está en reposo, cuando permanece constantemente en un mismo sitio *.

253. *Ningun cuerpo puede pasar por sí mismo del reposo al movimiento, ni del movimiento al reposo;* cuya proposicion, conocida con el nombre de *ley de inercia*, es un hecho que la esperiencia tiene acreditado en todos tiempos.

Toda causa, cualquiera que sea su naturaleza, que sea capaz de imprimir movimiento á un cuerpo, ó de alterar el que ya tuviese, se llama *fuerza* ó *potencia;* y se llama *direccion* de la fuerza á la recta que dicha fuerza obligaria á describir al punto ó cuerpo á que estuviese aplicada, si obrase por sí sola.

254. Como un punto ó cuerpo no puede ir por muchos caminos á un mismo tiempo, resulta que cuando muchas fuerzas aplicadas á un punto ó á un cuerpo, se destruyen mutuamente, el cuerpo no puede tener movimiento alguno, y se dice que dichas fuerzas *se equilibran* ó *están en equilibrio*. Si no se destruyen, *el cuerpo seguirá una cierta direccion, como si solo obedeciese á una fuerza.* Al conjunto de fuerzas que obran sobre un cuerpo, se llama *sistema* de fuerzas; y *resultante* ó *derivada* del sistema, á la fuerza única que resulta de todas las demas, que entónces reciben el nombre de *componentes*.

255. Se llama *Mecánica* la ciencia del movimiento y equilibrio de los cuerpos: se divide en *Estática*, *Dinámica*, *Hidrostática* é *Hidrodinámica;* la primera trata del equilibrio de los cuerpos sólidos; la segunda de su movimiento; la tercera trata del equilibrio de los fluidos; y la cuarta de su movimiento.

La Mecánica considerada solo teóricamente, se caracteriza con el nombre de *Mecánica racional*, y tiene por objeto el determinar en general todas las leyes del equilibrio y movimiento de los cuerpos; y cuando tiene por objeto aplicar inmediatamente estas leyes á los usos de la sociedad, se le caracteriza con el nombre de *Mecánica práctica*, ó *Mecánica aplicada*, ó *Mecánica industrial*.

* Solo por abstraccion podemos considerar el estado de reposo; porque no hay una partícula en reposo en todo el universo. Los planetas, inclusa la tierra, se mueven al rededor del sol; y el sol mismo tiene un movimiento al rededor de su eje.

256. En una fuerza hay que considerar particularmente su *direccion* y su *intensidad*. Las direcciones se representan por líneas rectas; en estas se toman unas magnitudes proporcionales á las fuerzas, y representan sus intensidades; y en el cálculo se espresan por las letras P, Q, S, etc.

ESTATICA.

DEL EQUILIBRIO DE UN PUNTO MATERIAL.

Proposiciones generales acerca de la composicion, y descomposicion de las fuerzas.

257. En la Mecánica hay que resolver con mucha frecuencia el problema *de la composicion* de las fuerzas, y el *de su descomposicion*. El primero consiste en hallar la resultante de un sistema dado de fuerzas; y en el segundo se trata de hallar dos ó mas fuerzas, cuyo efecto sea el mismo que el de una dada. La resolucion del segundo problema se deduce de las circunstancias del primero. Se dice que dos fuerzas son *iguales* cuando producen efectos iguales; por consiguiente, *si dos fuerzas iguales se aplican á un mismo punto en sentidos contrarios, se equilibran.*

258. *Si dos fuerzas desiguales* P, Q, *se aplican á un mismo punto en sentidos contrarios, la accion sobre este punto, ó la resultante de dichas fuerzas, es igual á su diferencia.* Porque la menor destruirá en la mayor una parte igual con ella, y de consiguiente el movimiento del punto solo dependerá del esceso que la mayor lleve á la menor.

259. *Si dos ó mas fuerzas* P, Q, *etc., obran sobre un punto en la direccion de una misma recta, y en el mismo sentido,*

el efecto sobre dicho punto será el mismo que el de una fuerza igual á P+Q+etc. Porque todas conspiran á mover el punto de un mismo modo.

