DEL CALCULO DE LAS DIFERENCIAS.

138. Vamos ahora á determinar el incremento ó decremento que sobreviene á una funcion, cuando crece ó mengua la variable de que depende; y para fijar las idéas, observarémos que si una variable x aumenta ó disminuye, y se llega á convertir en $x \pm k$, la cantidad indeterminada k, que es la que ha causado su aumento ó diminucion, se llama el *incremento*, la *diferencia finita*, ó simplemente la *diferencia* de x. Del mismo modo, si variando z llega á ser $z \pm h$, la cantidad indeterminada h se llama la *diferencia* de z; cuyas diferencias serán positivas ó negativas, segun x y z hayan aumentado ó disminuido. Pero como muchas veces se ofrece considerar en una misma cuestion las diferencias de muchas variables y de sus funciones, á fin de espresarlas con uniformidad, y saber el origen x ó z de dichas diferencias, se hace uso de un signo general Δ, que es la delta griega, anteponiéndola á la variable cuya diferencia se quiere espresar; así, en lugar de $\pm k$ se escribe $\pm \Delta x$, y $\pm \Delta z$ en lugar de $\pm h$, y se leen *diferencia* x, *diferencia* z.

Las varias potencias $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ $(\Delta x)^4$, etc., de la diferencia de una variable x, se espresan por Δx^2, Δx^3, Δx^4, etc.; y para que estas espresiones no se tomen por las diferencias respectivas de x^2, x^3, x^4, etc., se denotan estas por

$\Delta.x^2$, $\Delta.x^3$, $\Delta.x^4$, etc.

139. Entendido esto, pasemos á resolver este problema.

Dada la diferencia de una variable, hallar la de la funcion.

Res. y Dem. Sustitúyase en la funcion en vez de la variable, la variable mas ó menos su diferencia; de esto réstese la funcion primitiva, y se tendrá la diferencia de dicha funcion.

En efecto, sea $z = \text{f}.x$; si en vez de x sustituimos $x \pm \Delta x$, la funcion z variará y se convertirá en z'; luego se tendrá $z' = \text{f}.(x \pm \Delta x)$;

y si de esta ecuacion restamos la primera, hallarémos el incremento de dicha funcion, que será

$$z' - z = \text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x;$$

pero como z, al variar x, ha padecido por precision un incremento ó decremento, resulta que z' será igual á $z + \Delta z$; luego el primer miembro se convertirá en

$$z' - z = z + \Delta z - z = \Delta z;$$

por lo cual tendrémos $\Delta z = \text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x$, ó poniendo $\text{f}.x$ en vez de z, será $\Delta \text{f}.x = \text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x$ (M).

140. Si una constante afecta á una funcion por vía de suma ó de resta, desaparecerá de la diferencia; porque si fuese $z = \text{f}.x \pm a$, como las cantidades constantes no aumentan ni disminuyen en un mismo cálculo, se tendrá $z' = \text{f}.(x \pm \Delta x) \pm a$, de donde

$$\Delta z = z' - z = \text{f}.(x \pm \Delta x) \pm a - \text{f}.x \mp a = \text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x,$$

porque $\pm a$ y $\mp a$ quedan destruidas.

Si la constante afecta á la funcion por vía de multiplicacion ó division, esta constante afectará del mismo modo á su diferencia; porque si se tiene

$$z = \frac{a}{b}\,\text{f}.x, \text{ será } z' = \frac{a}{b}\,\text{f}.(x \pm \Delta x),$$

$$\text{y } \Delta z = z' - z = \frac{a}{b}\,\text{f}.(x \pm \Delta x) - \frac{a}{b}\,\text{f}.x =$$

$$\frac{a}{b}(\text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x) = \frac{a}{b}\Delta \text{f}.x.$$

Ahora, dividiendo la ecuacion (M) por Δx, será

$$\frac{\Delta \text{f}.x}{\Delta x} = \frac{\text{f}.(x \pm \Delta x) - \text{f}.x}{\Delta x} \text{(N)},$$

que espresa *la relacion que tiene la diferencia de la funcion con la de la variable.*

141. Cuando se tienen muchas funciones enlazadas por vía de suma ó resta, la diferencia total es igual al conjunto de las diferencias de cada funcion componente.

Porque si tenemos $z = \text{f}.x + \text{F}.x - \varphi.x$,

será $z'=\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)+\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)$,

y $z'-z=\Delta z=$

$\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)+\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)-\mathrm{f}.x-\mathrm{F}.x+\varphi.x$;

pero $\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)-\mathrm{f}.x=\Delta\mathrm{f}.x$, $\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\mathrm{F}.x=\Delta\mathrm{F}.x$,

y $-\varphi.(x\pm\Delta x)+\varphi.x=-(\varphi.(x\pm\Delta x)-\varphi.x)=-\Delta\varphi.x$;

luego se tendrá $\Delta z=\Delta\mathrm{f}.x+\Delta\mathrm{F}.x-\Delta\varphi.x$.

