de

las *líneas á plomo* ó de las perpendiculares bajadas sobre este plano. Sobre el plano vertical se proyectan estos mismos puntos, y se hallan por consiguiente, sus alturas respecto del plan horizontal. La figura que resulta de esta última operacion, se llama *corte* ó *perfil*, cuando representa una seccion hecha en el edificio; y *elevacion*, cuando solo representa las partes esteriores.

La recta segun la cual un plano encuentra á uno de los planos de proyeccion se llama la *traza* del primer plano.

45. *Un plano es conocido por sus trazas sobre cada uno de los planos de proyeccion* (fig. 19).

En efecto, si mM' y mM'' son las trazas de este plano, sobre el plano horizontal bac y sobre el plano vertical dab, los tres puntos M', m, M'', no estando en línea recta, y perteneciendo al plano de que se trata, determinan necesariamente su posicion.

Si sucediese que la traza $M''m$ fuese perpendicular á ab, el plano $M''mM'$ sería perpendicular al plano horizontal; y si las dos trazas fuesen perpendiculares á ab, el plano de que se habla sería á la vez perpendicular á los dos planos de proyeccion; esto es evidente.

46. *Dados dos planos no paralelos, hallar las proyecciones de su interseccion* (fig. 20).

Sean $M'mM''$, $M'nM''$, los dos planos dados. Los dos puntos M', M'', situados respectivamente en el plano horizontal y en el vertical, perteneciendo al mismo tiempo á los dos planos dados, se sigue que la recta $M'M''$ es su comun seccion. Luego si bajan sobre ab las perpendiculares $M'q$, $M''p$, las rectas pM', qM'', serán las proyecciones horizontal y vertical de la interseccion de los dos planos dados.

47. *Hallar las proyecciones de la recta que pasa por dos puntos dados* (fig. 21).

Esta cuestion se resuelve inmediatamente juntando sobre cada plano de proyeccion las proyecciones de los puntos dados. Por ejemplo, la recta $M'N''$, que pasa por las proyecciones horizontales de estos puntos, es tambien la proyeccion horizontal de la recta que junta estos mismos puntos; del mismo modo, $M'N''$ es su proyeccion vertical.

48. *Las proyecciones de dos rectas paralelas en el espacio son tambien paralelas sobre cada plano de proyeccion* (fig. 22).

Porque siendo MN, PQ, las rectas propuestas, los dos planos proyectantes verticales NMN', QPQ', son paralelos; pues suponiendo las líneas NN', QQ', perpendiculares al plano horizontal abc, los ángulos MNN', PQQ', son iguales y tienen sus planos paralelos. Luego las proyecciones MN', PQ', son paralelas.

Si el paralelismo de las proyecciones no tuviese lugar mas que sobre uno de los planos coordenados, las rectas de que se trata no serian paralelas entre sí. Esta circunstancia anunciaría solamente que una de estas rectas es paralela al plano proyectante de la otra.

Se concibe fácilmente que dos rectas se cortan en el espacio (fig. 17), cuando sus proyecciones sobre cada plano coordenado se encuentran en los puntos situados sobre una misma línea perpendicular á ab (43), y estos puntos son entonces las proyecciones del punto que se busca.

49. *Por un punto dado, tirar una paralela á una recta dada* (fig. 23).

Resulta del teorema precedente que la cuestion actual quedará resuelta, si por las proyecciones P', P'', del punto propuesto, se tiran en cada plano coordenado las rectas $F'G'$, $F''G''$, respectivamente paralelas á las proyecciones $M'N'$, $M''N''$, de la recta dada; porque las rectas $F'G'$, $F''G''$, serán las proyecciones horizontal y vertical de la recta buscada.

50. *Hallar la interseccion de un plano y de una línea recta* (fig. 24).

Sea, en la figura en perspectiva $M'oM''$ el plano dado, y PR la recta cuyas proyecciones R', R'' del punto R, interseccion con este plano, se tratan de hallar.

