verdadero valor de una fraccion que se convierte en $\frac{0}{0}$, *cuando se da á* x *un valor particular, es necesario diferenciar separadamente su numerador y su denominador, hasta que se encuentre para uno ú otro un resultado que no se desvanezca; la funcion propuesta será infinita en el primer caso, nula en el segundo, y tendrá un valor finito, si se hallan á un mismo tiempo dos resultados que no se aniquilan.*

Algunos ejemplos aclararán esto suficientemente.

1º La fórmula $\frac{x^n-1}{x-1}$, que espresa la suma de la progresion geométrica $\div\!\div 1:x:x^2:x^3:x^4:x^5:x^6:$ etc. se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=1$; sin embargo, esta suma en la progresion geométrica $\div\!\div 1:1:1:1:$ etc. á que nos conduce dicho supuesto, tiene un valor determinado é igual con n, que la regla precedente nos va á suministrar tambien. En efecto, despues de haber diferenciado el numerador y el denominador de la espresion $\frac{x^n-1}{x-1}$, se halla $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}=nx^{n-1}=n$ cuando $x=1$.

197. Aunque no se ve inmediatamente cómo es posible dar la forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-x)^n}$ á la funcion trascendente $\frac{a^x-b^x}{x}$, que se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=0$, no obstante se le puede aplicar la regla; y despues de haber diferenciado su numerador y denominador, se encuentra $a^x la-b^x lb$; que sustituyendo cero en vez de x se convierte en $l.a-l.b$, que espresa el valor buscado.

Lo mismo sucede con la espresion $\frac{1-\text{sen}.x+\cos.x}{\text{sen}.x+\cos.x-1}$, que se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=\frac{1}{2}\pi$; pero diferenciando su numerador y denominador, se tendrá

$$\frac{-\cos.x dx-\text{sen}.x dx}{\cos.x dx-\text{sen}.x dx}=\frac{-\cos.x-\text{sen}.x}{\cos.x-\text{sen}.x}=1,$$

que es el valor de dicha espresion cuando $x=\frac{1}{2}\pi$.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teoría de las líneas curvas.

198. En la descripcion de una línea se observa que todos los puntos se suceden los unos á los otros sin interrupcion ninguna; lo cual constituye lo que llamamos *ley de continuidad.*

En el cálculo se puede hacer que los valores de las funciones, se vayan acercando á esta ley todo lo que se quiera, dando á las variables, de que dependen, los valores correspondientes. Esta analojía, aunque algo imperfecta, entre la descripcion de las líneas y la marcha del cálculo, dió orígen al Cálculo Diferencial.

Las consideraciones geométricas prueban de un modo muy exacto, que la relacion de los incrementos de una funcion y los de su variable, es en general susceptible de límites.

199. *Toda funcion de una variable se puede representar por la ordenada de una curva, de la que esta variable es la abscisa*; porque si vamos dando valores particulares á la abscisa, y tomamos estas partes á lo largo de una línea, y en los estremos se levantan líneas paralelas entre sí, de la magnitud que espresa la funcion en cada caso, tendrémos construida una curva, cuya ecuacion sea la igualacion de la funcion propuesta con una variable. Ahora *la relacion de la ordenada de la curva con su subtangente corresponde al coeficiente diferencial de la funcion.* En efecto, si en una curva CD (fig. 61) se tira por dos puntos M y M' una secante MM', prolongada hasta que encuentre en S al eje AB de las abscisas, y se tiran despues las ordenadas PM, P'M', y la recta MQ paralela á AB, los triángulos semejantes MQM' y PMS, darán

$$PM:PS::M'Q:MQ\ (m),$$

de donde $\frac{PS}{PM}=\frac{MQ}{M'Q}=\frac{\Delta x}{\Delta z}$;

y pasando á los límites se tendrá

$$\text{lím. de } \frac{PS}{PM} = \text{lím. de } \frac{\Delta x}{\Delta z};$$

pero el límite del primer miembro es $\frac{PT}{PM} = \frac{\text{subt.}}{z}$, porque á medida que el punto M′ se aproxima al punto M, se acerca el S al T, y por consiguiente la subsecante PS á la subtangente PT; y como (153) el límite del segundo miembro es

