de donde se puede concluir que *la diferencial del arco es igual á la diferencial de la tangente dividida por el cuadrado de la secante;* porque $\sqrt{1+z^2}$ espresa la secante cuando z es la tangente.

186. Por medio de las diferenciales que acabamos de obtener, se pueden desenvolver en serie las principales funciones circulares.

Para $z=\text{sen}.x$, se tiene

$$\frac{dz}{dx}=\cos.x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=-\cos.x,\ \frac{d^4z}{dx^4}=\text{sen}.x,\ \text{etc.}$$

que haciendo $x=0$, será

$A=0,\ A'=1,\ A''=0,\ A'''=-1,\ A'^{v}=0,\ A^{v}=1,$ etc.;

de donde (169) se concluirá

$$z=\text{sen}.x=x-\frac{x^3}{1\times2\times3}+\frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}\text{etc.}$$

que es *el valor del seno espresado por el arco.*

Para $z=\cos.x$, tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\cos.x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=\text{sen}.x,\ \frac{d^4z}{dx^4}=\cos.x,$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^6z}{dx^6}=-\cos.x;\ \text{etc.}$$

que haciendo $x=0$, resulta $A=1$, $A'=0$, $A''=-1$, $A'''=0$, $A'^{v}=1$, $A^{v}=0$, $A^{v'}=-1$, etc., y

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^4}{1\times2\times3\times4}-\frac{x^6}{1\times2\times3\times4\times5\times6}+\text{etc.}$$

Del mismo modo se pueden hallar todas las demas líneas trigonométricas en valores de sus arcos, y el de estos espresados por las líneas; pero aquí solo hallaremos el del arco espresado por su seno.

Para esto, sea z el arco y x el seno correspondiente, y tendrémos (§ 185) $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

lo que dará $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3z}{dx^3}=$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{d^4z}{dx^4}=\frac{3\times3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3\times5x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^5x}{dx^5}=\frac{3\times3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2\times5\times9x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}+\frac{3\times5\times7x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}};\ \text{etc.}$$

de donde haciendo $x=0$, y teniendo presente que entónces es tambien $z=0$, resultará

$A=0,\ A'=1,\ A''=0,\ A'''=1,\ A'^{v}=0,\ A^{v}=3\times3,$ etc.

y por lo mismo será

$$z=x+\frac{x^3}{1\times2\times3}+\frac{3\times3x^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\text{etc.}$$

De la diferenciacion de cualesquiera ecuaciones de dos variables.

187. Hasta aquí solo hemos diferenciado ecuaciones separadas, es decir, ecuaciones en que la variable se hallaba sola en un miembro y la funcion en el otro; tales son las ecuaciones de la forma $Z=X$, siendo Z una funcion de z, y X una funcion de x; pero en el mayor número de ecuaciones que se encuentran en las investigaciones analíticas, la variable y la funcion se hallan mezcladas ó combinadas entre sí.

Cuando se tiene una ecuacion cualquiera $V=0$, entre x y z, su efecto es determinar z por medio de x ó x por medio de z, de manera que una de estas cantidades es funcion de la otra. Si concebimos que se haya determinado z por medio de x, sustituyendo la espresion de z en V, esta se convertirá en una funcion de x sola; pero compuesta de términos que se destruirán independientemente de ningun valor particular de x, pues que este valor debía permanecer indeterminado. De donde se sigue que la cantidad V se debe mirar implícitamente como una funcion de x, que es nula

para todos los valores que puede recibir esta variable, y que por consiguiente su diferencial debe ser nula tambien; luego en este caso la diferencial de z se deberá tomar considerándola como funcion de x, lo que hará que tenga esta forma $dz=Adx$; por lo cual si se toma la diferencial de V bajo este aspecto, y se la iguala con cero, se tendrá la ecuacion que debe determinar á A en esta hipótesis.

Aclaremos esto por medio de un ejemplo.

