$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ z'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2);$$

y formando proporcion con estas dos ecuaciones, será

$$z^2:z'^2::\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2):\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)::a^2-x^2:a^2-x'^2::$$

$$(a+x)(a-x):(a+x')(a-x')::\mathrm{BP}\times\mathrm{B'P}:\mathrm{BP'}\times\mathrm{B'P'};$$

luego los *cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las abscisas,* entendiéndose en general por abscisas las partes en que queda dividido el eje por las ordenadas. Así, la abscisa del punto M, considerando el orígen en A, es la AP; considerando el orígen en B, es BP, etc., y las abscisas del mismo punto son BP, B'P.

88. Toda línea mAM tirada por el centro, y que termina con sus estremos en el perímetro de la elipse, se llama *diámetro*, y *todos los diámetros están divididos en el centro en dos partes iguales.*

Porque si á derecha é izquierda del punto de orígen A, se toman las abscisas AP, Ap iguales, la ecuacion de la curva dará iguales las ordenadas MP, mp; luego si unimos los puntos M, m, con el centro A, los triángulos Amp, AMP, serán iguales (I, 260), y darán mA=MA, y los ángulos mAp=MAP; y añadiendo MAp, sera mAp+pAM=MAP+pAM=π; por lo que (I, 256) las dos rectas mA, MA, no formarán sino una sola y misma línea, la cual será un diámetro, y quedará dividido en dos partes iguales en A.

89. Si desde el centro A (fig. 51) con un radio AB=a, se describe una circunferencia de círculo, y consideramos que la abscisa x es comun para la elipse y el círculo, la ecuacion de este será (§ 77) $Z^2=a^2-x^2$;

y la de la elipse será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$;

y poniendo en vez de a^2-x^2 su valor Z^2, se tendrá en general $z=\frac{b}{a}\times Z$;

y segun sea $b<$ ó $>a$, así será $z<$ ó $>Z$;

por consiguiente, si desde el centro de la elipse y con los semiejes, se describen dos circunferencias de círculo, la elipse comprenderá á la mas pequeña, y estará comprendida por la mayor.

De aquí se sigue, que *el primer eje de la elipse es mayor que todos los diámetros, y el segundo menor.*

90. Si en virtud de la relacion precedente, se quieren encontrar las coordenadas de la elipse, cuando se conocen las del círculo descrito sobre uno de sus ejes, basta disminuir ó aumentar estas últimas en la relacion de b á a. Esta propiedad nos va á servir para *describir una elipse por puntos, cuando se conocen los dos ejes.*

Desde el punto A como centro, y con los radios AB, AC, iguales á los dos semiejes a y b, se describirán dos circunferencias de círculo; despues se tirará un radio cualquiera ANM; se bajará desde el punto M una perpendicular MP sobre el eje BB'; y tirando despues NQ paralela á AB', el punto Q lo será de la elipse; porque los triángulos semejantes AMP, NMQ, dan

$$\mathrm{AM}:\mathrm{AN}::\mathrm{MP}:\mathrm{QP}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AM}}\times\mathrm{MP}=\frac{b}{a}\times\mathrm{MP}.$$

Haciendo lo mismo para cada punto, se tendrá (89) construida la elipse.

91. Se llaman *focos* de la elipse á los puntos F, F' (fig. 52) situados sobre el eje BB', y tales que la doble ordenada que corresponde á ellos, es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$ del eje mayor.

Para determinarlos, en la ecuacion de la elipse

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ \text{se hará}\ z=\frac{b^2}{a},$$

lo que dará $\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, ó dividiendo por $\frac{b^2}{a^2}$,

será $b^2=a^2-x^2$, de donde $x^2=a^2-b^2$;

y representando por c el valor conocido que resulta para x, tendrémos $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm c$.

Para construir estos valores de x, desde el estremo del eje menor como centro, con un radio igual al semieje mayor (16, esc. 2º), se describirá una circunferencia de círculo, y los puntos F, F', en que encuentre al eje BB' serán los focos; porque el triángulo ACF da

$AF=\sqrt{CF^2-CA^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.

92. La distancia AF del centro á los focos, que hemos señalado por c, se llama *escentricidad* de la elipse, y las dos rectas FM, F'M, que desde un punto cualquiera M se tiran á los focos, se llaman *radios vectores*.

