$z'''-z''=\Delta z''$; $z^{iv}-z'''=\Delta z'''$, *etc.*; $z-{}'z=\Delta' z$;
${}'z-{}''z=\Delta'' z$; ${}''z-{}'''z=\Delta''' z$; ${}'''z-{}^{iv}z=\Delta^{iv} z$, *etc.*

Ahora, $\Delta z'-\Delta z$ será por la misma razon la diferencia de Δz, y se tendrá $\Delta z'-\Delta z=\Delta.\Delta z$.

La diferencia de la diferencia de una funcion z de una ó muchas variables, se llama *diferencia segunda* de z, y se representa por $\Delta^2 z$, cuya espresion no se debe confundir con ninguna de estas $\Delta.z^2$, Δz^2; pues $\Delta.z^2$ indica la diferencia del cuadrado de z, la Δz^2 indica el cuadrado de la diferencia, y $\Delta^2 z$ indica, como acabamos de decir, la diferencia de la diferencia de z.

Por consiguiente tendrémos

$$\Delta z'-\Delta z=\Delta^2 z\ ,\ \text{ó}\ \Delta z'=\Delta z+\Delta^2 z;$$
$$\Delta z''-\Delta z'=\Delta^2 z'\ ,\ \text{ó}\ \Delta z''=\Delta z'+\Delta^2 z';$$
$$\Delta z'''-\Delta z''=\Delta^2 z''\ ,\ \text{ó}\ \Delta z'''=\Delta z''+\Delta^2 z'';$$
$$\Delta z^{iv}-\Delta z'''=\Delta^2 z'''\ ,\ \text{ó}\ \Delta z^{iv}=\Delta z'''+\Delta^2 z''';$$
etc. *etc.*

$$\Delta z-\Delta' z=\Delta^{2'} z\ ,\ \text{ó}\ \Delta z=\Delta' z+\Delta^{2'} z;$$
$$\Delta' z-\Delta'' z=\Delta^{2''} z,\ \text{ó}\ \Delta' z=\Delta'' z+\Delta^{2''} z;$$
$$\Delta'' z-\Delta''' z=\Delta^{2'''} z,\ \text{ó}\ \Delta'' z=\Delta''' z+\Delta^{2'''} z;$$
etc. *etc.*

La diferencia segunda de la diferencia de z se llama la diferencia *tercera* de z, y se denota por $\Delta^3 z$, y en general la diferencia n por $\Delta^n z$.

146. Si z fuese funcion de una sola variable x, hallaríamos z' sustituyendo $x'=x+\Delta x$ en lugar de x; $\Delta z'$, sustituyendo $x'=x+\Delta x$ en vez de x en Δz,
y $\Delta x'=\Delta(x+\Delta x)=\Delta x+\Delta^2 x$ por Δx,
y $\Delta^2 x'=\Delta^2(x+\Delta x)=\Delta^2 x+\Delta^3 x$, por $\Delta^2 x$, *etc.*

147. Si en una funcion z de dos variables independientes x y u, sustituimos $x+\Delta x$ en lugar de x, y $u+\Delta u$ en vez de u, resultará z'; sustituyendo $x+\Delta x$ por x en Δz, $u+\Delta u$ por u, $\Delta x+\Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta u+\Delta^2 u$ por Δu, resultará $\Delta z'$; si sustituimos $x+\Delta x$ en vez de x en $\Delta^2 z$, $u+\Delta u$ en vez de u, $\Delta x+\Delta^2 x$ en lugar de Δx, $\Delta u+\Delta^2 u$ en lugar de Δu,

$\Delta^2 x+\Delta^3 x$ en lugar de $\Delta^2 x$, y $\Delta^2 u+\Delta^3 u$ en vez de $\Delta^2 u$, resultará $\Delta^2 z'$, y así en adelante.

Con la mira de simplificar los cálculos se suele suponer que una de las cantidades variables varía uniformemente, ó lo que es lo mismo, que su diferencia primera es constante; y esta sirve de término de comparacion al cual se refieren las diferencias de las demas cantidades.

Nosotros supondrémos Δx constante, y nos propondrémos hallar las diferencias segunda, tercera, etc., de una funcion cualquiera de x.