$$\frac{dx}{dz}, \text{ será } \frac{\text{subt.}}{z} = \frac{dx}{dz} \text{ ó subt.} = z \times \frac{dx}{dz},$$

que es la fórmula general que determina la subtangente de una curva cualquiera; y nos dice *que debemos hallar el valor del coeficiente diferencial* $\frac{dx}{dz}$, *de la abscisa con relacion á la ordenada; multiplicarle por el valor de la ordenada*, y *este será el valor de la subtangente.*

200. Cuando se dan á la abscisa valores sucesivos, las ordenadas que corresponden á estos valores, determinan en la curva puntos, que se pueden considerar como vértices de los ángulos de un polígono inscrito en esta curva.

Si se toman, por ejemplo, sobre el eje de las abscisas los puntos P, P′, P″ (fig. 62), distantes entre sí una misma cantidad k, se tendrá

$$AP = x,\ AP' = x + k,\ AP'' = x + 2k, \text{ etc.},$$

y si se levantan las ordenadas correspondientes PM, P′M′, P″M″, etc., y se unen los puntos M, M′, M″, etc., por cuerdas, se formará el polígono MM′M″, etc., que se diferenciará tanto menos de la curva propuesta cuanto mas próximos se hallen entre sí los puntos M, M′, M″, etc.; pero al mismo tiempo el número de sus lados aumentará cada vez mas, pues que la distancia PP′ estará contenida un número de veces mayor en la abscisa determinada AP. Por lo que, la curva CD será el límite de todos estos polígonos

y por consiguiente las propiedades que convengan á este límite convendrán á la curva propuesta.

Donde debemos advertir, que si en lo sucesivo consideramos alguna curva como *un polígono de infinitos lados*, se ha de entender que esta es una espresion abreviada de que *el polígono es tal, que la diferencia entre él y su límite, que es la curva, es menor que cualquier cantidad dada.*

201. De la (prop. m, 199) se saca tambien

$$\frac{PM}{PS} = \frac{M'Q}{MQ} = \frac{\Delta z}{\Delta x};$$

y pasando á los límites será $\frac{PM}{PT} = \frac{dz}{dx}$; ahora, por ser el triángulo PMT (fig. 61) rectángulo en P, la relacion $\frac{PM}{PT}$ espresa la tangente del ángulo PTM; luego $\frac{dz}{dx}$ *es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente de una curva en un punto cualquiera forma con el eje de las abscisas.*

El mismo triángulo PMT da la magnitud de la tangente ó

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2} = \sqrt{z^2 + \frac{z^2 dx^2}{dz^2}} = z\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dz^2}}$$

202. Si suponemos que MR sea *normal* de la curva, el triángulo TMR será rectángulo en M; y como desde M tenemos bajada la perpendicular MP, resultará que los triángulos TPM, PMR serán semejantes (I. 332) y darán

$$PT : PM :: PM : PR = \frac{PM^2}{PT} = \frac{z^2}{\frac{zdx}{dz}} = \frac{zdz}{dx},$$

que es *el valor de la subnormal de toda curva.*

El triángulo PMR, rectángulo en P da para la normal

$$MR = \sqrt{PM^2 + PR^2} = \sqrt{z^2 + \frac{z^2 dz^2}{dx^2}} = z\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2}}.$$

203. Vamos á aplicar esta teoría á la investigacion de las subtangentes, tangentes, normales y subnormales de las secciones cónicas.

Considerémos primero que la curva AMM' (fig. 63) sea un círculo, cuya ecuacion es $z^2=2ax-x^2$,

que da $\frac{dz}{dx}=\frac{2a-2x}{2z}=\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

De donde para la subtangente PT se saca

$$\text{subt.}=z\frac{dx}{dz}=\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}.$$

Si se hace $x=a$ resulta infinita la subtangente, y por lo mismo la tangente no encuentra al eje de las abscisas, y le es paralela; y como esto corresponde á $x=a$ que da $z=\pm a$, se deduce que *la tangente tirada por el estremo de la ordenada que pasa por el centro, es paralela al eje de las abscisas;* lo que debe verificarse así, pues en este caso la tangente y el eje de las abscisas son perpendiculares á la ordenada ó al radio.