142. Como el Cálculo Diferencial, que pronto darémos á conocer, nos suministra un método general y sencillo para hallar la diferencia de una funcion, no resolverémos aqui sino el ejemplo siguiente.

Sea $z=ax^3+bx+c$, y se tendrá

$z'=a(x\pm\Delta x)^3+b(x\pm\Delta x)+c=$

$ax^3\pm3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3+bx\pm b\Delta x+c$;

luego $\Delta z=z'-z=ax^3\pm3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3+$ $bx\pm b\Delta x+c-ax^3-bx-c=\pm3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm$ $a\Delta x^3\pm b\Delta x=\pm(3ax^2+b)\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3$;

ó considerando solo el signo $+$, que es lo que harémos de aquí en adelante, será

$$\Delta z=(3ax^2+b)\Delta x+3ax\Delta x^2+a\Delta x^3.$$

143. Pasemos ya á las funciones de dos variables independientes, y sea $z=\mathrm{f}.(x, u)$; donde vemos que z puede variar por tres causas: 1ª por la variacion sola de x, cuando se trasforma en $x+\Delta x$; 2ª porque u sola sea la que varíe, y se convierta en $u+\Delta u$; 3ª variando ambas x y u. En el primero y segundo caso las diferencias que resultan de z se llaman *diferencias parciales* y se espresan respectivamente por

$\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, $\frac{\Delta z}{\Delta u}\Delta u$ ó por $\Delta_x z$, $\Delta_u z$; en el tercer caso resultará la diferencia Δz que se llama diferencia *total*, ó simplemente la diferencia de la funcion.

Como en los dos primeros casos solo varía en la funcion z una de las cantidades x ó u, su diferencia se hallará en virtud del problema antecedente; y por lo que toca al tercero,

llamando z' á la funcion $\mathrm{f}.(x+\Delta x, u+\Delta u)$ que resulta sustituyendo $x+\Delta x$ por x, y $u+\Delta u$ por u, la diferencia de z ó Δz será

$$z'-z=\mathrm{f}.(x+\Delta x, u+\Delta u)-\mathrm{f}.(x, u).$$

Del mismo modo tendríamos, que si fuese

$z=\mathrm{f}.(x, u, r, t)$, resultaría

$\Delta z=\mathrm{f}.(x+\Delta x, u+\Delta u, r+\Delta r, t+\Delta t)-\mathrm{f}.(x, u, r, t)$.

144. Si entre las variables hubiese una relacion espresada por $\mathrm{V}=\mathrm{f}.(x,z)=0$, en este caso x sería funcion de z, y recíprocamente z funcion de x; de donde se sigue que si x varía y se trasforma en $x+\Delta x$, la z variará necesariamente y se convertirá en $z+\Delta z$; y estos nuevos valores de x y de z, deberán necesariamente satisfacer á la ecuacion

$$\mathrm{V}=\mathrm{f}.(x,z)=0,$$

y tendrémos $\mathrm{V}'=\mathrm{f}.(x+\Delta x, z+\Delta z)=0$;

luego $\mathrm{V}'-\mathrm{V}=\Delta\mathrm{V}=\mathrm{f}.(x+\Delta x, z+\Delta z)-\mathrm{f}.(x,z)=0$,

ó $\Delta\mathrm{V}=0$;

cuya ecuacion espresa la relacion entre Δx y Δz; de donde inferimos que esta relacion se hallará tomando la diferencia de V como si las variables x y z fuesen independientes, y haciendo luego $\Delta\mathrm{V}=0$.

145. El mismo método se seguirá en las funciones de mas variables; y así pasarémos á las diferencias de un órden superior.

Con la mira de dar á conocer como se originan estas diferencias, supondrémos que haciendo variar sucesivamente una funcion de una ó mas variables, que llamarémos z, sean z', z'', z''', z^{iv}, *etc.*, los valores consecutivos de z cuando aumenta; y ${}'z$ ${}''z$, ${}'''z$, ${}^{\text{iv}}z$, *etc.*, cuando disminuye; de manera que

$$etc.\ {}^{\text{iv}}z,\ {}'''z,\ {}''z,\ {}'z,\ z,\ z',\ z'',\ z''',\ z^{\text{iv}},\ etc.$$

forme una serie de términos sucesivos.

En virtud de esta consideracion y de lo espuesto (139) tendrémos $z'-z=\Delta z$; $z''-z'=\Delta z'$;

$z'''-z''=\Delta z''$; $z^{iv}-z'''=\Delta z'''$, *etc.*; $z-{}'z=\Delta' z$;
${}'z-{}''z=\Delta'' z$; ${}''z-{}'''z=\Delta''' z$; ${}'''z-{}^{iv}z=\Delta^{iv} z$, *etc.*

Ahora, $\Delta z'-\Delta z$ será por la misma razon la diferencia de Δz, y se tendrá $\Delta z'-\Delta z=\Delta.\Delta z$.

