$$dz=\frac{udu}{ul.a\sqrt{1+u^n}}=\frac{du}{l.a\sqrt{1+u^n}}.$$

235. Si la ecuacion diferencial propuesta fuese $dz=Pa^x dx$, se la descompondria en dos factores de este modo $a^x dx\times P$;
y siendo (§ 177) $d.a_x=l.a\times a^x dx$, resultará que

$$a^x=\int .l.a\times a^x\,dx=l.a\int .a^x\,dx,\ \text{y}\ \int .a^x\,dx=\frac{a^x}{l.a};$$

por lo cual tendrémos

$$z=\frac{1}{l.a}Pa^x-\frac{1}{l.a}\int .a^x\,dP\ (O)\ \text{etc.}$$

Haciendo $dP=Qdx$, $dQ=Rdx$, $dR=Tdx$,
y continuando la reduccion de antes, se hallará esta serie $z=\int .Pa^x dx=$

$$\frac{1}{l.a}Pa^x-\frac{1}{(l.a)^2}Qa^x+\frac{1}{(l.a)^3}Ra^x\ldots\pm\frac{1}{(l.a)^n}\int .U.a^x\,dx;$$

donde el signo + corresponde si el término ocupa un lugar impar, y el — si ocupa un lugar par.

236. La aplicacion de esta fórmula conducirá á la integral exacta, siempre que P sea una funcion racional y entera; porque entonces el número de las cantidades

$$Q=\frac{dP}{dx},\ R=\frac{dQ}{dx},\ T=\frac{dR}{dx},\ \text{etc.}$$

será limitado, y la última U será constante; y por consiguiente $\int .Ua^x dx$ se mudará en

$$U\int .a^x\,dx=U\times\frac{a^x}{l.a}+C.$$

Sea, por ejemplo, $P=x^n$, siendo n un número entero y positivo, con lo cual se tendrá $dP=nx^{n-1}dx$;
y la ecuacion (O) se convertirá en

$$z=\int .a^x x^n\,dx=\frac{a^x x^n}{l.a}-\frac{n}{l.a}\int .a^x x^{n-1}dx;$$

y continuando la operacion, se hallará $Q=nx^{n-1}$, $R=n(n-1)x^{n-2}$, $T=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, de donde

$$z=\int .a^x x^n dx=a^x\left(\frac{x^n}{l.a}-\frac{nx^{n-1}}{(l.a)^2}+\frac{n(n-1)}{(l.a)^3}\times x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{(l.a)^4}\times x^{n-3}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots.1}{(l.a)^{n+1}}\right)+C.$$

De la integracion de las funciones circulares.

237. Sea la espresion $z=\int .Xdx\times arc.(sen.=x)$;
si se integra al principio el factor Xdx,
haciendo $\int .Xdx=U$, y observamos (185) que

$$d.arc.(sen.=x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{se tendrá}$$

$$\int .Xlx\times arc.(sen.=x)=U\times arc.(sen=x)-\int .\frac{Udx}{\sqrt{1-x^2}};$$

luego la integracion de la fórmula propuesta, se referirá á una funcion algebráica si U lo es.
Como

$$d.arc.(cos.=x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{y}\ d.arc.(tang.=x)=\frac{dx}{1+x^2},$$

se tendrá, operando del mismo modo que antes, que

$$\int .Xdx\times arc.(cos.=x)=U\times arc.(cos.=x)+\int .\frac{Udx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{é}\int .Xdx\times arc.(tan.=x)=U\times arc.(tan.=x)-\int .\frac{Udx}{1+x^2};$$

y la integracion de estas fórmulas no dependerá sino de una funcion algebráica, siempre que U lo sea.

238. Para hacer alguna aplicacion, sea z un arco, y x su tangente, y por lo dicho (185) tendrémos

$$dz=\frac{dx}{1+x^2}=dx\times\frac{1}{1+x^2}=dx(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\text{etc.})=$$
$$dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx-x^{10}dx+x^{12}dx\mp\text{etc.};$$

é integrando (119), nos resultará

$$z=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}\mp\text{etc.}$$

donde tendrémos el arco espresado en valores de su tangente; y no le ponemos constante, porque el arco es cero cuando lo es su tangente.