Para la normal tendrémos

$$\text{norm.}=z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=z\sqrt{1+\frac{(a-x^2)}{2ax-x^2}}=$$

$$z\sqrt{\frac{2ax-x^2+a^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}}=z\sqrt{\frac{a^2}{2ax-x^2}}=$$

$$\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2ax-x^2}}=\pm\sqrt{a^2}=\pm a;$$

que manifiesta que *la normal del círculo es constantemente igual al radio;* lo que tambien es conforme con lo demostrado (I. 299).

204. Sea ahora la curva una elipse, cuya ecuacion

es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, que da $\frac{dz}{dx}=\frac{b^2(2a-2x)}{2a^2z}=$

$$\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a-x}{z}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a-x}{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{b}{a}\times\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

de donde sale $PT=z\frac{dx}{dz}=$

$$\frac{b}{a}\times\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{a}{b}\times\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}.$$

Este valor tambien es infinito en el supuesto de $x=a$; y como en este caso la ecuacion de la curva da $z=\pm b$, se sigue que *la tangente de la elipse en los estremos del eje menor, es paralela al eje mayor.* Lo propio sucede respectivamente en los estremos del eje mayor, que entónces *la tangente es paralela al eje menor.*

La subnormal será

$$PR=z\frac{dz}{dx}=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{b}{a}\times\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{b^2}{a^2}(a-x).$$

Si $x=a$ resulta $PR=0$ como debe verificarse; pues en este caso la misma ordenada viene á ser la normal, y de consiguiente no hay distancia ninguna desde su pie al de la ordenada.

205. Supongamos ahora que la rama de la curva AMM' corresponde á una parábola, cuya ecuacion es $z^2=px$, que

da $\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2z}=\frac{p}{2\sqrt{px}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$;

de donde sacarémos para el valor de la subtangente

$$PT=z\frac{dx}{dz}=\sqrt{px}\times2\sqrt{\frac{x}{p}}=2\sqrt{\frac{px^2}{p}}=2\sqrt{x^2}=2x;$$

que quiere decir que *en la parábola la subtangente es siempre igual al duplo de la abscisa correspondiente al punto de contacto.*

La subnormal será

$$PR=z\frac{dz}{dx}=\sqrt{px}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2x}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2}=\frac{1}{2}p;$$

que manifiesta que *en la parábola la subnormal es constante é igual á la mitad del parámetro.*

206. Supongamos ahora que la misma rama de curva corresponda á una hipérbola, cuya ecuacion es

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2),\quad \text{que da } \frac{dz}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{2a+2x}{2z}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a+x}{\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{b}{a}\times\frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

lo que da para la subtangente

$$PT=\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}\times\frac{a}{b}\times\frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a+x}=\frac{2ax+x^2}{a+x};$$

y para la subnormal tendrémos

$$PR=z\frac{dz}{dx}=\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}\times\frac{b}{a}\times\frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{b^2}{a^2}(a+x).$$

207. Consideremos por último la ecuacion general

$$z^2=\frac{p}{2a}\times(2ax\pm x^2),$$

que representa todas las secciones cónicas, á saber: un círculo cuando $p=2a$ y se toma el signo —, que entonces se convierte en $z^2=2ax-x^2$; una elipse cuando se toma el signo inferior; una hipérbola cuando se toma el superior; y una parábola cuando se supone $2a=\infty$; pues haciendo las operaciones indicadas se tiene $z^2=px\pm\frac{px^2}{2a}$; y siendo $2a=\infty$; desaparece el segundo término y se convierte la ecuacion en $z^2=px$.