260. *Si un número cualquiera de fuerzas obran sobre un punto en la direccion de una misma recta, y en la opuesta de su prolongacion, la resultante de todas será igual á la suma de las que obran en un sentido, menos la suma de las que obran en el sentido contrario: ó mas general, la resultante es igual á la suma algebráica de todas ellas.* Esto es una consecuencia de las dos proposiciones anteriores.

261. *Cuando muchas fuerzas, que obran sobre un mismo punto, se equilibran, cada una de ellas se puede considerar como igual y directamente opuesta á la resultante de todas las otras.*

En efecto, si las fuerzas P, Q, S, T (fig. 70), obran sobre el punto *m*, y se equilibran, aplicando al sistema una fuerza T' igual y contraria á T, las fuerzas T y T' se equilibrarán (257), y solo quedarán de todo el sistema las tres fuerzas P, Q, S.

Por otra parte, el conjunto de las cuatro fuerzas P, Q, S, T, se halla en equilibrio por el supuesto; luego tenemos aquí cinco fuerzas P, Q, S, T, T', tales que la T se equilibra con las tres P, Q, S, y con la T'; luego T' produce el mismo efecto que las tres P, Q, S, y por lo tanto será su resultante; y como T' es igual y directamente opuesta á T, se infiere que T es igual y directamente opuesta á la resultante de las demas.

262. *Un sistema de fuerzas no se altera aunque se suponga que se agrega otro que por sí mismo se equilibra;* pues este no podrá producir ningun efecto sobre el anterior.

263. *Cuando una fuerza obra sobre un punto* m (fig. 71), *se puede suponer que su accion está aplicada en el punto* P, *ó en cualquier otro* Q *de su direccion, con tal que este segundo se halle invariablemente unido al primero.*

Porque si en la direccion de *m*P, aplicamos dos fuerzas Q, S, iguales entre sí y con P, y que obren en sentido contrario la una de la otra, estas dos fuerzas no alterarán el efecto de la primera P, ó lo que es lo mismo, se podrá suponer que el efecto de la fuerza P es el mismo que el del sistema de las tres P, Q, S; y como P=S, y obran en sentido contrario, se destruirán; luego solo quedará del sistema la fuerza Q, que es igual con P, cuya accion se ha trasladado al punto Q, donde producirá el mismo efecto, pues estos puntos conservan siempre la misma posicion.

264. *Cuando dos fuerzas forman ángulo, la direccion de su resultante pasará por dicho ángulo.*

Porque si las dos fuerzas P y Q (fig. 72), obran sobre el punto *m* formando el ángulo P*m*Q; el efecto de la fuerza Q, si obrase por sí sola, estaría reducido á hacer pasar el punto *m* hácia Q, por la parte inferior de la P*m*P'; y el efecto de la fuerza P tratará de hacerle pasar desde *m* á P por la parte superior de la Q*m*Q'; luego para que el punto *m* obedezca á las dos fuerzas, será preciso que pase por dentro del ángulo P*m*Q, que es la parte del plano que se halla inferior á la línea P*m*P' y superior á la Q*m*Q'.

265. *Cuando dos fuerzas obran sobre un punto formando un ángulo cualquiera, su resultante sigue la direccion de la diagonal del paralelogramo construido sobre dichas dos fuerzas.*

Aquí pueden ocurrir dos casos, á saber: que las fuerzas sean iguales ó desiguales.

1° Si las dos fuerzas *m*C, *m*B (fig. 73), son iguales, y obran sobre el punto *m*, su resultante dividirá en dos partes iguales el ángulo C*m*B; pues no hay ninguna razon para que se incline mas hácia la fuerza *m*C que hácia la *m*B; luego seguirá la diagonal *m*D del rombo *m*BDC.