Para hallar los valores de estos, considerarémos los triángulos rectángulos FPM, F'PM, que dan, el primero $FM^2=PM^2+FP^2=z^2+(c+x)^2$; poniendo en vez de z^2 su valor (N, 84), y a^2-b^2 en vez de c^2, reduciendo el entero á la especie del quebrado y simplificando, tendrémos

$$FM^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+(c^2=a^2-b^2)+2cx+x^2=$$

$$\frac{a^2b^2-b^2x^2+a^4-a^2b^2+2a^2cx+a^2x^2}{a^2}=$$

$$\frac{a^4+2a^2cx+((a^2-b^2)=c^2)x^2}{a^2}=\left(\frac{a^2+cx^2}{a}\right);$$

lo que da $FM=a+\frac{cx}{a}$;

del mismo modo, considerando el segundo, se halla

$$F'M=a-\frac{cx}{a}.$$

Sumando estas dos espresiones, resulta $FM+F'M=2a$, cuya ecuacion nos dice, que *la suma de los radios vectores tirados á un mismo punto de la elipse es igual con el eje mayor.*

93. De aquí resulta un nuevo método para describir una elipse, cuando se conoce su eje mayor BB' y la posicion de los focos F, F'; para esto, se tomará desde el punto B una longitud cualquiera BK sobre el eje BB'; desde el punto F como centro con un radio FM=BK, se describirá un arco de círculo; desde el punto F' como centro y con un radio F'M=B'K, se describirá otro arco de círculo; su punto de interseccion M corresponderá á la elipse; y procediendo del mismo modo, se tendrán los puntos que se deseen.

Esc. Es ventajoso describir los arcos de círculo á un mismo tiempo por la parte de arriba y por la de abajo del eje; pues por este medio se encuentran á cada operacion dos puntos de la elipse.

94. Si se dan conocidos los dos ejes, se determinan los focos (91), y despues se procede á la construccion; pero si la elipse ha de ser muy grande, *se fijan en los focos los estremos de un hilo, igual en longitud al eje mayor, y estirándole bien por medio de un punzon ó de un lapicero, se hace girar este, y va describiendo la elipse por un movimiento continuo.*

Esc. Reciprocamente, partiendo de la propiedad de ser la suma de los radios vectores igual al eje mayor, se puede deducir la ecuacion de la elipse y todas sus propiedades.

95. Ya se sabe (I, 297 y 441) lo que en general se llama *tangente;* pero en las secciones cónicas, se llama en particular tangente á la parte MT de la tangente tT, comprendida entre el punto de contacto M, y el punto T en que corta al eje de las abscisas; y se llama *subtangente* á la parte PT del eje de las abscisas, comprendida entre el punto T y el P, pie de la ordenada correspondiente al punto de contacto. Se llama *normal* á la línea MN perpendicular á la tangente en el punto de contacto; y *subnormal,* es la parte PN interceptada por la normal y la ordenada PM del punto de contacto. De dos diámetros Mm, M'm' (fig. 55) se dice que son *conjugados,* cuando el uno M'm' es paralelo á la tangente que pasa por el estremo del otro.

Esc. Se puede deducir una ecuacion de la curva referida á sus diámetros; y tambien se podrian hallar espresiones

analíticas de las líneas que hemos dicho antes; pero esto último lo dejamos para otro lugar.

De la parábola.

96. Cortando un cono recto con un plano paralelo á una de las generatrices, ha resultado una curva infinita, que hemos llamado *parábola,* y hemos obtenido (71, 3°) para su ecuacion $z^2=4cx\times\text{sen.}\frac{1}{2}\beta^2$;
y haciendo la cantidad constante $4c\text{sen.}\frac{1}{2}\beta^2=p$,
la ecuacion de la parábola será $z^2=px$.

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, hagamos $z=0$ y resultará $x=0$;
es decir, que esto tiene lugar en un solo punto, que es el orígen de las coordenadas.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que corte al eje de las z; y como esta suposicion da $z=0$, manifiesta que esto no se verifica sino en el orígen. Así, la curva no tiene mas de un punto comun con el eje de las x y de las z, que es el orígen de las coordenadas.

97. Resolviendo su ecuacion con relacion á z, sale

$$z=\pm\sqrt{px}.$$

Estos dos valores iguales y de signo contrario, manifiestan que *la curva se estiende igualmente por la parte superior é inferior del eje de las* X.