Del mismo modo se puede hallar el arco en valores de todas las líneas trigonométricas y estas en valores de su arco; pero aquí no nos detendrémos en esto, y solo darémos una idéa del modo de rectificar la circunferencia por medio de la fórmula anterior.

Para esto, observarémos que sen.$30^0=\frac{1}{2}$,

y cos. $30^0=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

y como tang.$=\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$, será tang.$30^0=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

luego sustituyendo este valor en la espresion anterior, nos resultará, arco de $30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\times3\sqrt{3}}+$

$$\frac{1}{5\times3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{7\times3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{9\times3^4\sqrt{3}}-\frac{1}{11\times3^5\sqrt{3}}+\text{etc.};$$

y como la semicircunferencia equivale á seis veces el arco de 30^0, multiplicando por 6, sacando el factor comun $\frac{6}{\sqrt{3}}$, y simplificando por $\sqrt{3}$, será

$$\text{semi C}=2\sqrt{3}\times(1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{5\times3^2}-\frac{1}{7\times3^3}+\frac{1}{9\times3^4}-\text{etc.});$$

calculando 72 términos de esta serie, y haciendo las operaciones necesarias, hemos hallado en nuestro Tratado Elemental (tom. II, § 647), que

$$\text{semiC}=3,14159265358979323846264 33,\ \text{etc.}$$

Este valor está sacado en el supuesto de ser el radio la unidad; por lo cual si tomamos ahora el diámetro por unidad, este mismo valor será el de toda la circunferencia, la cual será

$$C=3,14159265358979323846264 33,\ \text{etc.}$$

que es el valor de que hemos hecho uso en la Geometría elemental.

La notacion, que hemos dado á conocer (§ 223) para indicar las integrales determinadas, se usa muy frecuentemente en la resolucion de los problemas de física; y como aun no se halla espresada en ninguna obra elemental de cálculo, no juzgo inoportuno el detenerme algun tanto sobre este punto, á fin de que los principiantes se familiaricen bien con dicha notacion, y puedan comprender las importantes aplicaciones que se hacen del Cálculo Infinitesimal á los diversos ramos de la física.

Con este objeto, observaré, que, pues $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ es (185) la diferencial del arco cuyo seno es z, resulta que integrando será

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arc.(sen.}=z)+C\ (\alpha);$$

siendo C la constante arbitraria.

Esta espresion, conforme está, es lo que hemos llamado (223) *integral indeterminada*.

Si queremos espresar, que el valor de esta integral se ha de empezar á contar desde el parage en que $z=0$, esto quiere decir, que la integral debe reducirse á cero cuando $z=0$; lo que da para completar la integral

$$0=\text{arc.(sen.}=0)+C;$$

y como cuando el seno es cero, lo es tambien el arco, re-

sulta que *Const.*$=0$; luego la integral completa de la espresion (α) es $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arc.(sen.}=z)$.

Esta integral aun no está determinada; pues que segun varíe z, se tendrá un valor particular para ella; pero si suponemos que se quiera encontrar el valor de esta integral cuando en ella se hace $z=1$; como el arco cuyo seno es igual con la unidad, es un cuadrante ó $\frac{1}{2}\pi$, resulta que $\frac{1}{2}\pi$ será el valor de la integral $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, suponiendo que se principie á contar desde el parage en que $z=0$ hasta el parage en que $z=1$; y segun la notacion que hemos espresado (223), este modo de determinar la integral, se indica así:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Si hubiéramos querido contar esta integral desde el parage en que $z=\frac{1}{2}$, esto nos quería decir, que la integral completa se reducía á cero, cuando $z=\frac{1}{2}$; por lo que, en este caso, la ecuacion (α), nos dará para determinar la constante, la siguiente ecuacion

$$0=\text{arc.(sen.}=\tfrac{1}{2})+C,$$

lo que da $C=-\text{arc.(sen.}=\frac{1}{2})$; y como el arco que tiene por seno la mitad del radio es el arco de 30^0 ó $\frac{1}{6}\pi$, resulta, que $C=-\text{arco de } 30^0=-\frac{1}{6}\pi$.

