y pasando á la relacion se tendrá

$$\frac{\text{vol. orig. por trapecio PMMP'}}{\Delta x}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right);$$

pero esta relacion se aproximará tanto mas á $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, cuanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite cero, de modo que su diferencia puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea; luego sus límites serán iguales; y por consiguiente $\frac{dv}{dx}=\pi z^2$,

esto es, *igual á la superficie del círculo que describe la ordenada* PM *en su movimiento de revolucion*; y la diferencial dv del volúmen será $dv=\pi z^2 dx$.

DEL CALCULO INTEGRAL.

De la integracion de las funciones racionales de una sola variable.

218. El Cálculo Integral tiene por objeto, segun hemos manifestado (149), *el determinar la funcion primitiva, dado el límite de la relacion entre el incremento de la funcion y el de la variable.* De donde se deduce que siendo inverso del Cálculo Diferencial, las reglas que se dén para integrar, han de ser las opuestas á las que se dieron para diferenciar.

La esposicion de los principios de este Cálculo, presenta divisiones análogas á las que nos ofreció el Diferencial; y así como, tratando de este, aplicamos primero las reglas de diferenciar á las funciones esplícitas, tambien principiarémos estas investigaciones por el caso en que el coeficiente diferencial de la funcion que se busca, se da inmediatamente en valores de las variables independientes. Cuando el coeficiente diferencial de primer órden de una funcion de x, viene espresado en valores de x, se tiene $\frac{dz}{dx}=X$,

ó $dz=Xdx$, siendo $X=f.x$; luego la funcion buscada es aquella cuya diferencial es Xdx, y se indica poniéndole una S ó f ántes, con la cual quisieron dar á conocer los primeros inventores, que la funcion equivalía á la suma de las diferenciales. Así, z será igual á $S.Xdx$; y se ve que la característica S es la opuesta á la d. Para hallar esta funcion, es necesario invertir las reglas de la diferenciacion; mas á fin de proceder con método, tratarémos sucesivamente de las diferentes formas que puede tener la funcion dada X, y que clasificarémos en funciones racionales, en funciones irracionales y en funciones trascendentes de este modo:

$$\text{Funciones racionales}\begin{cases} A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\text{etc.} \\ \dfrac{A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\text{etc.}}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\text{etc.}} \quad \dfrac{U}{V}. \end{cases}$$

Funciones irracionales $U\times V^{\frac{m}{n}}$.

Funciones trascendentes F.(U,lV), F. (U, sen.V), etc.

219. Supongamos que el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ esté representado por el monomio Ax^m, y tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=Ax^m;\ \text{de donde}\ dz=Ax^m\,dx;$$

pero cuando tratamos de diferenciar un monomio en que la variable estaba elevada á potencias, dijimos que *se multiplicaba el esponente de la potencia por el mismo monomio, disminuyendo el esponente en una unidad y multiplicándolo todo por la diferencial de la variable*; luego aquí deberémos establecer las reglas en un órden inverso, diciendo: *suprímase la diferencial, auméntese una unidad al esponente, y pártase esto por el esponente que afectaba á la variable despues de aumentado en una unidad;* en virtud de cuya regla tendrémos, que siendo $\frac{dz}{dx}=Ax^m$,

ó $dz=Ax^m\,dx$, será $z=S.Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.

Tomando casos particulares se tendrá, que si $dz=4ax^3dx$, se deduce $z=\frac{4ax^4}{4}=ax^4$;

si $dz=5bx^9dx$, será $z=\frac{5bx^{10}}{10}=\frac{bx^{10}}{2}$, etc.

220. Tambien podríamos deducir de cada regla del Cálculo Diferencial, otra contraria en el Integral; pero ahora solo notarémos que, pues la diferencial de una funcion era la misma que la de la funcion acompañada de una constante por via de suma ó de resta, no sabemos si la integral de Ax^mdx, es

$$\frac{Ax^{m+1}}{m+1} \text{ ó es } \frac{Ax^{m+1}}{m+1}+B,$$

siendo B una constante cualquiera; y por lo mismo debemos dejar nuestra misma duda espresada, añadiendo á la integral que da el cálculo una constante indeterminada, que señalarémos con la inicial C; y dirémos que

$$\int Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C.$$

Esta constante se llama *constante arbitraria;* porque cuando no hay ninguna circunstancia que la determine, la podemos elejir á arbitrio. La integral que da el cálculo, junta con la constante arbitraria, se llama *integral completa.*

221. Cuando se quiere integrar una espresion, se debe dejar indeterminada la constante; y si se pide que la determinemos, á lo que se suele llamar *completar la integral*, entónces se debe pedir la condicion.