Esto supuesto, diferenciando será $\frac{dz}{dx}=$

$$\frac{p}{2a}\times\frac{2a\pm 2x}{2z}=\frac{p}{2a}\times\frac{a\pm x}{\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax\pm x^2)}}=\ldots$$

$$\ldots\sqrt{\frac{p}{2a}}\times\frac{a\pm x}{\sqrt{2ax\pm x^2}},$$

de donde sustituyendo y simplificando, sale

$$PT=z\frac{dx}{dz}=\frac{2ax\pm x}{a\pm x},\ \text{y } PR=z\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2a}(a\pm x).$$

208. Con estas fórmulas es sumamente sencillo *el tirar tangentes á las curvas.* En efecto, dado el punto de contacto, por medio de sus coordenadas se calculará la subtangente; y tirando por el estremo de esta y el punto de contacto una línea, esta será la tangente; y la perpendicular á esta en el punto de contacto será la normal. Tambien se puede calcular la subnormal, tirar despues la normal, y la perpendicular á esta en el punto de contacto será la tangente. Si se diese desde luego la subtangente ó subnormal, y se buscase el punto de contacto, para tirar la tangente, se sustituiría en su ecuacion el valor dado, se despejaría la abscisa, y se tiraría la ordenada para obtener el punto de contacto.

209. Siendo el arco MeM′ (fig. 61) mayor que la cuerda MM′, la razon $\frac{MeM'}{MQ}$ de la diferencia del arco CM á la diferencia de la abscisa correspondiente AP, será mayor que la razon $\frac{MM'}{MQ}$ de la cuerda MM′ á MQ, ó que su igual $\frac{MS}{PS}$, á causa de los triángulos semejantes MM′Q, MPS; pero cuanto mas se acerque el punto M′ á M, tanto mas la cuerda MM′ se acercará á confundirse con el arco MeM′; por consiguiente, tanto mas la primera $\frac{MeM'}{MQ}$ de estas razones se acercará á la segunda $\frac{MS}{PS}$; de manera que su diferencia llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea; de donde concluirémos, que el límite $\frac{MT}{PT}$ de la segunda de estas razones, será igual al de la primera; luego *la razon* $\frac{MT}{PT}$ *de la tangente á la subtangente de un punto*

cualquiera M *de una curva, es el límite de la razon* $\frac{MeM'}{MQ}$ *de la diferencia del arco* CM *á la diferencia de la abscisa correspondiente.*

De donde se infiere que si llamamos A al arco de una curva cualquiera CD, será $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$; pero los triángulos semejantes TPM, MPR,

dan $\frac{MT}{PT}=\frac{RM}{MP}=(\S\ 202)\ \frac{z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}}{z}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$;

luego $\frac{dA}{dx}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$, y $dA=dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=\sqrt{dx^2+dz^2}$. Dividiendo la ecuacion $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$ por la $\frac{dz}{dx}=\frac{PM}{PT}$, que sacamos (201), se tendrá

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{\frac{dz}{dx}}=\frac{\frac{MT}{PT}}{\frac{PM}{PT}},\ \text{ó}\ \frac{dA}{dz}=\frac{MT}{PM}=\frac{MR}{PR};$$

esto es, *la razon de la tangente con la ordenada, ó de la normal con la subnormal de una línea curva, es el límite de la razon de la diferencia del arco á la diferencia de la ordenada.*

210. Hemos dicho (119) que por el centro de la hipérbola se pueden tirar unas líneas, en tal disposicion que la curva se va acercando continuamente hácia ellas, y jamas las puede encontrar, y que estas líneas se llaman *asíntotas*, que es lo mismo que si dijésemos *tangentes al infinito*.

Allí hemos omitido el determinarlas, porque los métodos son complicados, y lo dejamos para hacerlo por el Cálculo Diferencial, que las determina con la mayor facilidad.