Por lo que se tendrá para la integral completa en este caso

$$\int_{\frac{1}{2}}^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arc.(sen.}=z)-\tfrac{1}{6}\pi.$$

La cual queda aun indeterminada; pues tendrá un valor particular para cada valor que se dé á z. Si queremos determinarla enteramente, ó hallar su valor cuando $z=1$;

como el arco que tiene por seno la unidad es un cuadrante, resulta que

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arco de } 90^0-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{3}\pi.$$

Como la diferencial del arco cuyo coseno es z, es $-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, integrando, será

$$\int -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arc.(cos.}=z)+Const.$$

Si para determinar la constante, suponemos que la integral se reduce á cero, cuando $z=1$, tendrémos

$$0=\text{arc.(cos.}=1)+Const.$$

Pero el arco que tiene por coseno la unidad es el arco cero; luego aquí resulta la *Const.*$=0$; y por lo mismo se tendrá para el valor de la integral completa

$$\int_1^z -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\text{arc.(cos.}=z)\ (6);$$

y suponiendo ahora que $z=0$, como el arco que tiene cero por coseno es un cuadrante ó $\frac{1}{2}\pi$, resulta en este caso

$$\int_1^0 -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Si quisiésemos determinar la misma integral (6) para cuando se tuviese $z=-1$, esto es, que quisiésemos hallar el arco de círculo que principia en el punto en que su coseno es 1 y acaba en el punto en que su coseno llega á ser -1, resulta que como el arco cuyo coseno es la unidad negativa, es igual á una semicircunferencia ó á π, tenemos que en este caso

$$\int_1^{-1} -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\pi.$$

Como la diferencial del arco cuya tangente es z, es igual con $\frac{dz}{1+z^2}$, se tendrá

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc.}(\text{tang.}=z)+Const. \ (\gamma).$$

Si suponemos que esta integral se principie á contar desde el punto en que la tangente $z=0$, entónces quiere decir que la integral se reduce á cero cuando la variable es cero; por lo que $Const.=0$, y la integral completa será

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc.}(\text{tang.}=z).$$

Ahora, si queremos tomar el valor de esta integral cuando $z=\infty$, no tenemos mas que averiguar qué arco de círculo tiene la tangente infinita, y como este es el arco igual á un cuadrante ó á $\frac{1}{2}\pi$, se tiene, que

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Supongamos que se quisiese contar la integral desde el punto en que $z=-\infty$; esto es, supongamos que la integral se reduzca á cero cuando $z=-\infty$, y tendrémos para determinar la constante de la ecuacion (γ)

$$0=\text{arc.}(\text{tang.}=-\infty)+Const.;$$

pero el arco cuya tangente es el infinito negativo, es un cuadrante tomado negativamente; luego la ecuacion anterior se convierte en $0=-\frac{1}{2}\pi+Const.$,
que da $Const.=\frac{1}{2}\pi$; y la integral completa de la ecuacion (γ) será en este caso

$$\int_{-\infty}^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc.}(\text{tang.}=z)+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Si queremos ahora acabar de determinar esta integral, suponiendo que el estremo del arco sea el parage en que

$z=\infty$, resulta que como el arco cuya tangente es infinita es un cuadrante, se tendrá por último

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi=\pi.$$

Bien percibida esta notacion en los casos espresados, no costará ya ninguna dificultad entender el sentido de las demas que se puedan encontrar.

Aplicacion del Cálculo Integral á la cuadratura de las curvas, y á su rectificacion; á la cuadratura de las superficies curvas, y á la valuacion de los volúmenes que comprenden.