98. Para todos los valores negativos de x resulta z imaginaria, pues que p es una cantidad positiva; luego la curva no se estiende por el lado de las abscisas negativas, y está limitada en este sentido por el eje de las z.

Y como los valores de z son tanto mayores, cuanto mayor es x, la curva se estiende indefinidamente por este lado del eje de las x, y tiene la forma mAM que representa la (fig. 54).

99. Como por la ecuacion precedente, la relacion del cuadrado de la ordenada á la abscisa es la misma para todos los puntos de la curva, respecto de otras coordenadas X, Z, se tendrá $Z^2=pX$,
lo que da $Z^2:z^2::pX:px::X:x$;
cuya proporcion manifiesta que *en la parábola los cuadrados de las ordenadas son entre sí como las abscisas correspondientes.*

La línea indefinida AX se llama el *eje* de la parábola, y A es su vértice.

100. Para describir la parábola, se tomará sobre el eje de las x, partiendo del orígen, una distancia AB, igual con p que se llama *parámetro* de la parábola. Despues haciendo centro en un punto cualquiera C, tomado en el mismo eje, y con un radio igual á CB, se describirá una circunferencia de círculo. En el punto P estremo de su diámetro se elevará la perpendicular PM, y en ella se tomará una parte MP=QA, con lo que se tendrá el punto M, que corresponderá á la parábola.

En efecto, por esta construccion se tiene (I. § 333) $AQ^2=AB\times AP$, de donde $PM^2=AQ^2=p\times AP=px$; tomando la Pm=PM, se tendrá el punto m por la parte inferior; y del mismo modo se construirán cuantos puntos se necesiten. Esta parábola se suele llamar la *vulgar* ó *apoloniana.*

101. Se llama *foco* de la parábola á un punto F (fig. 55) situado sobre el eje de las x, tal que la doble ordenada que le corresponde, es igual con el parámetro de la curva.

Para determinarle, se hará $z=\frac{1}{2}p$ en la ecuacion de la parábola, lo que da $\frac{1}{4}p^2=px$, de donde $x=\frac{1}{4}p$; que espresa la abscisa pedida. Así, en la parábola *la distancia del foco al vértice* A *de la curva, es igual á la cuarta parte del parámetro.*

102. Si se busca la distancia FM de un punto cualquiera de la parábola al foco, se tendrá

$$FM^2=PM^2+FP^2=z^2+(x-\tfrac{1}{4}p)^2=$$
$$px+x^2-\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2=x^2+\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2=(x+\tfrac{1}{4}p)^2;$$

que estrayendo la raiz cuadrada sale $FM=x+\frac{1}{4}p$.

Luego la distancia de un punto cualquiera de la parábola al foco, es igual á la abscisa de este punto, mas la distancia del foco al vértice de la curva. Por consiguiente, si se toma á la izquierda de A una magnitud $BA=\frac{1}{4}p$, y por B se concibe la BL perpendicular al eje AX, como toda línea ML, tirada desde un punto cualquiera de la curva, será igual con su paralela

$PB=AP+BA=x+\frac{1}{4}p$, tendrémos que *los puntos de la parábola están á igual distancia del foco que de una línea* BL *tirada perpendicularmente á su eje, y á una distancia del vértice igual* $\frac{1}{4}p$, cuya línea se llama *directriz.*

103. De aquí resulta un medio de trazar la parábola cuando es conocido el parámetro p. Para esto, de una y otra parte del punto A se tomarán en el eje AX las longitudes $AB=AF=\frac{1}{4}p$, y el punto F será su foco. Por un punto cualquiera P del eje se levantará una perpendicular indefinida PM; despues tomando la distancia BP, desde el punto F como centro y con esta distancia por radio, se describirá un arco de círculo que corte á la recta PM en dos puntos M, m, los cuales corresponderán á la parábola. Porque de este modo resulta

$$FM=AP+AB=x+\frac{1}{4}p.$$

104. Tambien se puede en virtud de la misma propiedad describir la parábola por un movimiento continuo.

Para esto se ajusta á la directriz BL una escuadra móvil EQR (fig. 56); despues, tomando un hilo de una longitud igual á QE, se fijará uno de sus estremos en E, y el otro en el foco F de la parábola; se estenderá despues el hilo por medio de un punzon ó lapicero que se tendrá siempre bien unido al canto QE; y haciendo andar la escuadra á lo largo de la directriz; el punzon ó lapicero girará á lo largo de QE y describirá la parábola.