Sea la ecuacion $z^2-2mxz+x^2-a^2=0$; si en ella se sustituye en vez de z su valor

$$mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2},$$

sacado de la misma ecuacion, se convertirá en una funcion de x sola, cuyos términos todos se destruirán; así, su diferencial bajo esta forma será igual con cero. Pero diferenciando el primer miembro en el supuesto de ser z funcion de x, se tendrá

$$2zdz-2mxdz-2mzdx+2xdx=0,$$

ó suprimiendo el factor comun 2 será

$$zdz-mxdz-mzdx+xdx=0 \text{ (M)},$$

ó $(z-mx)dz-(mz-x)dx=0$,

que da $\frac{dz}{dx}=A=\frac{mz-x}{z-mx}$ (N);

y sustituyendo en este valor de A el de z, será

$$A=\frac{-x+m^2x\pm m\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=$$

$$m\pm\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}};$$

resultado idéntico al que se deduciría de la ecuacion separada $z=mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}$, que (164) daría

$$\frac{dz}{dx}=m\pm\frac{-2x+2m^2x}{+2\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=m\pm\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}.$$

188. Aplicando el mismo razonamiento á la ecuacion $(z-mx)A-mz+x=0$, que se deduce de la (N), considerando en ella á z y A como funciones de x, resulta la ecuacion

$$(dz-mdx)A+(z-mx)dA-mdz+dx=0;$$

y haciendo $dz=Adx$, y $dA=Bdx$, y dividiendo por dx, resultará $(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0$; ecuacion que da la relacion que el coeficiente diferencial del segundo órden B ó $\frac{d^2z}{dx^2}$ debe tener con el de primer orden A ó $\frac{dz}{dx}$, y con las variables z y x.

Continuando diferenciando de la misma manera, se formaría la ecuacion de que dependiese el coeficiente diferencial de tercer órden, y así en adelante.

Si se atiende á que $B=\frac{d^2z}{dx^2}$, y que $d^2z=d.(dz)$, se reconocerá que la ecuacion

$$(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0,$$

se deduce desde luego de la ecuacion (M), cuando se diferencia haciendo variar en ella dz como una funcion de x, y dividiendo despues por dx^2. En efecto, diferenciando y reduciendo se tiene

$$dz^2+zd^2z-2mdxdz-mxd^2z+dx^2=0 \text{ (P)};$$

y reduciendo y dividiendo por dx^2 será

$$\frac{dz^2}{dx^2}-2m\frac{dz}{dx}+(z-mx)\frac{d^2z}{dx^2}+1=0;$$

ecuacion que cuando se muda en ella

$$\frac{dz}{dx} \text{ en A y } \frac{d^2z}{dx^2} \text{ en B},$$

se trasforma en la que hemos obtenido ántes para determinar B.

En general, hacer variar las cantidades A, B, C, etc., como funciones de x, es tomar las diferenciales de las espre-

siones equivalentes $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc.; en una palabra es considerar á dz, d^2z, etc., como funciones de x.

La ecuacion (M) *es la diferencial primera de la propuesta;* la ecuacion (P) *es su diferencial segunda, etc.; y* segun la observacion hecha ántes, *las diferenciales de una ecuacion primitiva propuesta, se deducen las unas de las otras por la diferenciacion, considerando á* z, *dz*, d^2z, etc., *como funciones de* x.

Se pasa á las ecuaciones que dan los coeficientes diferenciales, observando que estos coeficientes son

$\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ó haciendo $dz=Adx$, $d^2z=Bdx^2$, etc.

por estas últimas sustituciones las diferenciales desaparecen, y solo quedan en los resultados las funciones A, B, C, etc., absolutamente independientes de dx.

Aplicacion del cálculo diferencial para determinar los *máximos* y *mínimos* de las funciones de una sola variable.

189. Segun la idéa que hemos dado de la funcion, siempre que varíe la variable debe variar la funcion; y como hay muchas funciones que tienen ciertos límites aunque sus variables reciban todos los valores posibles, es interesante saber en cuántas, y en qué ocasiones varía la ley de los incrementos ó decrementos de la funcion, sin variar los de la variable.

