librio; y está tanto mas firme, cuanto mayor latitud tiene la base de sustentacion.

Un hombre que tiene sus piés unidos por sus talones, estando estos en línea recta y las puntas muy abiertas, tiene muy poca estabilidad; porque al menor movimiento la vertical sale fuera de esta pequeña base; no puede inclinarse hácia adelante á menos que no lleve al mismo tiempo hácia atras la parte posterior de su cuerpo, para hacer que la vertical caiga dentro de su base. Un hombre que tiene sus piés uno delante de otro en una misma recta, está en el *mínimo* de estabilidad lateral; los volatineros adquieren sin embargo el hábito de mantenerse con seguridad en esta posicion.

Cuando un hombre está sentado, le es imposible levantarse, manteniendo su cuerpo verticalmente sobre su asiento; porque en este caso su centro de gravedad está sobre el asiento, y cae fuera de la base formada por sus piés; se ve, pues, obligado á inclinarse hácia delante, para hacer que su centro de gravedad pase por esta base.

Un hombre que lleva un fardo á las espaldas, se ve precisado á inclinarse adelante; porque el fardo y él, forman un sistema, cuyo centro de gravedad pasaría mas allá de su base, si se mantuviese verticalmente.

Un hombre que lleva un fardo en sus brazos, se ve por la misma razon en la necesidad de inclinarse hácia atras.

Los diversos movimientos que hacemos naturalmente con los brazos para sostenernos cuando tropezamos, no tienen otro objeto que el procurar que la direccion del centro de gravedad pase por la base formada por los piés. Esta es la razon por qué los volatineros empléan el *balancin* durante sus juegos, ó hacen movimientos con los brazos; y resulta que está mas diestro el que sin llevar balancin se mueve menos, ó el que no hace ningun movimiento.

295. De lo dicho resulta que la posicion en que el soldado tendría mas estabilidad, sería aquella en que formase con sus piés un ángulo recto PAQ (fig. 86); porque entón-

ces concibiendo unidos los estremos P y Q de los piés, su base de sustentacion estaria representada por el triángulo rectángulo isósceles PAQ, que segun hemos visto (194) es un máximo. Y el soldado estaría igualmente firme, formando con sus piés un ángulo obtuso RAQ, ó uno agudo SAQ de igual complemento; pues en ambos casos las bases de sustentacion serían dos triángulos equivalentes ARQ, ASQ; pero como el soldado es un hombre que viene del campo, y no está acostumbrado á estas posiciones, por esta razon previene muy acertadamente la táctica, que el ángulo que han de formar los piés del recluta sea un poquito menos que el recto ó escuadra.

Terminarémos este asunto deduciendo las fórmulas generales que sirven para determinar en todos los casos los centros de gravedad. Con este objeto, observarémos que si á diferentes puntos unidos entre sí, de un modo invariable, y cuyas coordenadas son respectivamente x, z, u; x', z', u'; x'', z'', u'', etc., se aplican los pesos P, P', P'', etc., resulta que, considerando estos pesos como fuerzas paralelas, podrémos determinar las coordenadas $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$, del punto de aplicacion de su resultante, al cual se le llama tambien *centro de las fuerzas paralelas*, por medio de las ecuaciones (d), (e), (f), del § 282.

Si espresamos por m, m', m'', etc., las masas que corresponden á los pesos P, P', P'', etc., y suponemos que los puntos no se hallen tan distantes entre sí que tengamos que atender á la variacion de la fuerza de la gravedad, resulta que podrémos suponer que todas estas masas se hallan solicitadas por una misma fuerza de gravedad, que espresaremos por g, y tendrémos

(286 esc.) $P=mg$, $P'=m'g$, $P''=m''g$, etc.

Luego si sustituimos en vez de P, P', P'', etc., estos valores en dichas ecuaciones (d), (e), (f), y suprimimos la g, que resulta comun en todos los términos del numerador y denominador tendrémos

$$x_{,}=\frac{mx+m'x'+m''x''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}}\ (g).$$

$$z_{,}=\frac{mz+m'z'+m''z''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}}\ (h).$$

$$u_{,}=\frac{mu+m'u'+m''u''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}}\ (i).$$

Algunas veces se empléa una notacion mas cómoda para representar estas ecuaciones, y es la siguiente:

$$x_{,}=\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)}\ (k),\quad z_{,}=\frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)}\ (l),\quad u_{,}=\frac{\Sigma(mu)}{\Sigma(m)}\ (ll);$$

espresando el carácter Σ, que es la *sígma* ó S *mayúscula griega*, una suma de cantidades de la misma forma que la que está comprendida en el paréntesis.