211. En efecto, si la curva AC (fig. 64) tiene una asíntota BF, á medida que las coordenadas x, z, aumentan, los puntos T, L, donde la tangente MT encuentra á sus ejes se acercan continuamente á sus límites respectivos B, E, sin que jamas puedan confundirse con ellos. Por consiguiente, para conocer si una curva, cuya ecuacion es dada, tiene alguna asíntota y en caso que la tenga, fijar su posicion, *se determinarán los valores de* AT *y* AL *en valores de* x *ó* z *por medio de la ecuacion de la curva; y si haciendo* x *ó* z$=\infty$, *resultan los límites finitos* AB, AE, *la recta* BE *que pase por ellos, será una asíntota de la curva* AC.

Así, lo primero que harémos será determinar los valores de AT, AL, para lo cual tendrémos

$$AT=PT-AP=\frac{zdx}{dz}-x;$$

y para AL, los triángulos semejantes TAL, TPM, darán TP : PM :: TA : AL$=\frac{PM\times TA}{TP}=\ldots$

$$\ldots\frac{z\left(z\frac{dx}{dz}-x\right)}{z\frac{dx}{dz}}=z-\frac{x}{\frac{dx}{dz}}=z-\frac{xdz}{dx}.$$

De manera, que si espresamos la primera por A, y segunda por B, los valores que tomen estas cantidades en cada caso particular, determinarán dos puntos por donde se tirarán las rectas que serán asíntotas de la curva.

212. Ejemplo : sea la curva una hipérbola ordinaria.

Suponiendo en A el orígen de las coordenadas, y llamando a al primer semieje y b al segundo, tendrémos

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2),\ \frac{dz}{dx}=\frac{b^2(a+x)}{a^2z};$$

$$\frac{zdx}{dz}=\frac{a^2z^2}{b^2(a+x)}=\frac{2ax+x^2}{a+x},\ \frac{xdz}{dx}=\frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z};$$

por lo que

$$A=z\frac{dx}{dz}-x=\frac{2ax+x^2}{a+x}-x=\frac{ax}{a+x}=\frac{a}{\frac{a}{x}+1};$$

$$B=z-x\frac{dz}{dx}=z-\frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z}=\frac{a^2z^2-b^2(ax+x^2)}{a^2z}=$$

$$\frac{2ab^2x+b^2x^2-b^2ax-b^2x^2}{\pm ab\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{bx}{\pm\sqrt{2ax+x^2}}=$$

$$\pm\frac{b}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}}$$

que haciendo x infinita, resultan los límites $A=a$ y $B=\pm b$; de donde inferimos que *la hipérbola* CAC′ *tiene dos asíntotas* BF, BF′, *que parten del centro* B, *y encuentran al eje de las ordenadas en los puntos* E, E′ : *el uno encima y el otro debajo del eje de las abscisas, á una distancia del punto de orígen igual al segundo semieje* b.

213. Si el orígen de las coordenadas estuviese en el centro, sería (§ 109) $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x}{a^2z},\ x\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x^2}{a^2z},\ z\frac{dx}{dz}=\frac{a^2z^2}{b^2x},$$

$$z\frac{dx}{dz}-x=A=\frac{a^2z^2-b^2x^2}{b^2x}=\frac{b^2x^2-a^2b^2-b^2x^2}{b^2x}=-\frac{a^2}{x};$$

$$B=z-\frac{xdz}{dx}=\frac{a^2z^2-b^2x^2}{a^2z}=\mp\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

y haciendo x infinita, resulta $A=0$, $B=\mp 0$, por consiguiente la curva propuesta tiene dos asíntotas, que pasan por el orígen B, la una encima y la otra debajo del eje BD.

Pero como estos dos valores solo determinan el centro, y aun se necesita otro punto para fijar la posicion de la asíntota, harémos x infinita en la espresion $\frac{dz}{dx}$ que es (201) la

tangente trigonométrica del ángulo MTD, y resultará la del FBD que la asíntota forma con el eje de las abscisas. Por lo que sustituyendo el valor de z en el del coeficiente diferencial, tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x}{a^2z}=\frac{b^2x}{a^2\times\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{b}{a\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$\pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}};$$

y haciendo $x=\infty$, resulta la tangente del ángulo FBD$=\pm\frac{b}{a}$; tomando, pues, las líneas AE, AE′, iguales al segundo semieje b, las rectas BE, BE′, serán las asíntotas de la hipérbola CAC′.

