de los planos dados (46), y tirado por un punto elegido arbitrariamente en esta recta un plano que le sea perpendicular, construidas despues las trazas del nuevo plano sobre cada uno de los propuestos, no quedará por determinar sino el ángulo de las dos trazas, para lo que servirá la siguiente construccion.

Sean M'*m*M'' y M'*n*M'' los dos planos dados, *p*M' y *p*M'' serán (46) las proyecciones horizontal y vertical de su comun seccion. Para tener la longitud de esta comun seccion, tírese á $pM_{\prime\prime}$ perpendicular á *p*M' é igual á *p*M'', entonces la recta $M'M_{\prime\prime}$ será la buscada. En seguida, imaginemos que el triángulo M''*p*M' se va levantando hasta quedar vertical, y por el punto R' tomado arbitrariamente sobre *p*M' levantemos un plano perpendicular á $M_{\prime\prime}M'$, entonces PR' será la traza de este plano sobre el vertical $M_{\prime\prime}pM'$. Haciendo girar el primero alrededor de su traza horizontal S'Q', la recta R'P, que es perpendicular á R'S', se aplicará sobre M'R', y el punto P estará en P' : ademas el triángulo cuyos tres puntos Q', P, S', son los vértices, no variará nada por haber bajado, y será precisamente Q', P', S'; así el ángulo en P' será el de los dos planos dados.

58. *Hacer pasar un plano por tres puntos dados* (fig. 34).

Si por los puntos dados M, N, P, se conciben dos rectas MN, NP, sus proyecciones respectivas serán sobre el plano horizontal M'N', N'P', y sobre el plano vertical serán M''N'', N''P''. Ademas, sus puntos de encuentro F', E', con el plano *abc* se determinarán por lo dicho (52), y la traza horizontal del plano buscado será *h*E'. Se sujetará este plano á pasar por cualquiera de los tres puntos dados, v. g., por N, y se obtendrá, por este medio, la otra traza *h*G''.

Si fuese necesario encontrar la altura vertical de un cuarto punto dado por su proyeccion, y que estuviese en el mismo plano de los tres puntos dados M, N, P, se haría lo dicho (51); pero se puede resolver este problema, independientemente de las trazas del plano que contiene estos puntos. Al efecto, supongamos (fig. 35), como antes, que

los M, N, P, estén proyectados en M', N', P', sobre el plano horizontal, y que sea preciso encontrar la coordenada, ó altura vertical, del punto *z*'. Se llevará la recta M'*z*' hasta en *x*', y la recta *x*'*x* paralela á PP'; entonces la recta M*x* contendrá al punto *z* buscado, y, por consiguiente, *zz*' paralela á MM' será la altura pedida.

Tambien se podrá tirar en el plano MNP una horizontal por el punto *z*. Para esto se buscará por lo enseñado en las líneas proporcionales, ya en el trapecio MN', ya en el MP', un punto *y* ó *u*, cuya altura *yy*' ó *uu*', por encima del plano de proyeccion, fuese igual á *zz*'; y la recta *yzu* sería la horizontal de que se habla. (Nótese que en las figuras geométricas las alturas por encima del plano horizontal se cuentan partiendo de *ab* (fig. 35 *).

59. *Estando dadas en el espacio dos rectas que no son paralelas, tirar por una de ellas un plano paralelo á la otra, y medir la distancia mas corta de estas dos rectas* (fig. 36).

Sean *ef*, *gh*, las dos rectas dadas. Si por un punto cualquiera *f* de la primera se concibe una recta *fq* paralela á la otra recta *gh*, las líneas *ef*, *fq*, determinarán necesariamente la posicion de un plano *pg* que será paralelo á la segunda recta *gh*.

Para medir la distancia mas corta de *ef* á *gh*, es menester tirar un plano *hrg* perpendicular á *pq*, y del punto *r* comun á la recta *ef* y á la interseccion *ab* de ambos planos *ag*, *pq*, levantar á este último la perpendicular *rs* que estará toda entera en el plano *ag*, y que medirá la distancia mas corta que se ha pedido. Se sigue que esta distancia mas corta es á un tiempo perpendicular á las dos rectas dadas.