Así, supongamos que se pida completar la integral $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$, de manera que sea igual con b cuando $x=a$; entónces sustituirémos a en vez de x en la espresion $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C$, igualarémos esto con b, y de esta ecuacion despejarémos C; de modo que será

$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+C=b$, lo que da $C=b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}$;

por lo que en este caso se tendrá

$$\int Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}.$$

222. Ahora, cuando el Cálculo Integral se aplica á alguna cuestion, entónces esta misma debe suministrar la condicion con que se ha de determinar la constante, de manera que el resultado no convenga sinó á dicha cuestion. Para esto, lo que se necesita es conocer un valor absoluto de la integral; pues restando de él la integral que da el cálculo, tendrémos el valor de la constante; el valor absoluto que se puede conocer en cualquier cuestion es *saber qué valor tiene la variable cuando la integral que espresa lo que indagamos, se reduce á cero;* y por lo mismo vamos á manifestar qué forma tiene entónces la constante.

223. Supongamos que P sea la integral que da el cálculo, y tendrémos que P+C será la integral completa; supongamos ahora que sustituyendo en P el valor de la variable que ha de reducir á cero la integral completa, se convierte en Q, y se tendrá $Q+C=0$, lo que da $C=0-Q=-Q$; de donde se deduce, que en este caso se completa la integral *añadiendo á la que da el cálculo, lo que resulta de sustituir en la misma que da el cálculo el valor de la variable que reduce la integral completa á cero, y tomando todo esto con un signo contrario.*

Así, si nos propusiéramos integrar la espresion (220), de manera que la integral completa se redujese á cero cuando $x=a$, tendríamos

$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+C=0$, de donde $C=-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}$, lo que da

$$z=\int Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}=\frac{A(x^{m+1}-a^{m+1})}{m+1}\ (M).$$

Si la quisiéramos completar, de manera que se redujese á cero cuando $x=0$, tendríamos $\frac{A0^{m+1}}{m+1}+C=0$, de donde $C=0$; lo que nos dice que *cuando la integral completa es cero al mismo tiempo que la variable, no hay término constante en la funcion.*

Por lo que la integral $\int.Ax^m dx$, en el supuesto de convertirse en cero cuando $x=0$, es $z=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$ (N).

Cuando se señala en general la espresion $\int.Ax^m dx$, ó $\int.Xdx$, siendo $X=f(x)$, se llama *integral indeterminada*; cuando en virtud de una de las condiciones de la cuestion, se determina la constante, como acabamos de hacer, se dice que se tiene ya la *integral completa*: de manera, que las espresiones (M) y (N) son integrales completas de $\int.Ax^m dx$. La primera está completada bajo la condicion de que toda la integral debe reducirse á cero cuando $x=a$; y la segunda cuando la variable $x=0$; pero dichas integrales aun no están enteramente determinadas, pues que cualquiera de dichas espresiones puede recibir tantos valores cuantos se supongan á la variable x.

Ahora, cuando á la variable que contiene una integral ya completa, se le da un valor particular, entónces el valor que resulta para la integral, se llama *integral determinada*. Así es, que si suponemos $x=B$, en la espresion (M), será

$$z=\frac{A(B^{m+1}-a^{m+1})}{m+1} \text{ (O);}$$

cuyo valor está ya absolutamente determinado, pues que está reducido á una cantidad fija y constante.

Suponiendo el mismo valor á x en la espresion (N), se convertirá en $z=\frac{AB^{m+1}}{m+1}$ (P); que tambien queda de todo punto determinada.