148. Sea $z=ax^2$,
y tendrémos $z'=a(x+\Delta x)^2=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2$;
la que dará $\Delta z=z'-z=2ax\Delta x+a\Delta x^2$.

Sustituyendo $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá
$\Delta z'=2a(x+\Delta x)\Delta x+a\Delta x^2=2ax\Delta x+2a\Delta x^2+a\Delta x^2$;
lo que dará $\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=2a\Delta x^2$.

Esta segunda diferencia es constante, y de consiguiente la tercera será cero. Este ejemplo, aunque sencillo, manifiesta el método que se deberá seguir para hallar las diferencias sucesivas, si las tuviese la funcion, y aun cuando esta fuese de dos variables.

DEL CALCULO DIFERENCIAL.

149. Hemos visto (140) el modo de hallar la relacion de la diferencia ó incremento de la funcion con la diferencia ó incremento de la variable; y ahora debemos advertir que entre la funcion primitiva y el límite de esta relacion, hay una dependencia que determina la una cantidad por medio de la otra; y todos los recursos que la Análisis indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, se hallan comprendidos en el tratado que se conoce en general con el nombre de *Cálculo Infinitesimal*.

Este precioso Cálculo tiene dos partes: la primera, que se denomina *Cálculo Diferencial*, trata de hallar, dada la funcion, el límite de la relacion de su incremento con el de la variable ó variables que entran en ella; la segunda trata de determinar la funcion, cuando se da conocido el límite de la relacion de su incremento con el de la variable, y se llama *Cálculo Integral*, que por consiguiente es el inverso del Diferencial. Pero lo maravilloso de este Cálculo es, que *tiene procedimientos directos y sencillos, para, dada una funcion, encontrar desde luego el límite de la relacion del incremento de la funcion con el de la variable, sin necesidad de hallar anticipadamente ni el incremento de la funcion, ni la relacion de este incremento con el de la variable.*

150. Para esponer los principios de este portentoso Cálculo, demostrarémos en primer lugar el siguiente

Teor. *Si siendo* $z=f.x$, *se sustituye* $x+k$ *en vez de* x, *señalando* k *una cantidad cualquiera positiva ó negativa, se convertirá* z *en* z' *y tendrá esta forma*

$$z'=f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+Ek^5+\text{etc.},$$

siendo A, B, C, D, etc., *funciones cualesquiera de* x, *pero independientes de* k.

Este teorema quedará demostrado, si manifestamos que la cantidad k solo se puede hallar con esponente entero y positivo; lo que se conseguirá demostrando que no puede ser el esponente en ningun término ni negativo ni fraccionario; y que ademas debe haber un término independiente de k, que es la funcion primitiva. Para esto, observarémos en primer lugar que si en el desarrollo de una funcion se sustituye en vez de la variable de que depende, un valor particular, debe resultar el mismo valor que daría la funcion ántes de desenvolverse; pues de otro modo no sería la funcion igual con su desarrollo; y como haciendo $k=0, z'=f.(x+k)$ se convierte en $z=f.x$, se sigue que el desarrollo de $z'=f.(x+k)$, cualquiera que sea la forma que tenga, se debe reducir á $z=f.x$ cuando $k=0$; por lo cual se hallará este término en la serie, sin estar afecto de la cantidad k, el cual

dirémos que es el primer término del desarrollo. Ahora, el desarrollo de $f.(x+k)$ no puede tener ningun término de la forma $\frac{M}{k^n}$, ó en que el esponente de k sea negativo; porque entónces cuando k fuese igual con cero, este término sería infinito, y por consiguiente lo sería tambien $f(x+k)$; pero como en este caso se convierte en $f.x$, que no puede ser infinita sino en valores particulares de x, no puede haber ningun término que tenga dicha forma.