2° Si la fuerza *m*B (fig. 74), crece y se convierte en *m*F=2*m*B, construyendo el segundo paralelogramo DBFG, tendrémos que si el punto *m* se hallase solicitado solamente de las fuerzas *m*C, *m*B, seguiría la diagonal *m*D del rombo *m*CDB; á esta resultante *m*D ó á sus componentes *m*B, *m*C, se les pueden sustituir sus iguales CD, BD, que obren en la direccion de C hácia D, y de B hácia D, esto es, que

obren empujando al punto D. Ahora, la fuerza BD que impele al punto D, produce el mismo efecto que si tirase del punto B; y acompañada de la fuerza BF=BD, producirá la resultante BG, y se podrá sustituir por ellas; luego las tres fuerzas CD, BD, BF, ó sus iguales mB, mC, BF, las tenemos reducidas á las dos CD, y BG. Pero el punto de aplicacion de la CD se puede suponer (263) que es el punto G, que está invariablemente unido al punto D; luego este punto se hallará solicitado por la accion simultánea de las dos fuerzas CD, BG, ó de las tres CD, BD, BF, ó de sus iguales mB, mC, BF; luego el punto G es un punto de la resultante del sistema de estas tres fuerzas; y como (259) las mB, BF, equivalen á una sola igual á su suma mF, se sigue que la resultante de las dos fuerzas mC, mF, pasa por el punto G; pero ella parte del punto m, luego quedará determinada por los puntos m, G, ó lo que es lo mismo, seguirá la diagonal mG del paralelogramo mCGF.

Del mismo modo se demuestra cuando la mB se convierte sucesivamente en 3mB, 4mB,...$n\times m$B; y como se repetiría la misma demostracion cuando permaneciese constante la mB, y la mC fuese valiendo sucesivamente 2mC, 3mC, 4mC,...$m\times m$C, resulta que cualesquiera que sean las magnitudes de las fuerzas mC, mB, su derivada seguirá siempre la diagonal del paralelogramo formado sobre dichas fuerzas.

266. *La magnitud de la resultante de dos fuerzas cualesquiera* P y Q, *ó* mC, mB (fig. 75), *está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas fuerzas.*

Para demostrarlo, observarémos que pues las fuerzas P y Q equivalen á una que pase por la direccion mR, para que haya equilibrio será preciso introducir una nueva fuerza R′, que destruya á la resultante, la cual deberá ser igual con ella y directamente opuesta (257); y pues que las tres fuerzas P, Q y R′, se equilibran, podremos suponer (261) que la fuerza Q se equilibre con las P y R′, y la resultante de estas dos pasará por la prolongacion mQ′ de Qm, y estará representada por mF=mB; pero aquí la componente P es dada de magnitud y direccion; de la otra componente R′ solo se conoce su direccion; y la resultante Q′ es conocida en magnitud y direccion, pues ha de ser igual con mB; luego solo nos falta determinar la magnitud de la componente mR′. Para esto, unirémos los puntos F y C, y tirarémos por F la FG paralela á mC; y digo que mG será la magnitud de la componente R′. Porque si no lo fuese, sería mayor ó menor; y si supusiéramos que estaba representada por mG′<mG, construyendo sobre mC y mG′ un paralelogramo, su diagonal mF′ espresaría la direccion de la resultante de las fuerzas P y R′; pero esta resultante debe pasar por la direccion mF, prolongacion de mB; luego debería pasar por dos parages distintos á un mismo tiempo, lo que es absurdo; luego no se puede suponer que mG′<mG represente á la fuerza R′.

Del mismo modo se demuestra que mG″>mG no puede representar á R′; luego no pudiendo esta fuerza estar representada por una recta menor ni mayor que mG, lo estará por la misma mG. Pero mG=mD por la igualdad de los triángulos mBD y mFG (I. 261), luego la magnitud de la resultante R está representada por mD, diagonal del paralelogramo mBDC.

Esc. Recíprocamente, *toda fuerza* R *se puede descomponer en otras dos cualesquiera* P, Q: para lo cual no hay mas que construir sobre la recta dada como diagonal un paralelogramo cualquiera; y los lados que forman el ángulo de uno de los estremos de la fuerza dada, serán las magnitudes y direcciones de las fuerzas que se piden. Aquí puede observarse de paso, que este problema es indeterminado; porque (I. 314) una recta puede ser diagonal de muchos paralelogramos.