Para indicar las condiciones con que se pide el determinar las integrales, se acostumbra lo mas generalmente el poner

al lado derecho del signo $\int$ de la integral, por la parte inferior el primer valor que se supone á la variable para determinar la constante arbitraria, y por la parte superior el valor que recibe la variable para determinar totalmente la integral. Así es

que $\int_a^B Ax^m.dx$ espresa el valor (O); y $\int_0^B Ax^m.dx$ espresa el valor (P). Las espresiones a y B de la primera, y 0 y B de la segunda, se dice que son *los límites entre que se toman las integrales*. La espresion

$\int_0^x Ax^m dx$ representa el valor (N), en que solo se fija el primer límite de la integral, y queda aun indeterminada por corresponder á cualquier valor que se dé á la variable.

En general suponiendo que una integral se ha de determinar primero completando la integral, que da el cálculo, por el valor de $x=0$, y despues suponiendo á la variable x un valor X, se usa de uno de estos tres medios

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx, \quad \int f(x)dx\begin{pmatrix} x_0 \\ X \end{pmatrix}, \quad \int f(x)dx\begin{pmatrix} x=x_0 \\ x=X \end{pmatrix}$$

La primera de estas notaciones, concebida por Mr. *Fourier*, es la mas simple, y la que está mas generalmente adoptada. Mr. *Hirsch* en sus tablas integrales pone un acento al signo integral, en esta forma $\int'$ para espresar las integrales determinadas; pero tiene que espresar con palabras los límites de la integracion.

No puedo menos de indicar con este motivo, que Mr. Cauchy, de quien el Cálculo Infinitesimal ha recibido muchos adelantamientos, ha publicado una memoria sobre *las integrales determinadas, tomadas entre límites imaginarios.*

En lo sucesivo, dejarémos indeterminada la constante, á no ser que alguna investigacion particular conduzca á lo contrario.

224. Antes de pasar mas adelante, conviene examinar un caso particular en que el valor de la espresion (M) se convierte en $\frac{0}{0}$, que es aquel en que $m=-1$; porque entónces se tiene

$$z=\frac{A(x^0-a^0)}{0}=\frac{A(1-1)}{0}=\frac{0}{0}.$$

Para encontrar su verdadero valor, es necesario recurrir á la regla (196); y como hemos hecho ver (197) que $\frac{a^x-b^x}{x}$ se reduciria á $l.a-l.b$ en la suposicion de $x=0$, tendrémos que en el ejemplo actual, mudando las letras convenientemente, será $z=A(l.x-l.a)$;
pero cuando $m=-1$, se tiene $dz=Ax^{-1}dx$;
luego $dz=\frac{Adx}{x}$, da $z=A(l.x-l.a)$, ó $z=Al.x+C$.

Lo mismo se hubiera deducido de lo dicho (179), pues se tiene $d.lx=\frac{dx}{x}$; y manifiesta que *siempre que el numerador de una fraccion sea la diferencial del denominador, esta fraccion tiene por integral al logaritmo del denominador.*

225. La escepcion que presenta aquí la regla (223) proviene de la imposibilidad de espresar la trascendente $l.x$ por un número finito de términos algebráicos.

Toda la dificultad de la integracion de las funciones de una sola variable, consiste en la investigacion de las trasformaciones, propias para reducir las funciones propuestas á uno ó muchos monomios, á que se pueda aplicar la regla antecedente.

Luego si se tuviese $dz=ax^m dx+bx^n dx+cx^p dx$, hallaríamos inmediatamente (§ 119)

$$z=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}+\frac{cx^{p+1}}{p+1}+C,$$

no añadiendo mas de una constante arbitraria, porque si añadiésemos una para cada monomio, juntas equivaldrian á una sola igual á su suma. En general, pues que hemos visto (157) que