239. Puesto que la diferencial del espacio comprendido entre las coordenadas de una curva y el arco correspondiente, está representada (215) por zdx, y que z es una funcion de la abscisa x, que podrémos representar por X, resulta que el problema general de la cuadratura de las curvas, se reduce á la integracion de la diferencial Xdx.

Vamos, pues, á hacer aplicacion á las curvas que hemos considerado. Sea en primer lugar el círculo (fig. 66), cuya ecuacion considerando el origen en a, es

$$z^2=2ax-x^2, \text{ ó } z=\pm\sqrt{2ax-x^2};$$

luego (192) la diferencial del segmento aPN será

$$dx\sqrt{2ax-x^2}=dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=dx\times x^{\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}};$$

pero desenvolviendo (169) en serie $(2a-x)^{\frac{1}{2}}$, se tiene

$$(2a-x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2a}-\frac{x}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^2}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}}-\text{etc.}$$

luego $dx\sqrt{2ax-x^2}=x^{\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{\frac{1}{2}}=$

$$x^{\frac{1}{2}}dx(\sqrt{2a}-\frac{x}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^2}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}}-\text{etc.})=$$

$$x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a}-\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}}-\text{etc.}$$

é integrando será $\int .\mathrm{d}x\sqrt{2ax-x^2}=\frac{2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{2a}}{5}-$

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{288a^2\sqrt{2a}}-\text{etc.}$$

Haciendo $x=a$, se tendrá que el cuadrante de círculo

$$a\mathrm{EC}=\frac{2a^2}{5}\sqrt{2}-\frac{a^2}{5\sqrt{2}}-\frac{a^2}{56\sqrt{2}}-\frac{a^2}{288\sqrt{2}}-\text{etc.}$$

multiplicando el primer término arriba y abajo por $\sqrt{2}$, y sacando fuera de un paréntesis el factor

$\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ que resulta comun, se tendrá

$$a\mathrm{EC}=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{56}-\frac{1}{288}-\text{etc.}\right);$$

multiplicando por 4 ambos miembros, y simplificando el segundo por $\sqrt{2}$, se tendrá

Sup. de cír.$^{\circ}=a^2\times2\sqrt{2}\times(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{56}-\frac{1}{288}\ldots)=\pi a^2$

representando por π el factor numérico $2\sqrt{2}(\frac{4}{5}-\text{etc.})$ el cual despues de calcular un número suficiente de términos, viene á ser el 3,14159, etc., que hemos hallado ántes (238).

240. Siendo la ordenada de la elipse $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$, el segmento elíptico aMP será igual á

$$\frac{b}{a}\times\int .\mathrm{d}x\sqrt{2ax-x^2};$$

y como es nulo al mismo tiempo que el segmento circular aPN, se tendrá

$$a\mathrm{PM}:a\mathrm{PN}::\frac{b}{a}\int .\mathrm{d}x\sqrt{2ax-x^2}:\int .\mathrm{d}x\sqrt{2ax-x^2}::b:a.$$

Si cada parte del segmento elíptico guarda con el homólogo circular esta razon, toda la elipse guardará con el círculo la misma razon; porque en primer lugar tendrémos que

cuad.^{te} elíptico BCa: cuad.^{te} circular aEC :: b : a;

y cuadruplicando los términos de la primera razon, se tendrá, superf. de elipse : superficie de círculo :: b : a;

de donde, superf. de elipse$=\frac{b}{a}\times$ superf. de círc. (cuyo radio $=a)=\frac{b}{a}\times3{,}141$, etc. $\times a^2=3{,}141$, etc. $\times ab$.