En efecto, como el hilo es igual con la longitud de la regla QE, se tendrá $FM+ME=QM+ME$, que quitando la parte comun ME, da $QM=MF$.

105. En la parábola, como en la elipse, se llama *tangente* á la MT (fig. 57), *subtangente* á la PT, *normal* á la MN, *subnormal* á la PN, y *diámetro* es toda línea ME paralela al eje de la parábola.

De la hipérbola.

106. Cortando un cono cuyo ángulo β de las generatrices, junto con la inclinacion α del plano secante, sean mayores que π, hemos obtenido una curva ilimitada por ambos lados del vértice del cono; la hemos llamado hipérbola, y nos resultó (72) para su ecuacion

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\left(\frac{c\,\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}x+x^2\right);$$

y como en este caso $\frac{c\,\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}$ es igual á la línea AO′ (fig. 46) ó á la BB′ (fig. 58), representando esta por $2a$, la ecuacion (P) de la hipérbola será

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax+x^2)\ (A).$$

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, harémos $z=0$, lo que da $x=0$, y $x=-2a$; es decir, que esto se verifica en dos puntos diferentes B, B′, de los cuales el uno es el mismo orígen de las coordenadas, y el otro está situado del lado de las abscisas negativas á una distancia $2a$ del mismo orígen.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que la curva corta al eje de las z, cuya suposicion da $z=0$; es decir, que esto solo se verifica en el orígen de las coordenadas.

107. Resolviendo la ecuacion con relacion á z, se tendrá

$$z=\pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax+x^2)};$$

que manifiesta que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales y de signo contrario, ó lo que es lo mismo, que la curva se estiende igualmente hácia uno y otro lado

del eje de las x. En esta ecuacion se ve que cuanto mayor sea x positiva, tanto mayor será el valor de z, y por consiguiente la *rama* MB*m se estiende al infinito*. Si se hace negativa la x, se convertirá la ecuacion en

$$z=\pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(x^2-2ax)}\,;$$

valor imaginario, mientras sea $x<2a$; nulo cuando $x=2a$; y real y cada vez mayor, conforme va siendo la x negativa mayor que $2a$; es decir, que desde el punto B' á la izquierda, la curva M'B'm' se estiende tambien al infinito. Si buscamos la ordenada correspondiente á $x=a$, se obtendrá

$$z=\pm\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{-\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}=(\text{I. §}\,136)$$

$$\pm\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}\times\sqrt{-1}=\pm b\sqrt{-1},$$

(llamando b la parte real $\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}$),

que elevando al cuadrado este valor será

$b^2=\frac{a^2}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\times\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)$, que da $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}$;

luego sustituyendo en vez de este segundo miembro el primero en la ecuacion (A, 106) de la hipérbola, se convertirá en $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$ (B).

108. La línea BB'$=2a$ se llama *eje primero* de la hipérbola, y la línea $bb'=2b$, se llama el *segundo eje*; y el punto A en que se cruzan los ejes, se llama *centro*.

109. Si trasladamos el orígen al centro A, representamos por x' la abscisa AP=AB+BP$=a+x$ (que da $x=x'-a$, y sustituimos este valor en la ecuacion

(B, 107) se tendrá $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2a(x'-a)+(x'-a)^2)=$

$$\frac{b^2}{a^2}(2ax'-2a^2+x'^2-2ax'+a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2),$$

ó suprimiendo el acento será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ (C),

que es la *ecuacion de la hipérbola referida á sus ejes y á su centro*.

110. Se llama *parámetro* de un eje á una tercera proporcional á dicho eje y al otro, así, llamando p el parámetro del eje primero, se tendrá

$$2a:2b::2b:p=\frac{2b^2}{a},$$

que dividiendo por $2a$ sale $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$,

cuyo valor sustituido en las ecuaciones anteriores (B), (C), las convertirá en

$$z^2=\frac{p}{2a}(2ax+x^2)\ (\text{D}),\quad z^2=\frac{p}{2a}(x^2-a^2)\ (\text{E}),$$

que son las ecuaciones de la hipérbola con relacion al parámetro.