$$d.(u+v-w)=du+dv-dw,$$

se debe concluir que

$$\int.(du+dv-dw)=\int.du+\int.dv-\int.dw;$$

y que

$$\int.(Pdx+Qdx-Rdx=\int.Pdx+\int.Qdx-\int.Rdx.$$

226. Hagamos notar desde ahora una consecuencia que nos será muy util en adelante; y es, que integrando separadamente cada término de
$d.ut=udt+tdu$ (§ 158), da $ut=\int.udt+\int.tdu$;
lo que establece una relacion entre las funciones primitivas de las diferenciales udt, tdu, de modo que siendo conocida la una, la otra lo es tambien, porque se tiene $\int.udt=ut-\int.tdu$;
la diferencial $d.\frac{u}{t}=\frac{du}{t}-u\frac{dt}{t^2}$ (§ 160),
dará igualmente $\frac{u}{t}=\int.\frac{du}{t}-\int.\frac{udt}{t^2}$,
de donde se sacará $\int.u\frac{dt}{t^2}=-\frac{u}{t}+\int.\frac{du}{t}$.

227. De que $d.au=adu$ (§ 155),
se sigue que $\int.aXdx=a\int.Xdx$, es decir, que se puede hacer salir del signo S ó $\int$ la constante a.

Si nos propusiéramos $dz=(ax+b)^m dx$,
efectuaríamos la potencia indicada; é integraríamos cada monomio que resultase de esta operacion; pero conviene observar que se puede llegar al resultado sin efectuar el

desarrollo; para esto basta hacer $ax+b=u$, lo que da $x=\frac{u-b}{a}$, y $dx=\frac{du}{a}$; y sustituyéndole en la espresion de dz, se convertirá en $dz=\frac{u^m du}{a}$, y por consiguiente $z=\frac{u^{m+1}}{a(m+1)}$; y poniendo ahora en vez de u su valor, se tendrá $z=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+C$.

228. Pasemos ahora á las funciones fraccionarias; y con el objeto de principiar por el caso mas sencillo, supongamos que se tenga $dz=\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$; haciendo $ax+b=u$, se halla $x=\frac{u-b}{a}$, $dx=\frac{du}{a}$, y por consiguiente $dz=\frac{A\left(\frac{u-b}{a}\right)^m \times \frac{du}{a}}{u^n}=\frac{A(u-b)^m du}{a^{m+1}u^n}$; desenvolviendo la potencia $(u-b)_m$, multiplicando el resultado por du, y dividiendo despues por u_n, se tendrá una serie de monomios que podrémos integrar por la regla dada (219).

Tomemos por ejemplo el caso en que $m=3$ y $n=2$, y resultará $dz=\frac{A(u-b)^3 du}{a^4u^2}=\ldots\ldots$

$$\ldots\ldots\frac{A}{a^4}(udu-3bdu+3b^2u^{-1}du-b^3u^{-2}du);$$

aplicando á cada uno de estos monomios la regla general, resultará $z=\frac{A}{a^4}\left(\frac{u^2}{2}-3bu+3b^2 l.\, u+b^3u^{-1}\right)+C$;

y poniendo en vez de u su valor, se tendrá por último

$$z=\frac{A}{a^4}(\tfrac{1}{2}(ax+b)^2-3b(ax+b)+3b^2 l.(ax+b)+b^3(ax+b)^{-1})+C.$$

De la integracion de las funciones irracionales.

229. Las funciones irracionales se deben considerar como integradas, siempre que por medio de alguna trasformacion se hayan hecho racionales, ó al menos, cuando se han reducido á series de monomios irracionales; porque entonces se les puede aplicar inmediatamente las reglas precedentes.

Propongámonos, por ejemplo, la espresion

$$dz=\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}};$$

aqui advertirémos que si en vez de x se sustituye una cantidad que tenga raiz cuadrada y cúbica exacta, entónces se convertirá en una funcion racional; luego si hacemos $x=u^6$, resultará $dx=6u^5du$,

$$\sqrt{x}=\sqrt{u^6}=u^3,\ \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{u^{12}}=u^4,\ \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{u^6}=u^2;$$

lo que da $dz=\frac{(1+u^3-u^4)}{1+u^2}\times 6u^5du=-6du\times\frac{u^9-u^8-u^5}{1+u^2}$;

que haciendo la division hasta donde se pueda, se tendrá

$$dz=-6\left(u^7du-u^6du-u^5du+u^4du-u^2du+du-\frac{du}{1+u}\right);$$

cuya integral, teniendo presente (184) que

$$\int\frac{du}{1+u^2}=\text{arco (cuya tangente}=u),$$

es $z=-6\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}-\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+u-\text{arc.(tang.}=u)\right)+C$;

y sustituyendo ahora en vez de u su valor $\sqrt[6]{x}$, se tendrá $z=-\frac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\text{arc.(tang.}=\sqrt[6]{x})+C.$

De la integracion de las diferenciales binomias.