Pero esta espresion es la de un círculo cuyo radio sea medio proporcional entre a y b; porque entónces el cuadrado de dicho radio será $=ab$; luego *la superficie de la elipse es igual á la de un círculo, cuyo radio sea medio proporcional geométrico entre los dos semiejes de la elipse.*

241. Sea ahora la parábola MAm (fig. 67), cuya ecuacion es $z=\sqrt{px}$; por consiguiente la diferencial del espacio APM será $z\mathrm{d}x=\mathrm{d}x\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$;

é integrando será $\int .p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=p^{\frac{1}{2}}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x$;

y poniendo z en vez de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, resulta que la espresion de la superficie del segmento parabólico ACMP será $\frac{2}{3}xz$; ó lo que es lo mismo *las dos terceras partes del rectángulo* APMD *de las coordenadas* AP, PM. Lo que manifiesta que la parábola es una curva cuadrable: propiedad que no tiene el círculo ni ninguna otra seccion cónica.

242. La hipérbola, considerando el orígen en el vértice, tiene por ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$,

y por lo mismo será (fig. 66) AQR$=\frac{b}{a}\int .\mathrm{d}x\sqrt{2ax+x^2}$,

que tambien podríamos integrar por un método análogo al espuesto (239).

243. La diferencial del arco de una curva, referida á

coordenadas perpendiculares entre sí, está espresada (209) por $\sqrt{dx^2+dz^2}$;
luego si sustituimos en ella en vez de dz^2 su valor, sacado de la ecuacion diferencial de la curva propuesta, tomará la forma Xdx, y su integral dará la longitud de esta curva. Pedir la longitud del arco de una curva, es pedir su *rectificacion;* porque la solucion de este problema cuando se obtiene exactamente, nos conduce á determinar una línea recta que sea igual en longitud al arco de que se trata.

Así como llamando a el radio de un círculo, la diferencial del arco es $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,
cuando se supone el orígen en el centro; y $\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$,
cuando se le supone en la circunferencia; y bajo cualquiera de estas formas que se considere, no se puede obtener su integral sinó por aproximacion, se sigue que la circunferencia no es rectificable.

244. Pasemos á la elipse, y tomemos por ecuacion de esta curva $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la diferencial de su arco (209)

$$\text{será } dx\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

cuyo valor aproximado podríamos hallar por series.

245. Pasemos á la parábola, cuya ecuacion es $z^2=px$, la diferencial de su arco será

$$dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=d\sqrt{1+\frac{p^2}{4z^2}}=dx\sqrt{1+\frac{p^2}{4px}}=$$

$$dx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}=\tfrac{1}{2}dx\sqrt{4+\frac{p}{x}}=\tfrac{1}{2}dx\left(4+\frac{p}{x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

cuyo valor aproximado se sacará por series.

246. Siendo la ecuacion de la hipérbola

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2), \text{ se tiene } \frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$$

para la diferencial de su arco, cuya integral aproximada se podrá hallar por series.

247. Las primeras superficies curvas que han considerado los Geómetras, han sido las de revolucion; porque las diferenciales de sus superficies y de los volúmenes que comprenden, tienen una espresion mas simple que sus análogas entre las superficies curvas en general.

Cuando la curva que gira es una seccion cónica, se origina un cuerpo á que se da el nombre de *conoide;* si es parábola, se llama *conoide parabólico* ó *paraboloide;* si elipse, se llama *conoide elíptico* ó *elipsoide;* cuando la semielipse gira al rededor del eje mayor, resulta el elipsoide *prolongado*, y cuando al rededor del menor, el *aplanado*. El elipsoide, de cualquier clase que sea, recibe tambien el nombre de *esferoide*. Finalmente, cuando la seccion cónica que gira es una hipérbola, recibe el nombre de *conoide hiperbólico* ó *hiperboloide*.