Para el efecto, se buscará la comun seccion de uno de

los planos proyectantes PRR'P' con el plano propuesto; esta línea pasará necesariamente por el punto R, y su proyeccion sobre el plano vertical cortará la P''R'' de la recta dada PR, en un punto R'', que será la proyeccion del punto buscado.

Para ejecutar realmente esta construccion, sea M'oM'' el plano dado, y nM', qQ'' las proyecciones de la recta cuya interseccion con este plano se busca. Tírense desde los puntos M', n, las perpendiculares M'm, nM'' á la recta *ab*; y la línea mM'' será (46) la proyeccion vertical de la comun seccion del plano proyectante M''nM' con el plano M'oM''. Así, el punto R'' será la proyeccion vertical del punto R. En cuanto á la proyeccion horizontal R' de este punto, se halla tirando R''R' perpendicular á *ab* (43).

Se conseguiría el mismo objeto, efectuando la construccion representada por la figura 25.

51. *Dado un plano, hallar para cada punto del plano horizontal la coordenada vertical, es decir la altura del que le corresponde en el plano dado* (fig. 26).

Sea M'oM'' el plano dado, y P' la proyeccion horizontal de este plano, cuya altura por encima de *bac* es la que se pide. Si se concibe en el plano M'oM'' una horizontal PQ'', esta será la paralela á la traza oM', y entonces qQ'' ó nP'' será la altura del punto P por encima del plano horizontal *bac*.

Sentado esto, tírese P'q paralela á oM', levantando á qQ'' perpendicular á *ab*; y las líneas P'P'', Q''P'', respectivamente paralelas á qQ'' y *ab*, se encontrarán en un punto P'', que será la proyeccion vertical del punto P que se busca; y nP'' ó qQ'' será su altura por encima del plano horizontal.

52. *Determinar el ángulo que hace una recta con uno de los planos de proyeccion* (fig. 27).

Se percibe que el ángulo que una recta P'N hace con un plano *cba*, es el que forma esta recta con la traza P'N' del plano proyectante P'NN' sobre el plano *abc*. Si pues eF', gG'' son las proyecciones de una recta dada, se tomará arbitrariamente sobre eF' un punto N'; y el punto N'', determinado por el encuentro de la recta N'N'', perpendicular á *abc*, con la proyeccion gG'', será la proyeccion vertical del punto N.

Ahora tratemos de hallar los puntos en que la recta MN encuentra los planos coordenados. Estos puntos son aquellos donde la recta de interseccion de ambos planos proyectantes encuentra á los planos coordenados; pues (46) los puntos P', P'', son los buscados (fig. 27).

Queda por determinar el ángulo NP'N'. Para este fin, si se considera que el triángulo NP'N', volteando alrededor de P'N', se sobrepone sobre el plano horizontal, la recta N'N quedará constante é igual á N''h. Por consiguiente, haciendo N'n perpendicular á P'N', é igual á N''h, el ángulo NP'n será el que se busca.

La figura 28 representa el caso en que la recta dada encuentre el plano horizontal *bac* que se supone prolongado hácia *d*.

53. *Encontrar el ángulo que un plano dado hace con cada uno de los planos de proyeccion* (fig. 29).

Sea M'oM'' el plano dado; determinar, por ejemplo, el ángulo que este plano hace con el horizontal *bac*.

Si desde un punto P cualquiera, tomado sobre el plano M'oM'' se baja sobre *bac* una perpendicular PP', y que por esta perpendicular se concibe un plano PP'N', perpendicular al plano dado M'oM'', el ángulo PN'P' será el que se pide.

Sentado esto, tómese arbitrariamente un punto P' sobre el plano horizontal (fig. 29 *), y desde este punto bájese sobre oM' la perpendicular P'N'. Se buscará, por lo dicho (51), la proyeccion P'' del punto P, y tomando sobre qP', paralela á oM', la parte P'p=P''r, se tendrá que el ángulo pN'P' será la inclinacion que solicitamos.