267. *La resultante* R *de dos fuerzas* P *y* Q (fig. 76), *se puede espresar por medio de estas dos fuerzas y del ángulo que forman.*

Si tiramos desde D la DG perpendicular á mQ, y llama-

mos a al ángulo PmQ, el triángulo rectángulo BDG, y el oblicuángulo mBD, dan (I. 464 esc. y 335)

$$DG=BD\text{sen}.DBG=mC\text{sen}.PmQ=P\text{sen}.a,$$
$$BG=BD\cos.DBG=mC\cos.PmQ=P\cos.a,$$

y $mD^2=BD^2+mB^2+2mB\times BG$;

que poniendo en vez de mD, BD, mB y BG, sus valores, se tendrá $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos.a$.

Cor. El triángulo mDB da (I. § 468)

$$BD:mB:mD::\text{sen}.BmD:\text{sen}.mDB:\text{sen}.mBD;$$

pero sen. mDB=sen.PmR,

y (I. § 459 cor.) sen.mBD=sen.PmQ.

Luego si sustituimos estos valores, y en vez de las líneas BD, mB, mD, las fuerzas P, Q, R, que representan, tendrémos

$$P:Q:R::\text{sen}.QmR:\text{sen}.PmR:\text{sen}.PmQ;$$

que nos dice, que *las tres fuerzas* P, Q, R, *de las que una es resultante de las otras, son entre sí como el seno del ángulo que forman las otras dos.*

268. *La resultante de tres fuerzas* P, Q, S, *aplicadas á un mismo punto, y cuyas direcciones no se hallan en un mismo plano, está representada en magnitud y direccion, por la diagonal del paralelepípedo construido sobre las partes de las direcciones de estas fuerzas que espresan sus magnitudes respectivas.*

Sean mB, mC y mD (fig. 77) las magnitudes respectivas de las fuerzas P, Q, S, y mBCDF el paralelepípedo construido sobre estas rectas. La resultante r de las dos fuerzas P y Q, está representada por la diagonal mE del paralelogramo mBEC; y á causa de que EF es igual y paralela con mD, la figura mEFD es un paralelogramo. Luego la diagonal mF de este paralelogramo, ó del paralelepípedo, representará la resultante de estas dos fuerzas r y S ó de las tres P, Q, S.

Cor. Si las fuerzas P, Q, S, son rectangulares, se tendrá

$$\begin{cases} r^2=P^2+Q^2, \\ \text{y } R^2=r^2+S^2=P^2+Q^2+S^2. \end{cases}$$

269. Reciprocamente, *una fuerza* R *aplicada en un punto* m, *siempre se puede descomponer en otras tres, respectivamente paralelas á tres ejes ó rectas tiradas por un mismo punto del espacio.*

Porque si se toma mF para que represente la fuerza R, y por el punto m se tiran tres rectas mP, mQ, mS, paralelas á los ejes dados, estas rectas determinarán tres planos PmQ, PmS, QmS; y haciendo pasar despues por el punto F tres planos respectivamente paralelos á estos, se formará un paralelepípedo del que mF será la diagonal, y cuyas aristas mB, mC, mD, contiguas al punto m, serán las componentes buscadas.

Si el paralelepípedo es rectángulo, y se une el punto F con los B, C, D, el triángulo mBF rectángulo en B, dará $mB=mF\cos.BmF$;

el mCF rectángulo en C, dará $mC=mF\cos.CmF$;

y el mFD rectángulo en D, dará $mD=mF\cos.DmF$; y espresando por α, β, γ, los ángulos BmF, CmF y DmF, que forma la diagonal mF con las aristas mB, mC, mD á que llamarémos P, Q, S, y R á la resultante mF, las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$P=R\cos.\alpha,\ Q=R\cos.\beta,\ \text{y } S=R\cos.\gamma;$$

donde se ve, que *la accion de una fuerza* R, *estimada segun una direccion dada, se halla multiplicando esta fuerza por el coseno del ángulo que forma su direccion con la direccion dada.*

Sumando los cuadrados de estas tres ecuaciones, y resolviendo en factores el segundo miembro, resulta

$$P^2+Q^2+S^2=R^2(\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2);$$

y como en este caso (268 cor.) $R^2=P^2+Q^2+S^2$, simplificando se tendrá $\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2=1$.

Composicion de las fuerzas que concurren en un punto.