En efecto, cuando la variable de que depende una funcion propuesta, pasa sucesivamente por todos los grados de magnitud, sucede algunas veces que la serie de los valores que recibe esta funcion, es al principio creciente y se convierte despues en decreciente; entonces hay en dicha serie uno de estos valores que sobrepuja á los que le anteceden y siguen inmediatamente. Si, al contrario, la serie de los valores de la funcion propuesta es al principio decreciente, y se convierte despues en creciente, se encontrará necesariamente uno que será menor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.

El término en que el incremento de una funcion se detiene, se llama *máximo;* y aquel en que deja de decrecer, *mínimo.*

Sea, por ejemplo, la ecuacion $z=2+10x-x^2$, en la cual observarémos

que si $x=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.,

resulta $z=2$, 11, 18, 23, 26, 27, 26, etc.,

donde vemos que cuando $x=5$, se tiene para z un valor *máximo* que es 27, el cual es mayor que los que le preceden y siguen inmediatamente.

Si la ecuacion fuese $z=13-4x+x^2$,

se tendria que haciendo $x=$ 0, 1, 2, 3, 4, etc.

resultaría $z=13$, 10, 9, 10, 13, etc.

donde vemos que cuando $x=2$ corresponde á z el *mínimo* 9, que es menor que el que le precede y sigue inmediatamente.

190. Toda funcion que crece ó decrece sin cesar, cuando su variable crece ó decrece, no es susceptible de *máximo* ni *mínimo;* pues que á un valor cualquiera sucede siempre uno mayor ó menor.

El carácter esencial del máximo consiste en ser un valor real y esceder á los valores reales que inmediatamente le anteceden y siguen; el del mínimo, al contrario, consiste en ser un valor real, y menor que los valores reales, que inmediatamente le preceden y siguen.

Se dice *inmediatamente,* porque sucede con frecuencia que una funcion tiene valores que sobrepujan á su máximo, ó que son menores que su mínimo, ó en fin que tiene muchos máximos y mínimos desiguales entre sí; todo lo cual se concibe bien, porque si despues de haber crecido ó decrecido esta funcion, vuelve á crecer de nuevo indefinidamente, acabará por sobrepujar al máximo que tuvo al principio.

En vez de suponer que crece indefinidamente, podemos concebir que decrezca despues de un cierto término, y de aquí nacerá un nuevo máximo que podrá ser diferente del primero; de donde se puede inferir lo que debe suceder cuando estas mudanzas se repiten.

Puesto que (I, 105) el valor absoluto de una cantidad negativa es menor, cuando su valor numérico es mayor, resulta que un *máximo negativo* se debe considerar como un verdadero *mínimo*; y un *mínimo negativo* como un verdadero *máximo*.

191. Para aplicar el Cálculo Diferencial á la investigacion de los máximos ó mínimos, se practicará lo siguiente: 1º *Hállese el primer coeficiente diferencial de la funcion;* 2º *determínense cuales son los valores reales de la variable que pueden reducir á cero ó á infinito este primer coeficiente diferencial; lo que se consigue igualando su espresion á* 0 *si tiene la forma de entero, ó igualando separadamente á* 0 *su numerador y denominador, si tiene la forma de quebrado, y resolviendo la ecuacion ó ecuaciones que resulten: y se verificará, que si la funcion es susceptible de tener máximo ó mínimo, ha de ser precisa é indispensablemente en alguno de los valores que por este medio se obtengan para la variable. Mas por esto solo no se puede asegurar que efectivamente haya máximo ó mínimo en dichos valores hallados; y para cerciorarse de si los hay ó no, es preciso examinar cada valor de la variable para ver si reune la circunstancia de originar en la funcion máximo ó mínimo.*

Tres métodos diferentes hay para verificar este exámen segun se manifiesta (§ 564 del tomo II, p. II, Trat. Elem.); de los cuales pondrémos aquí dos: el uno general, que sirve para todos los casos, y es el siguiente; *sustitúyase en la funcion, en vez de la variable aquel valor que se quiere examinar, y aquel mismo valor aumentado y disminuido en una cantidad muy pequeña, que bastará sea menor, que la menor diferencia de los valores hallados para la variable; si de la sustitucion del valor de esta, que se examina, resulta un valor mayor que los dos valores de las otras dos sustituciones, siendo estos al mismo tiempo reales, habrá* máximo. *Si estos dos valores, siendo reales, fuesen mayores que el que resulta en la funcion, sustituyendo por la variable el valor que se examina, habrá* mínimo. Si no *se verifican precisa é indispensablemente estas circunstancias, no habrá* máximo, *ni* mínimo.