230. Bajo el nombre de *diferenciales binomias* se comprenden todas las que son susceptibles de la forma siguiente,

$$dz=Kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}};$$

en la cual podemos suponer que m y n son números enteros sin disminuir su generalidad, y por consiguiente todo está en averiguar en qué casos se podrá hacer racional la diferencial $dz=Kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$; para esto harémos $a+bx^n=u^q$, lo que dará

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=u^p,\ x^n=\frac{u^q-a}{b},\ x=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$x^m=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

diferenciando esta espresion, se tendrá

$$mx^{m-1}dx=\frac{m}{n}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\times\frac{qu^{q-1}du}{b},$$

$$\text{ó } x^{m-1}dx=\frac{1}{nb}qu^{q-1}du\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1};$$

lo que dará $dz=K\times\frac{q}{nb}u^{p+q-1}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}du$ (N).

Donde se ve que *esta espresion será racional siempre que* $\frac{m}{n}$ *sea un número entero, y por consiguiente en este caso se podrá integrar;* pues la podrémos desenvolver en una serie de monomios integrables cada uno de por sí.

Así, si queremos integrar la espresion

$$dz=8x^9dx(a+bx^5)^{\frac{2}{5}},$$

como aquí sería $m=10$ y $n=5$, resultaría $\frac{10}{5}=2$, número entero; luego esta fórmula será integrable exactamente; y

como aquí $K=8$, $p=2$, $q=3$, y $u^3=a+bx^5$, haciendo las sustituciones en la fórmula (N), será

$$dz=8\times\frac{3}{5b}u^{5-1}\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^{\frac{10}{5}-1}du=\frac{24}{5b}u^4\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^1du=$$

$$\frac{24}{5b^2}(u^7-au^4)\,du=\frac{24}{5b^2}(u^7du-au^4du),\text{ lo que da}$$

$$z=\frac{24}{5b^2}\int.(u^7du-au^4du)=\frac{24}{5b^2}\left(\frac{u^8}{8}-\frac{au^5}{5}\right)+C=\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{24}{5b^2}u^5\times\left(\frac{u^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+C=$$

$$\frac{24}{5b^2}(a+bx^5)^5\times\left(\frac{(a+bx^5)^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+C=$$

$$\frac{24}{40b^2}(a+bx^5)^8-\frac{24a}{25b^2}(a+bx^5)^5+C.$$

231. Pues que no siempre es posible integrar la fórmula $\int.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, la idéa que se presenta al principio, es tratar de reducirla á los casos mas simples, valiéndonos de la observacion que hicimos (226) acerca de que $\int.udt=ut-\int.tdu$;
porque si se descompone la cantidad

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

en dos factores, de los cuales el uno le representemos por dt y el otro por u, se hará depender la integracion de la fórmula anterior de la $\int.udt$, que en algunas ocasiones será mas simple que la propuesta.

De la integracion de las cantidades logarítmicas y esponenciales.

232. Supongamos la fórmula $dz=Pdx\,(l.x)^n$,
en la cual P sea una funcion algebráica de x, y tendrémos (226), que

$z=\int.\mathrm{P}dx(\mathrm{l}.x)^n=(\mathrm{l}.x)^n\int.\mathrm{P}dx-\int.\mathrm{d}.(\mathrm{l}.x)^n\times\int.\mathrm{P}dx$;

y como P es una funcion algebráica de x, resultará que la $\int.\mathrm{P}dx$ será exacta, y si la llamamos N tendrémos que $\int.\mathrm{P}dx=\mathrm{N}$;

y como por otra parte $\mathrm{d}.(\mathrm{l}.x)^n=n(\mathrm{l}.x)^{n-1}\times\frac{dx}{x}$,

sustituyendo estos valores en la espresion de z será

$$z=\mathrm{N}(\mathrm{l}.x)^n-n\int.\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-1}\mathrm{N}.$$