Tampoco puede tener esponentes fraccionarios, ó lo que es lo mismo radicales, á menos que no se dén á x valores particulares. Porque los radicales de k no podrán provenir sinó de los radicales comprendidos en $f.x$, y la sustitucion de $x+k$ en vez de x no podrá aumentar ni disminuir el número de ellos, ni mudar su naturaleza mientras que x y k permanezcan indeterminadas. Por otra parte queda espresado (I. 168 esc.), que todo radical tiene tantos valores diferentes, como unidades hay en su esponente; y por lo mismo toda funcion irracional tiene tantos valores diferentes como combinaciones se pueden hacer con los diferentes valores de los radicales que encierra; luego si el desarrollo de la funcion $f.(x+k)$ contuviese un término de la forma

$$M\overline{k^n}^m=M\sqrt[n]{k^m},$$

la funcion $f.x$ sería necesariamente irracional, y tendría por consiguiente un cierto número de valores diferentes, el cual sería el mismo para la funcion $f.(x+k)$ que para su desarrollo. Pero estando este desarrollo representado por la serie

$$f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+\ldots+M\sqrt[n]{k^m}+\text{etc.}$$

cada valor de $f.x$ se combinaría con cada uno de los valores del radical $M\sqrt[n]{k^m}$; de manera que el desarrollo de la funcion $f.(x+k)$ tendría mas valores diferentes que la misma funcion no desenvuelta: lo que es absurdo. Luego tendrá la forma que hemos dicho en el teorema.

151. Si de la ecuacion

$$z'=f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+\text{etc.}$$

se resta la primitiva $z=f.x$, y ponemos Δx en vez de k, se tendrá

$$z'-z=\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\text{etc. (M)},$$

que espresa el incremento ó diferencia de una funcion cuando á la variable le sobreviene el incremento Δx.

152. Dividiendo esta ecuacion por Δx, se tendrá la relacion de los incrementos espresada por

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+D\Delta x^3+\text{etc.}$$

Aquí vemos que la relacion de los incrementos de la funcion y de la variable, se compone de dos partes: la una independiente de dichos incrementos que es A, y la otra que está efecta de Δx, ó que depende del incremento de la variable. Si se supone que Δx vaya disminuyendo, el resultado se aproximará sin cesar á A, sin que jamas pueda serle igual, sinó en el caso de $\Delta x=0$; luego (I. § 232) A es el límite de dicha relacion, y se tendrá lím. de $\frac{\Delta z}{\Delta x}=A$; pero como este límite se saca suponiendo $\Delta x=0$, y en este caso la ecuacion anterior (M) da $\Delta z=0$, el límite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ se convierte en $\frac{0}{0}$: y no se aniquila, puesto que es igual con A; y como esta relacion no nos dice si el 0 de arriba proviene del límite del incremento ó diferencia de la funcion ó del de la variable, es indispensable elegir un signo para espresar el límite 0 de la diferencia ó incremento Δz, y el de la Δx.

Este signo es una d antepuesta á la funcion ó variable; y así, dz espresará el límite de la diferencia de la funcion z, y dx el límite de la diferencia de la variable x; pero es indispensable tener presente que el valor absoluto de dz, dx, y en general de cualquier variable precedida de la característica d,

siempre es *cero*; y solo representa una cantidad cuando está señalada la relacion entre dos de estas espresiones; así, en el ejemplo antecedente, tendrémos $\frac{dz}{dx}=A$; que se lee *diferencial* z *partida diferencial* x *igual* A.

153. Aunque dz, dx, etc., no son cantidades, se pueden ejecutar con estos símbolos las mismas operaciones que con las cantidades mismas.

Para probarlo, en la ecuacion

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\text{etc.}$$

hallarémos la relacion de la diferencia de la variable con la de la funcion, y será

$$\frac{\Delta x}{\Delta z}=\frac{1}{A+B\Delta x+C\Delta x^2+\text{etc.}},$$

cuyo límite es $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{A}$; pero $A=\frac{dz}{dx}$, luego $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$.

Resultado que manifiesta que $\frac{dx}{dz}$ se puede sacar por la regla de dividir un entero por un quebrado.