Es facil demostrar que la perpendicular bajada de un punto cualquiera de un plano inclinado al horizonte sobre la traza del plano, ó una línea horizontal que sea contenida

en él, es la línea de mayor inclinacion de este mismo plano: de donde se sigue que si quisiéramos hallar la línea mas inclinada de un plano M'oM'', se bajaría desde un punto cualquiera P una perpendicular PN' sobre la horizontal oM', la cual sería la línea buscada (fig. 29).

54. *Por un punto dado tirar un plano paralelo á otro plano conocido* (fig. 30).

Pues los planos han de ser paralelos, sus trazas sobre los planos coordenados tambien serán paralelas (48). Sobre esta propiedad se ha fundado la siguiente construccion.

Sea M'mM'' el plano dado, y P', P'' las proyecciones del punto dado, se tirará P'e paralela á mM', y se formará el rectángulo epP''E''; entonces el punto E'' estando sobre la traza vertical del plano buscado, se tirará á mM'' la paralela nE''N'' y por el punto n la recta nN' paralela á mM'. El plano N''nN' determinado de este modo será paralelo á M''mM', y pasará por el punto dado.

55. *Si una recta es perpendicular á un plano, su traza y la proyeccion de esta recta sobre el mismo plano coordenado, tambien serán perpendiculares* (fig. 31).

El plano que se considera es M'mM'', y PQ la recta que le es perpendicular: así, todo plano PQ' pasando por esta recta será perpendicular al plano M'mM''; por consiguiente, si el plano PQ' es el proyectante de la recta PQ, llenará esta condicion, y ademas será perpendicular al plano horizontal *bac*; pues este último y el plano M'mM'' le serán ambos perpendiculares, porque la comun seccion ó la traza mM' goza tambien de esta propiedad, luego finalmente mM' ha de ser perpendicular á P'Q', proyeccion horizontal de la recta PQ. Igual raciocinio puede hacerse respecto de la proyeccion vertical.

56. *Por un punto dado, tirar una perpendicular á un plano conocido* (fig. 32).

Resulta del teorema precedente que, si desde las proyecciones P', P'' del punto dado se bajan respectivamente sobre las trazas mM' mM'' del plano dado, las perpendiculares

P'Q', P''Q'' serán las proyecciones de la línea, y gozarán las propiedades requeridas.

Si se quisiera determinar la longitud de la perpendicular al plano dado, se buscarían las proyecciones de un estremo por lo enseñado (50), y construyendo, sobre la proyeccion de la longitud de la perpendicular de que hablamos, un trapecio, cuyas bases paralelas y perpendiculares á esta proyeccion, fuesen iguales á las alturas de las estremidades de esta perpendicular por encima del plano coordenado, que contiene la proyeccion de que se trata; entonces el cuarto lado de este trapecio será la longitud pedida.

57. *Por un punto dado, tirar un plano perpendicular á una recta dada* (fig. 33).

Las proyecciones de la recta y las trazas del plano que se busca, debiendo ser perpendiculares entre sí, sobre cada plano coordenado, se sigue que el problema quedará resuelto, luego que se conozca un punto de una de estas trazas.

Al efecto, por el punto P', proyeccion horizontal del punto dado, se tira á P'q perpendicular á la proyeccion e'M' de la recta dada; esta línea P'q será paralela á la traza del plano buscado, y podrá ser mirada como la proyeccion, sobre el plano horizontal, de una línea que le fuese paralela, y que pasase por el punto dado. Si se construye por lo dicho (51), el encuentro de esta última con el plano vertical se verificará en Q''. Tirando entonces á Q''m perpendicular á la proyeccion e''M'', esta será la traza del plano buscado sobre el plano vertical; y tirando de la otra parte á M'm perpendicular á e'M', esta será su traza horizontal (fig. 32 *).

Al presente, se puede resolver esta cuestion: *Dados dos planos, encontrar el ángulo que forman entre sí.*

Porque el ángulo de dos planos es el mismo que el de dos líneas perpendiculares, tiradas en cada uno de los planos á un mismo punto de su interseccion; y estas líneas determinarán precisamente un plano perpendicular á esta interseccion. Construidas las proyecciones de la interseccion