214. Los puntos que se llaman singulares en las curvas, como igualmente la curvatura de estas en cada uno de sus puntos, se determina tambien facilísimamente por medio del Cálculo Diferencial.

De los coeficientes diferenciales de las superficies curvilíneas, de las superficies de los cuerpos de revolucion, y de los volúmenes de estos.

215. Hasta aquí hemos encontrado los coeficientes diferenciales de una funcion cualquiera de x; ahora, como en una curva tal como AF (fig. 65), es funcion de la abscisa, no solo la ordenada PM, sino tambien el arco AM, la superficie AMP, la superficie y el volúmen del cuerpo que originaría AMP al girar alrededor de AP : vamos á encontrar sus coeficientes diferenciales. De las dos primeras ya los tenemos (201 y 209); y así, pasarémos á los de las tres últimas.

Para esto, llamarémos s á la superficie AMP, y concibiendo que la abscisa AP$=x$ se convierte en

$$AP'=x'=x+\Delta x,$$

entonces $z=PM$ se convertirá en $z'=P'M'=z+\Delta z$,
y la superficie APM representada por s, se convertirá en
$s'=AP'M'=APM+PMeM'P'=s+\Delta s$,
y Δs será igual á $AP'M'-APM=PMeM'P'$;
pero al paso que Δx disminuye, el trapecio rectilíneo PMM'P' se va acercando á Δs, de manera que podrémos hacer que la diferencia entre dicho trapecio y el espacio mistilíneo igual con Δs, llegue á ser menor que cualquier cantidad dada; y como (I, § 356) el trapecio

$$PMM'P'=PP'\times\frac{(PM+P'M')}{2}=\Delta x\times\left(\frac{z+z'}{2}\right)=\ldots.$$

$$\Delta x\times\frac{(2z+\Delta z)}{2}=\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right),$$ resulta que $\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$

se puede acercar á Δs tanto como se quiera; ó dividiendo por Δx, tendrémos que $z+\frac{1}{2}\Delta z$ se podrá acercar tanto como se quiera á $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; luego los límites de estas dos espresiones serán iguales; pero el límite de $z+\frac{1}{2}\Delta z$ es z, y el de $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ es $\frac{ds}{dx}$;

luego se tendrá $z=\frac{ds}{dx}$ ó $ds=zdx$;

cuyo resultado manifiesta que *el coeficiente diferencial de la superficie* APM, *considerada como funcion de la abscisa* AP, *es igual con la ordenada.*

216. Si suponemos que la curva AMF dé una vuelta al rededor del eje AC de las abscisas, y espresamos por s la superficie que describe el arco AM, la descrita por el arco MeM' será la diferencia de s, y la cuerda MM' describirá un cono truncado, cuya superficie, llamando π á la razon del diámetro á la circunferencia, es (I. § 421)

$$2\pi\left(\frac{MP+M'P'}{2}\right)\times MM'=2\pi\left(\frac{2z+\Delta z}{2}\right)\sqrt{MQ^2+M'Q^2}=$$

$$2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2}$$

y pasando á la relacion será

$$\frac{\text{Sup. de trozo orig. por MM}_{\prime}}{\Delta x}=2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}.$$

Esto supuesto, si consideramos la superficie s como funcion de la abscisa x, echarémos de ver que cuanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite, tanto mas se acercará la superficie descrita por la cuerda MM' á la superficie Δs descrita por el arco MeM', ó la espresion

$$2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\times\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}} \text{ á la } \frac{\Delta s}{\Delta x},$$

y que la diferencia de estas dos podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; de donde

concluirémos que el *límite* $2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$

de la primera, será igual al límite $\frac{ds}{dx}$ *de la segunda;*

por lo cual será $\frac{ds}{dx}=2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$,

y $ds=2\pi z dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}$.