Sea ahora u una funcion cualquiera de x, y z una funcion cualquiera de u, con lo cual tendrémos (§ 151),

$$\begin{cases} \Delta u=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\text{etc. (a)} \\ \text{y } \Delta z=A'\Delta u+B'\Delta u^2+C'\Delta u^3+\text{etc. (b)}; \end{cases}$$

y sustituyendo en esta última espresion en vez de Δu, Δu^2 etc., sus valores sacados de la primera, será

$$\Delta z=A'A\Delta x+BA'\Delta x^2+\text{etc.}$$
$$+B'A^2\Delta x^2+\text{etc.}$$

de donde sale $\frac{\Delta z}{\Delta x}=A'A+A'B\Delta x+\text{etc.}$

$$+B'A^2\Delta x+\text{etc.}$$

y pasando á los límites, resultará $\frac{dz}{dx}=A'A$;

pero de las ecuaciones (a, b) se saca $A=\frac{du}{dx}$, $A'=\frac{a}{du}$,

luego se tendrá $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\times\frac{du}{dx}$;

ecuacion que manifiesta que la du se puede suprimir en el numerador y en el denominador, como si fuesen cantidades.

154. De donde resulta, que si se quita el denominador dx en la espresion $\frac{dz}{dx}=A$, se tendrá $dz=Adx$.

Y como de ella depende el valor de la relacion entre dichos límites, se dice que Adx es la *diferencial* de la funcion; y da á conocer que es el primer término de la diferencia, solo con poner en vez de Δx su límite dx; y como la espresion $\frac{dz}{dx}=A$ es lo que multiplica á la diferencial de la variable en la de la funcion, se ha dado á $\frac{dz}{dx}$, ó á lo que representa, el nombre de *coeficiente diferencial*. De donde se deduce que el límite de la relacion de los incrementos, ó el coeficiente diferencial, se obtendrá *dividiendo la diferencial de la funcion por la de la variable;* y recíprocamente, se obtendrá la diferencial de la funcion *multiplicando el límite de la relacion de los incrementos, ó el coeficiente diferencial, por la diferencial de la variable.*

Luego segun todo lo espuesto, el Cálculo Diferencial *es aquel ramo de la Análisis, que enseña á determinar el límite de la relacion de los incrementos simultáneos de una funcion y de la variable ó variables de que depende.*

155. Aunque se puede tomar por evidente que *dos funciones iguales tienen diferenciales iguales*, no obstante, como es una de las proposiciones fundamentales, harémos palpable su verdad.

En efecto, si dos funciones son iguales (cualquiera que sea el valor de su variable), sus desarrollos ordenados por

las potencias de esta variable ó de su incremento, deben ser idénticos; pues de otro modo podría resultar alguna ecuacion que determinase cualquiera de dichas cantidades; por consiguiente, si se tiene $u=z=f.x$, es necesario que sustituyendo $x\pm\Delta x$ en vez de x, y desenvolviendo, se tenga

$$u+A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\text{etc.}=$$
$$z+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+\text{etc.}$$

cualquiera que sea el valor de Δx; luego se tendrá $A\Delta x=A'\Delta x$; ó pasando á los límites $Adx=A'dx$; y como Adx es la diferencial du de u, y $A'dx$ la dz de z, se tendrá $du=dz$.

Esc. La inversa de esta proposicion en general no es verdadera; y se caería en error si siempre se asegurase que *dos diferenciales iguales pertenecen á funciones iguales.*

En efecto, si se tiene $u=a+\frac{b}{c}f.x$,

llamando u' á lo que resulta de sustituir $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá $u'=a+\frac{b}{c}f.(x+\Delta x)$;

y restando de esta ecuacion la anterior, resultará

$$u'-u=a+\frac{b}{c}f.(x+\Delta x)-a-\frac{b}{c}f.x,$$

ó $\Delta u=\frac{b}{c}(f.(x+\Delta x)-f.x)$;

y como lo que hay dentro del paréntesis es $\Delta f.x$, será

$$\Delta u=\frac{b}{c}\Delta f.x;$$

y pasando á los límites se tendrá $du=\frac{b}{c}\times df.x$;

resultado en el que no queda ningun vestigio de la constante a.

Luego la diferencial $\frac{b}{c}\times df.x$ pertenece igualmente á $a+\frac{b}{c}f.x$ que á $\frac{b}{c}f.x$; y conviene generalmente á los dife-

rentes casos que presenta la funcion $a+\frac{b}{c}\text{f}.x$, cuando se dan á a todos los valores posibles.