Ahora, como N es una funcion algebráica, tendrémos que la integral de $\mathrm{N}\frac{dx}{x}$ tambien será algebráica, y llamándola M, resultará que como

$$\mathrm{d}.(\mathrm{l}.x)^{n-1}=(n-1)\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-2},$$

la misma advertencia nos dará

$$\int.\frac{dx}{x}\mathrm{N}(\mathrm{l}.x)^{n-1}=\mathrm{M}(\mathrm{l}.x)^{n-1}-(n-1)\int.\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-2}\mathrm{M},$$

luego $z=\int.\mathrm{P}dx(\mathrm{l}.x)^n=\mathrm{N}(\mathrm{l}.x)^n-n\mathrm{M}(\mathrm{l}.x)^{n-1}+$

$$n(n-1)\times\int.\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-2}\mathrm{M}.$$

Pero si llamamos L la integral de $\frac{dx}{x}\mathrm{M}$, la misma observacion nos dará

$$\int.\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-2}\mathrm{M}=\mathrm{L}(\mathrm{l}.x)^{n-2}-(n-2)\int.(\mathrm{l}.x)^{n-3}\frac{dx}{x}\mathrm{L},$$

luego $z=\int.\mathrm{P}dx(\mathrm{l}.x)^n=\mathrm{N}(\mathrm{l}.x)^n-n\mathrm{M}(\mathrm{l}.x)^{n-1}+$

$$n(n-1)\mathrm{L}(\mathrm{l}.x)^{n-2}-n(n-1)(n-2)\int.\frac{dx}{x}(\mathrm{l}.x)^{n-3}\mathrm{L}.$$

233. Donde se ve, que continuando del mismo modo, cuando n sea un número entero, como se le han de ir quitando sucesivamente unidades, llegarémos al fin á un factor $n-n$, el cual siendo cero, hará desaparecer el último término que se halle afecto de la integral; y como todas las funciones N, M, L, etc., son algebráicas, resulta que la funcion $dz=\mathrm{P}dx(\mathrm{l}.x)_n$ tiene integral algebráica, siempre que n sea un número entero. Sea, por ejemplo, $dz=x^m dx(\mathrm{l}.x)^2$,

y tendrémos 1º $\int.x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}=\mathrm{N}$;

$$2^0\int.\mathrm{N}\frac{dx}{x}=\int.\frac{x^{m+1}}{m+1}\times\frac{dx}{x}=\int.\frac{x^m}{m+1}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}=\mathrm{M};$$

$$3^0\int.\mathrm{M}\frac{dx}{x}=\int.\frac{x^m}{(m+1)^2}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}=\mathrm{L};$$

y como el término que debería seguir, tendría por coeficiente $n-2=2-2$, que en nuestro caso es cero, se sigue que ya no hay mas términos, y resultará que

$$z=\int.x^m dx(\mathrm{l}.x)^2=\mathrm{N}(\mathrm{l}.x)^2-2\mathrm{M}(\mathrm{l}.x)+$$

$$2\times1\times\mathrm{L}(\mathrm{l}.x)^0=x^{m+1}\left(\frac{(\mathrm{l}.x)^2}{m+1}-\frac{2(\mathrm{l}.x)}{(m+1)^2}+\frac{2}{(m+1)^3}\right)+\mathrm{C}.$$

234. Pasemos ahora á la integracion de las funciones esponenciales; mas primero notarémos que siendo U una funcion algebráica de a^x, la integracion de $dz=\mathrm{U}dx$ no presentaría ninguna dificultad; pues que haciendo $a^x=u$, tendríamos $x\mathrm{l}.a=\mathrm{l}.u$,

de donde $x=\frac{\mathrm{l}.u}{\mathrm{l}.a}$, $dx=\frac{du}{u\mathrm{l}.a}$;

y sustituyendo estos valores se convertiría dz en una diferencial algebráica con relacion á la variable u.

Así, si tuviéramos $dz=\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}}$,

haciendo las sustituciones, resultaría