La diferencia de la diferencia de una funcion z de una ó muchas variables, se llama *diferencia segunda* de z, y se representa por $\Delta^2 z$, cuya espresion no se debe confundir con ninguna de estas $\Delta.z^2$, Δz^2; pues $\Delta.z^2$ indica la diferencia del cuadrado de z, la Δz^2 indica el cuadrado de la diferencia, y $\Delta^2 z$ indica, como acabamos de decir, la diferencia de la diferencia de z.

Por consiguiente tendrémos

$$\Delta z'-\Delta z=\Delta^2 z\ ,\ \text{ó}\ \Delta z'=\Delta z+\Delta^2 z;$$
$$\Delta z''-\Delta z'=\Delta^2 z'\ ,\ \text{ó}\ \Delta z''=\Delta z'+\Delta^2 z';$$
$$\Delta z'''-\Delta z''=\Delta^2 z''\ ,\ \text{ó}\ \Delta z'''=\Delta z''+\Delta^2 z'';$$
$$\Delta z^{iv}-\Delta z'''=\Delta^2 z'''\ ,\ \text{ó}\ \Delta z^{iv}=\Delta z'''+\Delta^2 z''';$$
etc. *etc.*

$$\Delta z-\Delta' z=\Delta^{2'} z\ ,\ \text{ó}\ \Delta z=\Delta' z+\Delta^{2'} z;$$
$$\Delta' z-\Delta'' z=\Delta^{2''} z,\ \text{ó}\ \Delta' z=\Delta'' z+\Delta^{2''} z;$$
$$\Delta'' z-\Delta''' z=\Delta^{2'''} z,\ \text{ó}\ \Delta'' z=\Delta''' z+\Delta^{2'''} z;$$
etc. *etc.*

La diferencia segunda de la diferencia de z se llama la diferencia *tercera* de z, y se denota por $\Delta^3 z$, y en general la diferencia n por $\Delta^n z$.

146. Si z fuese funcion de una sola variable x, hallaríamos z' sustituyendo $x'=x+\Delta x$ en lugar de x; $\Delta z'$, sustituyendo $x'=x+\Delta x$ en vez de x en Δz,
y $\Delta x'=\Delta(x+\Delta x)=\Delta x+\Delta^2 x$ por Δx,
y $\Delta^2 x'=\Delta^2(x+\Delta x)=\Delta^2 x+\Delta^3 x$, por $\Delta^2 x$, *etc.*

147. Si en una funcion z de dos variables independientes x y u, sustituimos $x+\Delta x$ en lugar de x, y $u+\Delta u$ en vez de u, resultará z'; sustituyendo $x+\Delta x$ por x en Δz, $u+\Delta u$ por u, $\Delta x+\Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta u+\Delta^2 u$ por Δu, resultará $\Delta z'$; si sustituimos $x+\Delta x$ en vez de x en $\Delta^2 z$, $u+\Delta u$ en vez de u, $\Delta x+\Delta^2 x$ en lugar de Δx, $\Delta u+\Delta^2 u$ en lugar de Δu,

$\Delta^2 x+\Delta^3 x$ en lugar de $\Delta^2 x$, y $\Delta^2 u+\Delta^3 u$ en vez de $\Delta^2 u$, resultará $\Delta^2 z'$, y así en adelante.

Con la mira de simplificar los cálculos se suele suponer que una de las cantidades variables varía uniformemente, ó lo que es lo mismo, que su diferencia primera es constante; y esta sirve de término de comparacion al cual se refieren las diferencias de las demas cantidades.

Nosotros supondrémos Δx constante, y nos propondrémos hallar las diferencias segunda, tercera, etc., de una funcion cualquiera de x.

148. Sea $z=ax^2$,
y tendrémos $z'=a(x+\Delta x)^2=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2$;
la que dará $\Delta z=z'-z=2ax\Delta x+a\Delta x^2$.

Sustituyendo $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá
$\Delta z'=2a(x+\Delta x)\Delta x+a\Delta x^2=2ax\Delta x+2a\Delta x^2+a\Delta x^2$;
lo que dará $\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=2a\Delta x^2$.

Esta segunda diferencia es constante, y de consiguiente la tercera será cero. Este ejemplo, aunque sencillo, manifiesta el método que se deberá seguir para hallar las diferencias sucesivas, si las tuviese la funcion, y aun cuando esta fuese de dos variables.

DEL CALCULO DIFERENCIAL.

149. Hemos visto (140) el modo de hallar la relacion de la diferencia ó incremento de la funcion con la diferencia ó incremento de la variable; y ahora debemos advertir que entre la funcion primitiva y el límite de esta relacion, hay una dependencia que determina la una cantidad por medio de la otra; y todos los recursos que la Análisis indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, se hallan comprendidos en el tratado que se conoce en general con el nombre de *Cálculo Infinitesimal*.