El otro método de verificacion, aunque es el mas elegante y propio del Cálculo Diferencial, no es aplicable para verificar los valores de la variable que resultan de igualar á *cero* el denominador del primer coeficiente diferencial, y es el siguiente. *Hállense los coeficientes diferenciales* 2º, 3º, 4º, 5º, *etc.; sustitúyase en ellos, en vez de la variable aquel valor que se examina; si el primer coeficiente diferencial que no desaparece por esta sustitucion, es de orden par, habrá máximo ó mínimo: siendo* máximo *en el caso de que dicho coeficiente diferencial que no desaparece, tenga el signo negativo, y siendo* mínimo *si dicho coeficiente que no desaparece, tiene el signo positivo. Y la funcion tendrá al mismo tiempo un valor* máximo, *y otro valor* mínimo *para el mismo valor de la variable que se examina, si el espresado coeficiente diferencial tiene el signo de ambigüedad. Si el primer coeficiente diferencial, que no desaparece, es de un orden impar, no hay* máximo, *ni* mínimo.

Sea, por ejemplo, la funcion $z=2+10x-x^2$, cuyo coeficiente diferencial es $\frac{dz}{dx}=10-2x$, que igualándole con cero, da $10-2x=0$, de donde $x=\frac{10}{2}=5$; hállese el segundo coeficiente diferencial, y se tendrá $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$; como es independiente de x, no se reducirá á cero por ningun valor que tenga esta variable; luego habiendo solo desaparecido un coeficiente diferencial, inferimos que cuando $x=5$ hay máximo ó mínimo; y como el primer coeficiente que no desaparece es una cantidad negativa, inferimos que dicho valor es máximo, como debia verificarse (189).

Sea en segundo lugar $z=13-4x+x^2$;

y hallando el coeficiente diferencial, será $\frac{dz}{dx}=-4+2x$; que igualado con cero, da $x=2$; volviendo á diferenciar, será $\frac{d^2z}{dx^2}=2$; cuyo valor constante y positivo, manifiesta que la funcion tiene un mínimo correspondiente á $x=2$, como hallámos antes (189).

Sea en tercer lugar la funcion $z=\frac{(x+3)^4}{(x+2)^6}$; hallando el primer coeficiente diferencial, se tiene, despues de hechas todas las simplificaciones, $\frac{dz}{dx}=\frac{-(x+3)^3(2x+10)}{(x+2)^7}$.

De igualar á cero el primer factor del numerador, resulta $x=-3$; é igualando el otro factor, se tiene $x=-5$. Y la igualacion á cero del denominador da $x=-2$.

Luego, si ha de haber *máximo* ó *mínimo*, ha de ser cuando la variable tenga alguno de estos tres valores.

El segundo coeficiente diferencial, despues de hechas todas las simplificaciones, es

$$\frac{d^2z}{dx^2}=(x+3)^2.\ \frac{6x^2+60x+138}{(x+2)^8}.$$

Esta espresion, en el supuesto de ser $x=-5$, se convierte en $\frac{48}{6561}$, que como no desaparece y es negativa, da á conocer que la funcion en este caso es un *máximo*.

En el supuesto de ser $x=-3$, el segundo y tercer coeficiente diferencial desaparecen; pero el cuarto se convierte en 24, que como no desaparece y es positivo, da á conocer que hay *mínimo*.