Donde se ve, que, al diferenciar una funcion cualquiera, todas las constantes combinadas solo por via de adicion ó de sustraccion desaparecen; y las que están por via de multiplicacion ó division quedan afectando á las diferenciales, del mismo modo que afectaban á las variables.

156. Cuando dos cantidades z y x están unidas por una dependencia mutua, se puede decir igualmente que z es funcion de x, ó x funcion de z, segun se quiera mirar á z como determinada por medio de x, ó á x como determinada por medio de z; el coeficiente diferencial tambien se puede mirar bajo cada uno de estos dos aspectos.

Cuando se tiene $\text{d}z=\text{A}\text{d}x$, se deduce $\frac{\text{d}z}{\text{d}x}=\text{A}$, si se considera la z como determinada por x:

y $\frac{\text{d}x}{\text{d}z}=\frac{1}{\text{A}}$, cuando se supone x determinada por z; en este caso último la diferencial de x es

$$\text{d}x=\frac{1}{\text{A}}\text{d}z=\frac{\text{d}z}{\text{A}}.$$

157. Apliquemos lo que precede á la diferenciacion de las funciones algebráicas, y consideremos primeramente el caso en que se tienen muchas cantidades dependientes de x reunidas por via de suma ó resta, como la espresion

$$z=u+v-w,$$

donde u, v y w, sean funciones de x. Segun lo espuesto (141) se tendrá $\Delta z=\Delta u+\Delta v-\Delta w$;

pero como u, v y w son funciones de x, sus diferencias estarán espresadas (151) por $\text{A}\Delta x+\text{B}\Delta x^2+\text{etc.}$

$\text{A}'\Delta x+\text{B}'\Delta x^2+\text{etc.}$, $\text{A}''\Delta x+\text{B}''\Delta x^2+\text{etc.}$;

por lo cual se tendrá $\Delta z=\text{A}\Delta x+\text{B}\Delta x^2+\text{etc.}+\text{A}'\Delta x$

$+\text{B}'\Delta x^2+\text{etc.}-\text{A}''\Delta x-\text{B}''\Delta x^2-\text{etc.}$

y hallando la relacion, resultará

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\text{A}+\text{B}\Delta x+\text{etc.}+\text{A}'+\text{B}'\Delta x+\text{etc.}-\text{A}''-\text{etc.}$$

ó pasando al limite, será $\frac{\text{d}z}{\text{d}x}=\text{A}+\text{A}'-\text{A}''$;

y quitando el divisor tendrémos

$$\text{d}z=\text{A}\text{d}x+\text{A}'\text{d}x-\text{A}''\text{d}x;$$

pero $\text{A}\text{d}x$, $\text{A}'\text{d}x$, $\text{A}''\text{d}x$, son las diferenciales que corresponden á cada una de las funciones u, v, w, ó $\text{d}u$, $\text{d}v$, $\text{d}w$; luego se tendrá

$$\text{d}z=\text{d}.(u+v-w)=\text{d}u+\text{d}v-\text{d}w;$$

es decir, que *la diferencial de una funcion de* x *compuesta de muchos términos, se tendra tomando la diferencial de cada término con el signo de que esté afecto dicho término.*

158. Entendido esto, pasarémos al producto de dos funciones de una misma variable. Sea $z=ut$, donde u y t son funciones de x, ó lo que es lo mismo, $u=\text{f}.x$, $t=\text{F}.x$ lo que dará (151)

$$\begin{aligned} z'=u't'&=(u+\text{A}\Delta x+\text{B}\Delta x^2+\text{etc.})(t+\text{A}'\Delta x+\text{etc.})\\ &=tu+\text{A}t\Delta x+\text{B}t\Delta x^2+\text{etc.}\\ &\quad+\text{A}'u\Delta x+\text{A}'\text{A}\Delta x^2+\text{etc.}\\ &\quad+\text{B}'u\Delta x^2+\text{etc.}\end{aligned}$$

y restando de esto $z=ut$, será

$$\begin{aligned}\Delta z=z'-z=&\ \text{A}t\,\Delta x+\text{B}t\,\Delta x^2+\text{etc.}\\ &+\text{A}'u\Delta x+\text{A}'\text{A}\Delta x^2+\text{etc.}\\ &+\text{B}'u\Delta x^2+\text{etc.}\end{aligned}$$