217. Si llamamos v la funcion de x que espresa el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio APM, en su revolucion al rededor del eje AC, el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio PMeM'P' terminado por el arco MeM', será Δv, y el cono truncado engendrado por el trapecio PMM'P' será igual (I. 423 esc.)

$$\text{á } \pi(PM^2+PM\times P'M'+P'M'^2)\frac{PP'}{3}=$$

$$\pi(z^2+zz'+z'^2)\frac{\Delta x}{3}=\pi(z^2+z(z+\Delta z)+(z+\Delta z)^2)\frac{\Delta x}{3}=$$

$$\pi(3z^2+3z\Delta z+\Delta z^2)\frac{\Delta x}{3}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right)\Delta x;$$

y pasando á la relacion se tendrá

$$\frac{\text{vol. orig. por trapecio PMMP'}}{\Delta x}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right);$$

pero esta relacion se aproximará tanto mas á $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, cuanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite cero, de modo que su diferencia puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea; luego sus límites serán iguales; y por consiguiente $\frac{dv}{dx}=\pi z^2$,

esto es, *igual á la superficie del círculo que describe la ordenada* PM *en su movimiento de revolucion*; y la diferencial dv del volúmen será $dv=\pi z^2 dx$.

DEL CALCULO INTEGRAL.

De la integracion de las funciones racionales de una sola variable.

218. El Cálculo Integral tiene por objeto, segun hemos manifestado (149), *el determinar la funcion primitiva, dado el límite de la relacion entre el incremento de la funcion y el de la variable.* De donde se deduce que siendo inverso del Cálculo Diferencial, las reglas que se dén para integrar, han de ser las opuestas á las que se dieron para diferenciar.

La esposicion de los principios de este Cálculo, presenta divisiones análogas á las que nos ofreció el Diferencial; y así como, tratando de este, aplicamos primero las reglas de diferenciar á las funciones esplícitas, tambien principiarémos estas investigaciones por el caso en que el coeficiente diferencial de la funcion que se busca, se da inmediatamente en valores de las variables independientes. Cuando el coeficiente diferencial de primer órden de una funcion de x, viene espresado en valores de x, se tiene $\frac{dz}{dx}=X$,

ó $dz=Xdx$, siendo $X=f.x$; luego la funcion buscada es aquella cuya diferencial es Xdx, y se indica poniéndole una S ó f ántes, con la cual quisieron dar á conocer los primeros inventores, que la funcion equivalía á la suma de las diferenciales. Así, z será igual á $S.Xdx$; y se ve que la característica S es la opuesta á la d. Para hallar esta funcion, es necesario invertir las reglas de la diferenciacion; mas á fin de proceder con método, tratarémos sucesivamente de las diferentes formas que puede tener la funcion dada X, y que clasificarémos en funciones racionales, en funciones irracionales y en funciones trascendentes de este modo:

$$\text{Funciones racionales}\begin{cases} A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\text{etc.} \\ \dfrac{A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\text{etc.}}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\text{etc.}} \quad \dfrac{U}{V}. \end{cases}$$

Funciones irracionales $U\times V^{\frac{m}{n}}$.

Funciones trascendentes F.(U,lV), F. (U, sen.V), etc.

219. Supongamos que el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ esté representado por el monomio Ax^m, y tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=Ax^m;\ \text{de donde}\ dz=Ax^m\,dx;$$

pero cuando tratamos de diferenciar un monomio en que la variable estaba elevada á potencias, dijimos que *se multiplicaba el esponente de la potencia por el mismo monomio, disminuyendo el esponente en una unidad y multiplicándolo todo por la diferencial de la variable*; luego aquí deberémos establecer las reglas en un órden inverso, diciendo: *suprímase la diferencial, auméntese una unidad al esponente, y pártase esto por el esponente que afectaba á la variable despues de aumentado en una unidad;* en virtud de cuya regla tendrémos, que siendo $\frac{dz}{dx}=Ax^m$,

ó $dz=Ax^m\,dx$, será $z=S.Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.