Como el valor $x=-2$, resulta de igualar á 0 el denominador, debemos emplear el otro medio de verificacion. Para esto, observarémos que sustituyendo -2, por x en la funcion primitiva, da

$$z=\frac{(-2+3)^4}{(-2+2)^6}=\frac{1}{0^6}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Pero si sustituimos $-\frac{5}{2}$ en vez de x en la misma funcion, resulta $x=4$. Si sustituimos $-\frac{3}{2}$ en vez de x, se tiene $z=324$. Y como estos resultados son ambos de un mismo signo y menores que el valor ∞, que toma la funcion, sustituyendo -2 por x, tenemos que cuando $x=-2$, la funcion es un *máximo*.

192. Percibida con estos tres ejemplos la práctica de la regla, vamos á examinar analíticamente la cuestion, para deducirla.

Para esto, sea z una funcion cualquiera de x, y supongamos que x haya llegado al valor que da el máximo ó mínimo de esta funcion; en este caso, se infiere de las idéas del máximo y mínimo, que si se buscan los valores de z correspondientes á $x-k$ y á $x+k$, se deben obtener en ambos supuestos, resultados menores que el máximo, ó mayores que el mínimo.

Espresando por $'z$ el valor de z que corresponde á $z-k$, y por z' el que corresponde á $x+k$, se tendrá (173) por el teorema de Tailor

$$'z=z-\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\text{etc.}$$

$$z'=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\text{etc.}$$

Y como k puede ser tan pequeña que un término cualquiera sea mayor (136) que la suma de todos los que le siguen, resulta que el término $\frac{dz}{dx}\times k$ podrá cumplir con esta condicion; entonces z será mayor que el primer valor $'z$, y menor que el segundo z'; luego la funcion propuesta no será ni máximo ni mínimo, mientras que $\frac{dz}{dx}\times k$ no sea nulo.

Pero un término no puede ser cero si no lo es alguno de sus factores; y como k no puede ser cero, porque le suponemos un valor determinado, aunque pequeño, se deduce que $\frac{dz}{dx}$ será el que deba ser cero. Luego siendo indispensable que $\frac{dz}{dx}=0$, para que haya un valor máximo ó mínimo, se tendrá entonces,

$$'z=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\text{etc.}$$

$$z'=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\text{etc.}$$

y en este caso sí se podrá tener á un mismo tiempo $z<'z$ y $z<z'$, que sería siempre que $\frac{d^2z}{dx^2}$ fuese positivo; $z>'z$, $z>z'$, cuando fuese $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativo; el primer caso daría para z un mínimo, y el segundo un máximo. De donde inferimos que para encontrar cuando una funcion z debe tener un máximo ó un mínimo (porque en ambos casos los da una misma ecuacion), es necesario buscar la espresion del primer coeficiente diferencial é igualarla á cero, que es la primera parte de la regla.

193. Hemos dicho que para que haya máximo ó mínimo es indispensable que $\frac{dz}{dx}$ sea igual con cero; pero no por esto se debe inferir que siempre que $\frac{dz}{dx}=0$, deba haber máximo ó mínimo. En efecto, si el valor de x que hace nulo el valor de $\frac{dz}{dx}$, hiciese desvanecer al mismo tiempo $\frac{d^2z}{dx^2}$, sin que $\frac{d^3z}{dx^3}$ desapareciese, se tendría

$$'z=z-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}-\text{etc.}$$

$$z'=z+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\text{etc.}$$

y como $\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}$ podría llegar á ser mayor que la suma de todos los términos que siguen, no habría entonces entre las tres cantidades $'z$, z, z' la subordinacion que conviene al máximo ó al mínimo; pues la media z sería mayor que una de las estremas, y menor que la otra.

Pero si se tuviese tambien $\frac{d^3z}{dx^3}=0$, resultaría

$$'z=z+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}-\frac{d^5z}{dx^5}\times\frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\text{etc.}$$

$$z'=z+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\frac{d^5z}{dx^5}\times\frac{k^5}{1\quad2\times3\times4\times5}+\text{etc.}$$

en donde las condiciones del máximo ó del mínimo quedarían aun satisfechas, y daría á conocer el signo de $\frac{d^4z}{dx^4}$ cual de los dos debía tener lugar.