270. *Para determinar la resultante de un número cual-*

quiera de fuerzas aplicadas á un mismo punto, y situadas ó no en un mismo plano, se halla primero la resultante de dos de estas fuerzas; despues se compondrá esta resultante con una tercera fuerza; luego, se hallará la resultante de esta segunda resultante y de otra fuerza; y así se continuará hasta haber hallado la resultante de todas; con lo cual se habrá reducido todo el sistema á una sola fuerza, que en el caso de equilibrio será cero.

Supongamos que dichas fuerzas estén representadas por las líneas mA, mA', mA'', mA''', etc., (fig. 78), que parten desde el punto de aplicacion m. Por el punto A tiremos una línea AB, igual y paralela con mA'; por B tiremos la BC, igual y paralela con mA''; y así sucesivamente. Con lo cual formarémos una porcion de polígono, cuyo número de lados será igual al de las fuerzas dadas; y uniendo el estremo de su último lado con el punto m, por medio de una recta, está será la resultante buscada.

En efecto, la línea mB es la resultante de las fuerzas mA y mA'; pues tirando la A'B resulta el paralelogramo $mABA'$, cuya diagonal es mB, y cuyos lados mA, mA' son las dos fuerzas que hemos considerado. Por la misma razon la mC es la resultante de las fuerzas mB y mA'', ó de las tres mA, mA', mA''; y así sucesivamente.

271. Ahora, si por el punto m tiramos una línea cualquiera mX, y desde los puntos A, B, C, D, se tiran á esta línea las perpendiculares AE, BF, CG, DH, se tendrá

$mH = mE + EF + FG + GH$;

pero mH es la proyeccion de la resultante mD sobre el eje arbitrario mX, ó es la magnitud de dicha resultante, estimada en la direccion de dicho eje: y mE, EF, FG, GH, son las magnitudes de las componentes estimadas en la direccion del mismo eje; luego *la magnitud de la resultante de un número cualquiera de fuerzas que obran sobre un punto libre, estimada en la direccion de un eje cualquiera tirado por dicho punto, es igual á la suma de las componentes estimadas en la direccion del mismo eje.*

Composicion y equilibrio de las fuerzas paralelas.

272. *La resultante de dos fuerzas paralelas, que obran en el mismo sentido, es paralela á la direccion de estas fuerzas é igual á su suma; y las distancias de la direccion de esta resultante á las de las componentes, son inversamente proporcionales á estas fuerzas.*

Sean P y Q dos fuerzas paralelas, representadas por AM, BY (fig. 79), y que se hallen aplicadas á la recta inflexible AB; si á esta aplicamos las fuerzas AH, BK, iguales y contrarias, no se alterará el valor de la resultante (262). Esto supuesto, construyamos los paralelogramos AHLM, BKNY, y tendrémos que la resultante de las fuerzas P y Q, será la misma que la de las fuerzas AL, BN. Ahora, por ser las AM, BY paralelas, resultará (I. 284) que los ángulos $MAB + YBA = \pi$, luego $LAB + ABN > \pi$, y por lo mismo los $BAE + ABE < \pi$; luego las dos fuerzas AL, BN concurrirán (I. 287) en un punto por la parte superior de la AB, tal como E; si concebimos aplicadas estas dos fuerzas (265) en el punto de concurso E, y representadas por las $EZ = AL$ y $EV = BN$, tiramos la recta EC paralela á las AM, BY, y construimos los paralelogramos EGZT, y EDVO, tendrémos descompuestas cada una de las EZ, EV en otras dos, á saber, la EZ en las EG, ET, y la EV en las ED, EO; y la resultante de las dos fuerzas P y Q será aun la misma que la de las cuatro fuerzas EG, ED, ET, y EO; pero las dos primeras son iguales y contrarias, luego se destruirán, y sólo quedarán para formar la resultante las dos fuerzas ET y EO, que obran en el mismo sentido en la direccion de EC, y que por consiguiente se reducen á una sola igual á su suma (259); luego $R = ET + EO$; y como $ET = AM = P$, y $EO = BY = Q$,

resulta $R = P + Q$ (1).

Ahora, los triángulos EZT y EAC son semejantes (I. 328), y por lo mismo dan $ET : EC :: ZT : AC$; y los EOV y ECB nos

dan tambien EC:EO::CB:OV; multiplicando estas dos proporciones, y simplificando, se tendrá ET:EO::BC:AC; y siendo ET=AM=P, y EO=BY=Q, sustituyendo resultará P:Q::BC:AC; con lo cual quedan demostradas las dos partes de la proposicion.