ó hallando la relacion se tendrá

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta x}=&\ \text{A}\ t+\text{B}\,t\,\Delta x+\text{etc.}\\ &+\text{A}'u+\text{A}'\text{A}\Delta x+\text{etc.}\\ &+\text{B}'u\,\Delta x+\text{etc.}\end{aligned}$$

y pasando á los límites, resultará $\frac{\text{d}z}{\text{d}x}=\text{A}t+\text{A}'u$;

ó quitando el divisor tendrémos

$$\text{d}z=\text{A}t\text{d}x+\text{A}'u\text{d}x=t\times\text{A}\text{d}x+u\times\text{A}'\text{d}x;$$

pero $A\mathrm{d}x$ es (154) la diferencial $\mathrm{d}u$ de u, y $A'\mathrm{d}x$ es la diferencial $\mathrm{d}t$ de t; luego tendrémos

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}.ut=t\times\mathrm{d}u+u\times\mathrm{d}t;$$

lo que nos espresa, *que la diferencial del producto de dos funciones, es igual á la suma de los productos de cada una multiplicada por la diferencial de la otra;* y como siendo u, t funciones de x, las podemos considerar en general como variables, resulta que cuando se tiene una funcion que es el producto de dos variables, para hallar su diferencial, *se multiplicará cada una por la diferencial de la otra, y se reunirán estos productos.*

159. Si quisiéramos comparar la diferencial de una funcion con la misma funcion, dividiríamos los dos miembros de la ecuacion $\mathrm{d}.\,ut=u\mathrm{d}t+t\mathrm{d}u$ por la funcion primitiva ut, y tendríamos $\frac{\mathrm{d}.ut}{ut}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}$;

lo que nos suministra otra nueva é importante verdad, á saber, que *la relacion de la diferencial de una funcion de dos variables con la misma funcion, es igual á la suma de las relaciones que tiene la diferencial de cada variable con la misma variable;* la cual nos conducirá á la espresion de la diferencial de un producto compuesto de tantos factores como se quiera; porque si tuviéramos $z=urs$,

haciendo $rs=t$, sería $z=ut$, y $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}$;

pero como $\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}.rs}{rs}=\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}$, y $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}.urs}{urs}$,

tendrémos $\frac{\mathrm{d}.urs}{urs}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}$;

del mismo modo se hallaría, que siendo $z=ursty\ldots$

se tendría $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}.ursty\ldots.}{ursty\ldots.}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\ldots.$;

y si ahora quitamos el denominador, se tendrá

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}.ursty\ldots=rsty\ldots\mathrm{d}u+usty\ldots\mathrm{d}r+urty\ldots\mathrm{d}s+ursy\ldots\mathrm{d}t+urst\ldots\mathrm{d}y+\text{etc.};$$

que nos dice, que cualquiera que sea el número de variables de una funcion, *la diferencial de su producto será igual á la suma de los productos de la diferencial de cada una de ellas por el producto de las demas.*

160. Si la funcion z estuviese representada por el quebrado $\frac{u}{t}$, tendríamos $\frac{u}{t}=z$,

de donde $u=zt$, y $\mathrm{d}u=z\mathrm{d}t+t\mathrm{d}z$;

de donde despejando $\mathrm{d}z$, sacarémos $\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{z\mathrm{d}t}{t}$,

y sustituyendo en lugar de z su valor $\frac{u}{t}$, resultará

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}.\frac{u}{t}=\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{\frac{u}{t}}{t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{u\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{t\mathrm{d}u-u\mathrm{d}t}{t^2};$$

de donde se sigue, que *la diferencial de un quebrado es igual al denominador multiplicado por la diferencial del numerador, menos el numerador por la diferencial del denominador, dividido todo por el cuadrado del denominador.*