Del mismo modo se haría ver, que en general no puede haber máximo ó mínimo, sino cuando el primero de los coeficientes diferenciales que no desaparece es de un orden par; y si este coeficiente es negativo, la funcion será máximo: y si positivo, mínimo.

Con lo acabado de manifestar, está demostrada la regla para todas las funciones que pueden desarrollarse por el teorema de Taylor; por lo que aun nos falta dar la demostracion de aquella parte que corresponde á las funciones, cuyo desarrollo no puede comprenderse en dicha fórmula (p, § 173) de dicho teorema. Para esto, observarémos que cuando dicha fórmula (p) no tiene aplicacion, resultan infinitos los coeficientes diferenciales desde aquel que es inmediatamente superior al esponente fraccionario que debe tener k en aquel valor particular de la funcion. Mas, por lo que acabamos de manifestar, resulta que por ningun título se puede verificar que hay máximo ó mínimo, si existe en

el desarrollo el término $\frac{dz}{dx}.k$ en que k tenga la unidad por esponente; luego para que haya *máximo* ó *mínimo* en las funciones, que no están comprendidas en el desarrollo de la fórmula de *Taylor*, el menor esponente fraccionario de k deberá ser menor que 1, y por lo mismo el primer coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$, que es el que inmediatamente le sigue, será ya precisamente infinito; luego queda demostrado, del modo mas completo, lo comprendido en el número 2º de la regla; pues para las funciones cuyo desarrollo está comprendido en la fórmula (p) de *Taylor*, debe ser precisamente $\frac{dz}{dx}=0$; y para las que no se pueden desarrollar por la espresada fórmula, debe ser indispensablemente $\frac{dz}{dx}=\infty$.

Luego si hay valores de la variable que produzcan *máximo* ó *mínimo* en la funcion, estos valores no pueden ser otros que los que satisfagan á una de dichas condiciones.

Todo esto prueba, que si ha de haber máximo ó mínimo, ha de ser precisa é indispensablemente en alguno de los valores de la variable que reducen á cero el numerador ó denominador del valor del primer coeficiente diferencial; pero nada hay todavía que nos asegure si en todos ó en algunos de estos valores de la variable hay *máximo* ó *mínimo;* por lo cual es indispensable examinar cada uno de estos valores de por sí, á fin de ver si cumplen con alguna de las condiciones esenciales que caracterizan al *máximo* ó *mínimo*. El primer método de verificacion que se propone en la regla es general para todos los casos; pues comprende, tanto á las funciones que se desarrollan por la fórmula de Taylor, como á las que no pueden desarrollarse por ella y no viene á ser mas que verificar la condicion esencial que exige la definicion de *máximo* ó *mínimo*. Lo que completa la demostracion de la regla (191).

194. La teoría de los *máximos y mínimos* se aplica á todo género de cuestiones; pero como la determinacion se hace siempre por un mismo método, solo nos detendrémos en la siguiente.

Dividir una cantidad a *en dos partes, tales que su producto sea el máximo de todos los productos semejantes que se podrian formar.*

Sea x una de las partes de a, con lo que la otra será $a-x$; y representando por z el producto cuyo *máximo* se busca, se tendrá $z=x(a-x)=ax-x^2$; de donde sale $\frac{dz}{dx}=a-2x$, que igualando á cero da $x=\frac{1}{2}a$; volviendo á diferenciar será $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$; cuyo valor constante y negativo, manifiesta que el producto es un máximo cuando $x=\frac{1}{2}a$, ó cuando las partes en que se descompone la a son iguales; que es lo mismo que dedujimos en otro lugar (1. 170).