273. Componiendo esta proporcion será

$$P+Q:P::BC+AC:BC;$$

ó poniendo en vez de P+Q su igual R, y en lugar de BC+AC su igual AB, tendrémos R:P::AB:BC; y comparando con el consecuente será R:Q::AB:AC; y como alternando estas dos proporciones tendrán una razon comun, podrémos poner R:AB::P:BC::Q:AC; ó (I. § 185)

$$R:P:Q::AB:BC:AC.$$

Pero, si por un punto cualquiera de una de las fuerzas, ó de su resultante, se tira una recta *mon*, de cualquier modo que sea, que encuentre á las fuerzas ó á sus prolongaciones, se verificará siempre (I. 320 cor. 2º) que

$$AB:BC:AC::mn:no:mo;$$

luego podrémos poner (I. § 184, 2ª cor.)

$$R:P:Q::mn:no:mo;$$

donde se ve, que *si se cortan las direcciones de dos fuerzas paralelas y de su resultante, por una recta cualquiera, cada una de estas fuerzas podrá estar representada por la parte de esta recta interceptada por las otras dos.*

274. La anterior serie de razones iguales nos da las tres proporciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} R:P::mn:no, \text{ que da } R\times no=P\times mn \ (2) \\ R:Q::mn:mo, \text{ que da } R\times mo=Q\times mn \ (3) \\ P:Q::no:mo, \text{ que da } P\times mo=Q\times no \ (4) \end{array}\right\}$$

Con estas tres ecuaciones y con la (ec. 1), tenemos lo suficiente para resolver completamente el problema de la composicion de dos fuerzas paralelas que obren en una misma direccion.

En efecto, la (ec. 1) da la magnitud de la resultante R, y cualquiera de las dos (ecs. 2 y 3) determina el punto *o* por donde debe pasar; la (ec. 2) da

$$no=\frac{P\times mn}{R}, \text{ y la (ec. 3) da } mo=\frac{Q\times mn}{R};$$

$$\text{ó } no=\frac{P\times mn}{P+Q} \ (5), \ mo=\frac{Q\times mn}{P+Q} \ (6).$$

Si fuese P=Q, resultaría $no=\frac{1}{2}mn=mo$; que quiere decir, que *la resultante de dos fuerzas paralelas é iguales, pasa por el punto medio de la recta que une sus puntos de aplicacion.*

275. Si la fuerza Q obrase en sentido contrario de la P, se debería mudar su signo, con lo cual las fórmulas anteriores se convertirían en

$$R=P-Q \ (7), \ no=\frac{P\times mn}{P-Q} \ (8), \ mo=\frac{-Q\times mn}{P-Q} \ (9).$$

Si P>Q, la *mo* será negativa, ó lo que es lo mismo, se deberá contar desde *m* hácia la izquierda, y la resultante obrará en el mismo sentido que P.

Pero si P<Q, la *mo* será positiva y mayor que *mn* (pues será igual á la misma *mn* multiplicada por un quebrado impropio), ó la resultante tendrá su punto de aplicacion á la derecha de *n*, y obrará en el mismo sentido que la fuerza Q, que en este caso debe ser de B hácia arriba.

276. *La resultante de muchas fuerzas paralelas* P, P′, P″, etc., (fig. 80), *ya estén ó no en un mismo plano, es igual á la suma de estas fuerzas, dándoles signos convenientes.*

Porque siendo paralelas las fuerzas P y P′, su resultante R′ es paralela á estas fuerzas, y se tiene R′=P+P′; y siendo R′ y P″ paralelas á P, son paralelas entre sí; luego su resultante R″ es paralela á estas fuerzas, y se tiene R″=R′+P″ ó R″=P+P′−P″, y así sucesivamente. Si la fuerza P″ obrase en direccion opuesta á las P y P′, al hallar la resultante de R′ y P″, tendríamos R″=R′−P″=P+P′−P″, que es la suma algebráica de P, P′ y −P″,

Cor. Luego si espresamos por R la resultante de un nú-