Si el numerador es constante y la funcion es $z=\frac{a}{t}$, harémos $u=a$; y como a no tiene diferencial por ser constante, el término $t\mathrm{d}u=t\mathrm{d}a=t\times0=0$ desaparecerá de la espresion anterior, y será $\mathrm{d}z=\mathrm{d}.\frac{a}{t}=\frac{a\mathrm{d}t}{t^2}$;

que nos dice, que *la diferencial de un quebrado cuyo numerador es constante, es igual al numerador tomado con un signo contrario, multiplicado por la diferencial del denominador, y dividido por el cuadrado del denominador.*

161. Para hallar la diferencial de la funcion $z=x^n$, supondrémos primero, que n sea un número entero y positivo, y por lo mismo z será el producto de un número n de factores iguales á x; por lo que (159) será

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}.x^n}{x^n}=\frac{\mathrm{d}.xxxxx\ldots..}{xxxxx\ldots..}=\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}x}{x}+\ldots;$$

y como siendo n el número de los factores del primer miembro, el segundo tambien se compone de tantos términos como unidades hay en n, y todos estos son iguales á $\frac{dx}{x}$, se tendrá $\frac{dz}{z}=\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{ndx}{x}$,

ó quitando el divisor será $dz=d.x^n=\frac{nx^n\,dx}{x}=nx^{n-1}dx$.

162. Si suponemos ahora que la funcion sea $z=x^{\frac{p}{q}}$, siendo p y q números enteros y positivos, elevando á la potencia q tendrémos $z^q=x^p$, de donde $d.z^q=d.x^p$; pero siendo p y q números enteros y positivos, se tendrá por lo acabado de demostrar,

$$dz^q=qz^{q-1}dz,\ \text{y}\ d.x^p=px^{p-1}dx;$$

luego resultará $qz^{q-1}dz=px^{p-1}dx$,

y despejando dz será $dz=\frac{px^{p-1}dx}{qz^{q-1}}=\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}=$

$$\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{x^{p-\frac{p}{q}}}=\frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}}\,dx=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx,$$

que es lo mismo que ántes suponiendo $n=\frac{p}{q}$.

163. En fin, si fuese negativo el esponente, y le representásemos por $-n$, se tendría $z=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, de donde observando lo espuesto (160) se saca

$$dz=d.x^{-n}=d.\frac{1}{x^n}=\frac{-d.x^n}{x^{2n}}=-\frac{d.x^n}{x^{2n}};$$

y como por lo que precede $d.x^n=nx^{n-1}dx$,

resultará $dz=d.x^{-n}=-\frac{nx^{n-1}dx}{x^{2n}}=$

$$-nx^{n-1-2n}dx=-nx^{-n-1}dx.$$

De esta enumeracion de casos en que puede hallarse el

esponente n, resulta que para diferenciar una potencia cualquiera de una cantidad variable ó de una funcion, *se multiplicará por su esponente, se disminuirá despues el esponente en una unidad, y el resultado se multiplicará por la diferencial de la variable ó de la funcion.*

164. Vamos á aplicar estas reglas á algunos casos para ejercicio de los principiantes.

1º Sea $z=ax^5-bx^4+c$;

por lo espuesto (157) tendrémos

$$dz=d.ax^5-d.bx^4+d.c=5ax^4dx-4bx^3dx;$$

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=5ax^4-4bx^3$.

2º. Sea ahora $z=ax+bx\sqrt{x}-\frac{c}{x^2}$;

tomando separadamente la diferencial de cada término, la del primero es adx; el segundo puesto bajo la forma $bx^{\frac{3}{2}}$, da $d.bx^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}bx^{\frac{3}{2}-1}dx=\frac{3}{2}bx^{\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{2}b\sqrt{x}\times dx$;

la del tercero $\frac{c}{x^2}$ es (§ 160) $-\frac{2cxdx}{x^4}=-\frac{2cdx}{x^3}$;

y reuniendo los resultados parciales, se tendrá

$$dz=adx+\frac{3}{2}b\sqrt{x}\times dx+\frac{2cdx}{x^3}=$$

$$=\left(a+\frac{3}{2}b\sqrt{x}+\frac{2c}{x^3}\right)dx;$$

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=a+\frac{3}{2}b\sqrt{x}+\frac{2c}{x^3}$.

3º. Sea ahora $z=(a-bx^m)^n$.