Darémos las construcciones relativas á esta solucion : E'P' y *e*P'' son las proyecciones de la recta dada, y O'*m*, *o*M'', las de la segunda recta. El punto donde la primera recta encuentra al plano horizontal es E' (52), y aquel en que la segunda recta encuentra al mismo plano es O'. Para hacer pasar por E' una paralela á la segunda recta dada, se tirarán las líneas E'L' y *e*L'' respectivamente paralelas á las li-

neas O'*m*, OM''; estas rectas serán las proyecciones de la línea buscada.

Se trata de hallar la posicion del plano que pasa por esta tercera línea y por la primera recta dada, este plano será paralelo á la segunda recta. Prolónguese á E'L' hasta *g*, y levántese en el eje *ab* la perpendicular *g*G'' y el punto G'' será en el cual la tercera recta encuentra el plano vertical. Prolongando E'P' hasta *f*, el punto F'', interseccion de la perpendicular *f*F'' y de la prolongacion de *e*P'', será el punto en que la primera recta encuentra el plano vertical; luego la línea F'G'' será la traza vertical del plano buscado, y la línea *h*E' su traza horizontal.

Resta bajar una perpendicular desde un punto cualquiera de la segunda recta sobre el plano K'*h*K'', cuya posicion acabamos de determinar. Para esto, elegimos el punto cuyas proyecciones son O', *o*, y bajemos respectivamente de estas proyecciones las perpendiculares O'K', *o*K'' sobre las trazas *h*K', *h*K'' (56). Despues tiremos á K''*r* perpendicular con *ab*, y juntemos los puntos *r*, S'. El punto N' y su correspondiente N'' serán las proyecciones del estremo de la perpendicular de que se trata. Finalmente, se hallará la longitud de esta perpendicular, como se dijo (56).

60. *Estando dados los tres ángulos planos que forman un sólido, encontrar, por una construccion plana, el ángulo que dos de estos hacen entre sí* (fig. 37).

Sea S el ángulo sólido, compuesto de los ángulos planos conocidos ASB, ASC, BSC. Se trata de hallar el ángulo que dos de estos planos forman entre sí; v. g., el ángulo de los planos ASB, ASC.

Al efecto, concibamos que desde un punto cualquiera B, tomado sobre la arista SB, se haya bajado sobre el plano ASC la perpendicular BP, sobre la arista AS, la perpendicular BA, y sobre SC la perpendicular BC. Si se junta PA y PC, los ángulos BAP, BCP medirán las inclinaciones respectivas de los planos ASB, BSC, con ASC.

Háganse sobre un plano los ángulos ASB', ASC, CSB'', respectivamente iguales á los ángulos ASB, ASC, BSC; tómese SB=SB'=SB'', y desde los puntos B' y B'' bájense las perpendiculares B'A, B''C, sobre las líneas AS, SC. Desde el punto A como centro y con un radio AB', descríbase la semicircunferencia B'*b*D; en el punto P, levántese sobre B'D la perpendicular P*b*, y júntese *b*A. El ángulo *b*AP será igual á BAP, y representará, por consiguiente, la inclinacion buscada de los dos planos ASB, ASC; porque en la construccion precedente los triángulos ASB, BSC, están sobrepuestos al tercero ASC.

Si el punto P cayese entre A y B', el ángulo DA*b* sería obtuso y mediría lo mismo la inclinacion pedida.

Se ha demostrado que los ángulos planos que componen un ángulo sólido siempre valen menos que cuatro ángulos rectos, y que el mayor ángulo plano vale menos que los otros dos. Para poder formar un ángulo sólido, es preciso pues tomar tres ángulos planos que satisfagan á estas dos condiciones. Por esta razon, se conocerá que el problema propuesto sería imposible si el punto P estuviese situado fuera de la recta B'D. Así, los límites del ángulo CSB'', el único que suponemos variable, son CSH, CSK. Por lo dicho, se advertirá el partido que puede sacarse de la precedente construccion para resolver el problema inverso.