248. Con el objeto de hacer aplicacion de las fórmulas (216 y 217), nos propondrémos hallar la superficie y volúmen del paraboloide engendrado por el arco AM (fig. 68) al rededor del eje AP, y tendrémos que como la ecuacion de la parábola es $z^2=px$; da

$$x=\frac{z^2}{p}, \text{ y } dx=\frac{2zdz}{p},$$

cuyo valor sustituido en el radical de la espresion

$$ds=2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2},$$

é integrando, dará superf. de paraboloide $=\ldots$

$$\ldots\int 2\pi\times z\sqrt{\frac{4z^2dz^2}{p^2}+dz^2}=\int\frac{2\pi zdz}{p}\sqrt{4z^2+p^2};$$

para integrar esta espresion, harémos $p^2+4z^2=u^2$, que diferenciando da $8zdz=2udu$,

de donde dividiendo por 4 sale $2z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}u\mathrm{d}u$;
y haciendo las sustituciones correspondientes en la espresion anterior, se convertirá en

$$\int.\frac{\pi u\mathrm{d}u}{2p}\times(u^2)^{\frac{1}{2}}=\int.\frac{\pi u^2\mathrm{d}u}{2p}=\frac{\pi u^3}{6p}+\mathrm{C};$$

que sustituyendo en vez de u su valor $(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}$,

se convierte en $\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}+\mathrm{C}$;

y determinando la constante, de manera que se reduzca la integral á 0 cuando $z=0$, se tendrá

$$\mathrm{C}=-\frac{\pi p^3}{6p}=-\frac{\pi p^2}{6};\quad \text{por lo que}$$

superf. de paraboloide $=\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{\pi p^2}{6}$.

Si nos propusiéramos hallar el volúmen del mismo paraboloide, sustituiríamos en la espresion

$$\mathrm{d}v=\pi z^2\mathrm{d}x,$$

en vez de z^2 su valor px, é integraríamos; lo que daría volúm. de paraboloide $=\int.\pi z^2\mathrm{d}x=\int.\pi px\mathrm{d}x=$

$\frac{\pi px^2}{2}=\frac{\pi px\times x}{2}=\pi z^2\times\frac{x}{2}=$ círculo LRMS$\times\frac{\mathrm{AP}}{2}=$

$\frac{1}{2}$ cilindro LNQM.

249. Para hallar el volúmen del elipsoide, sustituirémos en la misma espresion en vez de z^2 su valor

$\frac{b^2}{a^2}\times(2ax-x^2)$, y tendrémos que el volúmen del cuerpo que engendra el segmento de elipse APM (fig. 69), estará representado por

$$\int.\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+\mathrm{C};$$

que como dicho cuerpo se reduce á 0 cuando $x=0$, la constante es cero; luego si suponemos ahora que

$x=2a$, resultará para elipsoide prolongado ACBD, la espresion $\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a\times4a^2-\frac{8a^3}{3}\right)=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{12a^3-8a^3}{3}\right)$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\times\frac{4a^3}{3}=\frac{4\pi b^2a}{3}.$$

250. Para hallar el volúmen del elipsoide aplanado, deberemos considerar que la semielipse CAD gira al rededor del eje menor CD, cuya ecuacion respecto de este eje (86) es $z^2=\frac{a^2}{b^2}(2bx-x^2)$;

que procediendo de un modo análogo al precedente, y haciendo $x=2b$ para tener el de todo el elipsoide, nos resultará vol. de elipsoide aplanado $=\frac{4}{3}\pi a^2b$.

Ahora, si con este valor y el anterior formamos proporcion, tendrémos

Elips. prol.: Elips. apl.:: $\frac{4}{3}\pi ab^2:\frac{4}{3}\pi a^2b::b:a$;

que quiere decir, que *el elipsoide aplanado es mayor que el prolongado, en la misma razon que el semieje mayor es mayor que el semieje menor.*

251. Cuando $a=b$, el cuerpo propuesto se convierte en una esfera, y la espresion de su volúmen es

$\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\times3{,}14$, etc. $\times a^3=4{,}1887$, etc. $\times a^3$,

que no se diferencia del hallado (1. 435 cor.) sinó en que allí se espresa en valores del diámetro, y aquí lo está en valores del radio.

MECANICA.

Nociones preliminares.

252. Se dice que un cuerpo *está en movimiento*, cuando pasa sucesivamente por diferentes partes del espacio; y que