Para aplicar á ella la regla (163), se considerará el binomio $a-bx^m$ como una funcion particular u, de modo que será $z=u^n$; y observando que la diferencial de u^n es $nu^{n-1}du$, se concluirá

$$dz=n(a-bx^m)^{n-1}d.(a-bx^m);\ \text{y como}$$

$d.(a-bx^m)=d.-bx^m=-bd.x^m=-mbx^{m-1}dx$,

resulta $dz=n(a-bx^m)^{n-1}\times-mbx^{m-1}dx=$

$$-nmbx^{m-1}\times(a-bx^m)^{n-1}dx.$$

4º. Si fuese $z=\sqrt{ax-bx^2+cx^3}$, se mirará este trinomio como una funcion particular u; y como la diferencial de $\sqrt{u}$ ó de $u^{\frac{1}{2}}$

es $\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\,du=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{du}{2\sqrt{u}}$ (A),

resultará $dz=d.u^{\frac{1}{2}}=\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{d.(ax-bx^2+cx^3}{2\sqrt{ax-bx^2+cx^3}}=$

$$\frac{adx-2bxdx+3cx^2dx}{2\sqrt{ax-bx^2+cx^3}}.$$

El resultado (A) de la diferenciacion del radical $\sqrt{u}$, manifiesta que *la diferencial de un radical de segundo grado se obtiene dividiendo la de la cantidad que se encuentra debajo del signo radical por el duplo del radical.*

165. Cuando se tiene una ecuacion entre tres variables, es necesario fijar los valores de dos cualesquiera de estas para determinar la tercera, que por consiguiente es una funcion de las otras dos.

Si se tiene, por ejemplo, la ecuacion $x^2+u^2+z^2=a^2$, no se podrá obtener z sin haber señalado de antemano valores á x y á u; pero conviene observar que no estando las cantidades x y u enlazadas por ninguna relacion, la segunda puede permanecer la misma aunque la primera haya mudado, y reciprocamente. De donde resulta que el valor de z puede variar: 1º en consecuencia de una mudanza que haya sobrevenido á x ó á u solamente, y 2º por el concurso de estas dos circunstancias. Como en el primer caso la cantidad u ó la x se considera como constante, la ecuacion propuesta viene á ser en realidad una ecuacion de dos variables; así, cuando x sola varía, se tiene diferenciando y dividiendo por 2, que

$$xdx+zdz=0 \text{ ó } x+z\times\frac{dz}{dx}=0;$$

y cuando u varía, será $udu+zdz=0$, ó $u+z\frac{dz}{du}=0$.

Luego será $dz=-\frac{xdx}{z}$, $dz=-\frac{udu}{z}$,

donde se debe advertir que la primera de estas diferenciales es relativa á la variabilidad particular de x, y la segunda á la de u; lo que se espresa diciendo que la una es *la diferencial parcial* relativa á x, y la otra *la diferencial parcial* relativa á u.

Los coeficientes diferenciales análogos son:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\ \frac{dz}{du}=-\frac{u}{z}.$$

166. En general cuando se trata de una funcion de muchas variables, se debe tener presente que en $\frac{dz}{du}$, la espresion dz es la diferencial parcial relativa á u; mas para mayor claridad se señala la diferencial parcial de z con relacion á x por $\frac{dz}{dx}dx$, ó por $d_x z$;

y con relacion á u por $\frac{dz}{du}du$, ó por $d_u z$.

De las diferenciales segundas, terceras, etc.

167. Siendo el coeficiente diferencial una nueva funcion de x, se puede someter á la diferenciacion, y dar para el límite de la relacion de su incremento con el de la variable x, un nuevo coeficiente diferencial que será tambien una funcion de x. Haciendo suceder así unas diferenciales á otras, se deduce de la funcion propuesta una serie de límites ó de coeficientes diferenciales, que se distinguen en órdenes, segun el número de diferenciaciones que se han hecho para obtenerlos.

Así es, que siendo $z=f.x$, si al primer coeficiente diferencial le llamamos A, tendrémos $\frac{dz}{dx}=A$;

y como A es funcion de x que se deriva de $f.x$, la llama-