Siendo dados dos de los tres ángulos planos que forman un ángulo triedro con el ángulo que sus planos hacen entre sí, hallar el tercer ángulo plano.

Cuestion: Supongamos que los ángulos planos dados son ASC, ASB': por un punto B' tomado á arbitrio sobre SB', bájese la B'A perpendicular á SA: haciendo centro en A y con el radio AB', trácese el semicírculo B'*b*D, que terminará en el punto D, prolongacion de BA; fórmese el ángulo DA*b* igual al ángulo dado de los dos planos, por el punto *b* bájese la perpendicular *b*P al radio AD, y por el punto P interseccion de esta con el radio, tírese PB'' perpendicular á la arista SC, que encontrará en B'' la circunferencia trazada con el radio SB': desde el centro S de dicho punto á B'',

llévese la SB″, y el tercer ángulo plano buscado será CSB″.

De los planos tangentes á las superficies curvas.

61. *Un plano tangente á una superficie curva cualquiera, es el que contiene todas las tangentes que se pueden tirar por el punto de contacto del plano y de la curva.*

Se sigue de la definicion que, si por el punto de contacto, se pasa un plano en una direccion cualquiera, su interseccion con el plano tangente será una recta tangente á la seccion correspondiente hecha sobre la superficie curva.

Pues que dos rectas que se cortan fijan la posicion de un plano, dos de las líneas de las que se acaba de hablar originarán dos tangentes que determinarán el plano tangente á la superficie curva. En general, se simplifican las construcciones cuando las secciones se hacen paralelas á los planos coordenados.

Para tirar un plano tangente á una superficie curva, es menester saber tirar tangentes á las curvas planas. No entrando en muchos detalles, pondrémos algunos casos particulares, tratados de un modo sencillo.

Plano tangente á un cilindro.

62. La posicion de un cilindro está dada en el espacio por las proyecciones de una generatriz, y las de la curva que dirige el movimiento de esta línea. Se llama esta curva *de doble curvatura* si cuatro de sus puntos consecutivos, cualesquiera que sean, no están en un mismo plano. La posicion de tal línea es conocida en el espacio, cuando es la interseccion de dos superficies curvas dadas : puede considerarse siempre como la interseccion de dos superficies cilíndricas cuyas generatrices respectivamente son perpendiculares á los planos de proyeccion.

La línea de contacto de un plano tangente á la superficie de este cuerpo, es la misma generatriz tomada en una de sus posiciones : así, la cuestion quedará enteramente

determinada si se sujeta este plano á pasar por un punto dado (fig. 38).

Sea O′E′ el radio del círculo que sirve de base al cilindro propuesto, y que está trazado sobre el plano horizontal de proyeccion. Sean O′L′, *o*L″ las proyecciones del eje del cilindro, y supongamos que sea preciso tirar á la superficie de este cuerpo un plano tangente por un punto tomado en esta misma superficie, y cuya proyeccion horizontal es M′. Tírese M′N′ paralela á O′L′; desde el N′ bájese sobre *ab* N′*n*, y tírese *n*M″ paralela á *o*L″. El punto M″ será la proyeccion vertical del punto dado (43), y las líneas M′N′, *n*M″ serán las proyecciones de la línea de contacto.

Esto supuesto, la recta M″P″ paralela á *ab* representará la traza de la seccion horizontal hecha en el cilindro á la altura *m*M″ por encima del plano de su base : y como esta seccion es igual á la base, el cilindro P′M′, cuyo centro es P′, será la proyeccion horizontal de ella. Tirando pues á esta proyeccion la tangente M′R′, representará la proyeccion de la segunda recta, por la cual debe pasar el plano tangente. La cuestion queda reducida á encontrar las trazas de este plano que se hace pasar por dos rectas conocidas, para lo que se ejecutará lo dicho (59).