De aquí resulta que si a fuese el semiperímetro de un rectángulo, y se quisiese que este fuese un máximo, no habría mas que construir un cuadrado, cuyo lado fuese igual á la mitad de a; luego *el cuadrado es el máximo de todos los cuadriláteros isoperímetros.*

Luego *el triángulo rectángulo isósceles, es el mayor de todos los triángulos que se pueden formar cuando se conoce lo que han de componer juntos sus dos catetos;* porque si llamamos t el triángulo, b la base y a la altura, se tendrá $t=\frac{1}{2}ab$, cuyo producto es un máximo cuando $a=b$.

De los valores que toman en ciertos casos los coeficientes diferenciales, y de las espresiones que se convierten en $\frac{0}{0}$.

195. Si se buscase el *máximo* ó el *mínimo* de la funcion $az=\sqrt{a^2x^2-x^4}$ por ejemplo, se deduciría de ella

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}},$$

que, haciéndole igual cero, daría $x=0$ y $\frac{dz}{dx}=\frac{0}{0}$.

Sin embargo, con un poco de atencion se verá que el numerador y denominador de la fraccion $\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}}$ no se desvanecen á un mismo tiempo sino porque están afectos del factor comun x.

Si se suprime en ambos, se hallará $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2-2x^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, que en el supuesto de ser $x=0$, da

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a^2}{a\sqrt{a^2}}=\frac{a^2}{\pm a^2}=\pm 1.$$

En general, si se hace $x=a$ en una espresion de esta forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, se convertirá en $\frac{0}{0}$; pero su verdadero valor debe ser nulo, finito ó infinito, segun se tenga $m>n$, $m=n$, $m<n$, porque borrando los factores comunes al numerador y denominador, se hallará

$$\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q} \text{ en el primer caso;}$$

$$\frac{P}{Q} \text{ en el segundo; y } \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}} \text{ en el tercero;}$$

en el supuesto de que las cantidades P y Q no sean nulas ni infinitas por la suposicion de $x=a$.

Luego cuando se tiene una espresion cualquiera bajo la forma $\frac{0}{0}$, es necesario para conocer su verdadera significacion, desprenderla de los factores comunes á su numerador y denominador. La diferenciacion suministra este medio con mucha sencillez.

La diferencial de la espresion $P(x-a)$, en que P es una funcion cualquiera de x, pero independiente del factor $(x-a)$, es $(x-a)dP+Pdx$,

que no se desvanece ya cuando $x=a$.

Si se diferenciase dos veces la funcion $P(x-a)^2$, se hallaría $(x-a)^2dP+2P(x-a)dx$,
$(x-a)^2d^2P+2(x-a)dPdx+2(x-a)dxdP+2Pdx^2=$
$(x-a)^2d^2P+4(x-a)dPdx+2Pdx^2$;
y como P no contiene á $x-a$, la diferencial segunda se reducirá á su último término; continuando del mismo modo deduciríamos que todas las diferenciales de una espresion de la forma $P(x-a)^m$, hasta la del órden $m-1$ inclusive, se desvanecen en el supuesto de $x=a$, cuando m es un número entero: y que entónces la diferencial del órden m se reduce á $1\times2\times3....mPdx^m$;
luego el factor $(x-a)^m$ desaparece despues de m diferenciaciones.

Sea por ejemplo la funcion $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, que se desvanece en el supuesto de $x=a$; su diferencial primera se desvanece tambien en esta hipótesis, pero no su diferencial segunda que es $(6x-2a)dx^2$, la cual se encuentra ya libre del factor $(x-a)$; y pues que ha sido necesario para esto diferenciar dos veces de seguida, se debe concluir que es de la forma $P(x-a)^2$; lo que en efecto se verifica, pues que

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

196. Aplicando lo que precede á la fraccion $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, se verá que diferenciando muchas veces de seguida su numerador y denominador, quedarán libres á un mismo tiempo del factor $(x-a)$ si $m=n$.

Si el numerador es el primero que da un resultado que no se desvanece, será una prueba de que el factor $x-a$ se encuentra elevado en él á una potencia menor que en el denominador, y por consiguiente la fraccion propuesta será infinita; si al contrario es el denominador, la fraccion propuesta será nula. Luego podrémos establecer que *para obtener el*