111. Si consideramos dos puntos cuyas coordenadas sean x, z, x', z', tendrémos

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad z'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2),$$

que formando proporcion y simplificando será

$z^2:z'^2::x^2-a^2:x'^2-a^2::(x+a)(x-a):(x'+a)(x'-a)$;

que manifiesta que *los cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las abscisas*, llamándose aquí *abscisas* las distancias BP, B'P, del pie de la ordenada á los dos vértices B, B' de la curva.

112. Toda línea MM', que pasa por el centro y termina en la curva, se llama *diámetro*; y se demuestra del mismo modo que en la elipse, que *todos los diámetros están divididos en el centro en dos partes iguales*.

113. Es muy importante observar que la ecuacion de la hipérbola cuando se toma el orígen en el centro, y todas sus

propiedades, son las mismas que las de la elipse, mudando, en la ecuacion de esta, b en

$b\sqrt{-1}$, ó b^2 en $-b^2$.

114. Si suponemos $b=a$, la ecuacion de la hipérbola será $z^2=x^2-a^2$,

en cuyo caso se llama hipérbola *equilátera.*

115. Los *focos* de la hipérbola son los puntos F, F' (fig. 59) situados en la prolongacion del eje BB', tales que la doble ordenada que les corresponde, es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$.

Para determinarlos, harémos $z=\frac{b^2}{a}$ en la ecuacion

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2), \text{ lo que da } \frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

que dividiendo ambos miembros por $\frac{b}{a^2}$ se reduce á

$b^2=x^2-a^2$, ó $x^2=a^2+b^2$, que da $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$;

valor que se construye del modo siguiente:

En uno de los estremos del primer eje se eleva una perpendicular BE igual al semieje segundo. Desde el centro A con el radio AE, se describirá una circunferencia de círculo que cortará al eje de las abscisas en dos puntos F, F', que serán los focos de la hipérbola; porque

$$AF=AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

116. Si desde el punto M de la hipérbola se tiran los radios vectores FM, F'M, á los focos, y se hace

$$\sqrt{a^2+b^2}=c,$$

se tendrá $FM^2=MP^2+FP^2=MP^2+(AP-AF)^2=$

$$z^2+(x-c)^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)+x^2-2cx+c^2;$$

de donde se saca de un modo análogo al espuesto (91) para la elipse, $FM=\frac{cx}{a}-a$, y $F'M=\frac{cx}{a}+a$;

y restando estos valores tendrémos $F'M-FM=2a$, es decir, que *en la hipérbola la diferencia de los radios vectores tirados á un mismo punto, es igual al eje primero.*

117. Esta propiedad da una construccion para la hipérbola, análoga á la que hemos hallado para construir la elipse, y es la siguiente.

Desde el foco F, como centro, con un radio cualquiera BO, se describirá un arco de círculo; desde el otro foco F', como centro, con un radio $B'O=BB'+BO$, se describirá otro arco de círculo, y los puntos como el M en que corte al precedente, pertenecerán á la hipérbola; porque segun esta construccion siempre se tendrá

$$F'M-FM=BB'=2a.$$

Señalando el punto correspondiente por la parte inferior, y haciendo lo mismo al otro lado del orígen, se tendrá la segunda rama de la curva.

118. En virtud de la misma propiedad se puede describir tambien la hipérbola por un movimiento continuo.

Para esto, se fija en el foco F' una regla F'M que pueda girar al rededor de este punto. Al estremo Q y en el otro foco F está fijo un hilo FMQ tal que

$F'MQ-FMQ=BB'$, que quitando la parte comun QM hace que $F'M-FM=BB'$; haciendo girar despues un punzon ó lapicero á lo largo del hilo, se le obliga á aplicarse siempre contra la regla que gira al rededor del punto F', y el punzon ó lapicero por este procedimiento describe la hipérbola que se quiere.

119. La hipérbola, como la elipse, tiene *diámetros conjugados,* tiene *tangente, subtangente, normal* y *subnormal*; y ademas se pueden tirar por el centro unas líneas tales como AL, AL' (fig. 60) que aunque continuamente se van acercando á la curva, jamas la llegan á encontrar; por cuya razon dichas líneas AL, AL', se llaman *asíntotas.*