En la práctica se puede omitir el describir el círculo P′M′, pues que *s*N′ debe ser paralela á M′*q*, y que M′*q* es perpendicular á M′P′.

El punto por el cual debe ser tirado el plano tangente, podría ser dado fuera de la superficie; en este caso, se formaría una seccion horizontal pasando por el punto dado, se tiraría una tangente á esta seccion, y lo restante como se ha dicho antes; pero entonces el problema sería susceptible de dos resoluciones.

Plano tangente á un cono.

63. Se propone tirar un plano tangente á un cono por un punto tomado sobre su superficie; la única diferencia que

existe entre la resolucion del problema actual y el anterior, es que la línea de contacto, en lugar de ser paralela al eje, como en el cilindro, concurre en el vértice del cono. Este cuerpo está determinado cuando se conocen las proyecciones de su vértice, y su traza sobre uno de los planos coordenados, ó cuando se obliga la curva á tocarse por la generatriz.

(Fig. 39). La base del cono se representa por el círculo horizontal O'E', las proyecciones del vértice son los puntos S'S'', y la proyeccion horizontal del punto de contacto es M'. Con mirar la figura se conocen las operaciones gráficas que deben ejecutarse.

Las dos superficies que acabamos de considerar son de las que se llaman *desarrollables*, porque se las puede concebir estendidas en un plano, sin que resulte duplicacion.

Plano tangente á una esfera.

64. El tamaño y posicion de una esfera es dada en el espacio de muchos modos. Por ejemplo, lo es por las proyecciones de su centro y por el tamaño del radio, ó bien por las proyecciones de cuatro puntos tomados en su superficie, pero que no estén situados en un mismo plano. En este último caso, el centro de la esfera está en cada uno de los planos levantados perpendicularmente sobre la mitad de las rectas que juntan á los planos dados de dos en dos. Este centro se hallará conforme á lo que dijimos.

Para tirar un plano tangente á la esfera por un punto de su superficie, basta construir el plano que está perpendicular á la estremidad del radio tirado por este punto.

Sean O', O'' las proyecciones del centro de la esfera (fig. 40), y P' la proyeccion horizontal del punto de contacto. Se buscará su proyeccion vertical P'', y al efecto se tirará por P' un diámetro á la proyeccion horizontal, á la cual se levantará la perpendicular P'π'. Se tirará por el punto O'' la horizontal O''M'', y se tomará por encima y debajo de esta horizontal á M''P''=P'π' : los puntos P'', P' serán las proyecciones verticales del punto de contacto que se considera, porque es evidente que dos de los puntos de la esfera tienen una misma proyeccion sobre el plano horizontal. No considerando sino la proyeccion P' situada debajo de O'M'', las rectas O'P'', O'P' son las proyecciones vertical y horizontal, ó el radio perpendicular al plano tangente, cuyas trazas ST', ST'' se hallan por el método dicho (57).

La cuestion de tirar un plano tangente á una esfera por un punto dado fuera de su superficie es un problema indeterminado. La curva de contacto de todos los planos tangentes es un círculo de la esfera, cuyo plano es perpendicular á la recta que junta el centro de esta esfera y el punto de que se trata. Así, este punto puede considerarse como el cúspide de un cono recto tangente á la esfera, que tiene por base el círculo de contacto.

El problema tiene dos resoluciones cuando el plano debe pasar por una recta dada. En este caso, se tira por el centro de la esfera un plano perpendicular á esta línea, y por el punto de interseccion, una tangente al círculo máximo, que es la interseccion de la esfera y del plano perpendicular á la línea dada; esta y la tangente de que tratamos determinan la posicion del plano pedido.

El método de tirar un plano tangente á una superficie cualquiera, por una recta dada, es de utilidad en la fortificacion para el *problema del desenfilamiento*.

DE LAS SECCIONES CONICAS.

65. Hemos visto (28) que la ecuacion $z=ax+b$, representa en general la naturaleza de la línea recta; por lo cual dicha ecuacion se llama *lineal;* y la recta, *línea de primer órden.*

Cuando la relacion entre las coordenadas de una línea