Cuando se aplican estas fórmulas para hallar el centro de gravedad de toda la masa de un cuerpo, entónces es preciso considerar cada *molécula* ó *partícula* de por si; y en este caso, en vez de la cantidad m, debe ponerse dm, para espresar el límite de las pequeñas partes en que se supone dividida la masa, ó la diferencial de la masa: en cuyo caso la Σ que representaba una suma de cantidades finitas, espresará ahora una suma de diferenciales, y por lo mismo se indicará con el signo integral f.

Por lo que las tres últimas ecuaciones, se nos convertirán en

$$x_{,}=\frac{f.(xdm)}{f.(dm)}\ (m);\quad z_{,}=\frac{f.(zdm)}{f.(dm)}\ (n);\quad u_{,}=\frac{f.(udm)}{f.(dm)}\ (o).$$

Las cuales nos dicen en general, que *para tener la distancia del centro de gravedad de un cuerpo á un plano, es necesario multiplicar uno de los elementos ó moléculas por su distancia á este plano, é integrar en toda la estension del cuerpo: con lo cual se tendrá la suma de los momentos de estos elementos; y despues será necesario dividir por la integral de todos los elementos, que es la masa de todo el cuerpo.*

De estas ecuaciones solo se necesitan las dos primeras, si se supone que todas las masas se hallan en un mismo plano; y solo se tendrá necesidad de la primera si todas se hallan en línea recta, ó están de tal modo dispuestas, que todo el sistema se pueda reducir á partes, cuyos centros de gravedad se hallen en línea recta.

En vez de $f.(dm)$, podemos poner la masa del cuerpo que espresarémos por M; y quitando el divisor en las ecuaciones anteriores, se convertirán en

$Mx_{,}=f.(xdm)$ (p); $Mz_{,}=f.(zdm)$ (q); $Mu_{,}=f.(udm)$ (r); que nos dicen, que *la masa de un cuerpo multiplicada por la distancia de su centro de gravedad á un plano, á una línea ó á un punto, es igual á la suma de todos los productos de cada una de las partículas ó moléculas del cuerpo por su distancia al mismo plano, á la misma línea ó al mismo punto.*

De las máquinas.

294. Se llaman *máquinas*, los medios que se empléan para hacer que las fuerzas obren sobre puntos que se hallan fuera de su direccion. La fuerza que se aplica á la máquina se llama *potencia*; y el cuerpo que la potencia debe poner en equilibrio, es la *resistencia*. Las máquinas se dividen en *simples* y *compuestas*: las primeras son siete, á saber: *la cuerda ó máquina funicular, la palanca, la poléa ó garrucha, el torno, el plano inclinado, la rosca* y *la cuña*. Las compuestas resultan de la combinacion de las simples, y pueden ser muy variadas.

Del equilibrio en la maroma.

295. Se llama *maroma* ó *máquina funicular*, á aquella en que solo se empléan cuerdas para sostener pesos, ó para contrarestar muchas fuerzas.

En lo que vamos á decir, supondrémos las cuerdas sin gravedad y reducidas á sus ejes, los que en este caso serán unas líneas perfectamente flexibles é inestensibles.

Sean AT, AF, AP (fig. 87), tres cuerdas unidas por medio de un nudo A; sea T un punto fijo donde está atada la AT, F una fuerza ó potencia aplicada á la AF, que ha de mantener en equilibrio el peso P, que está colgado de la AP, y propongámonos *hallar las condiciones del equilibrio.*

Para esto, descompondrémos la fuerza AF, que representarémos por AB, en otras dos, la una AL en la direccion del cordon AT, y la otra AM directamente opuesta al peso, lo que exige que las tres cuerdas estén en un mismo plano. Ahora, la fuerza AL quedará destruida por la resistencia del punto fijo, y representará la presion ejercida sobre dicho punto, ó lo que es lo mismo, esta será la tension T de la cuerda AT; y la fuerza AM será la que deberá ser igual al peso en el caso del equilibrio; luego se tendrá

F:P:T::AB:AM:AL;

pero (267) en este caso cada fuerza está espresada por el seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos; luego las condiciones del equilibrio vendrán espresadas por F:P:T::sen.TAP:sen.TAF:sen.FAP.

296. Si la cuerda TAF (fig. 88) pasa por un anillo ó sortija A, atada al estremo de la cuerda AP, para que haya equilibrio se necesitará ademas que *la direccion del peso* P *divida en dos partes iguales el ángulo* TAF; porque en este caso la direccion del peso debe estar igualmente inclinada respecto de las dos cuerdas AT, AF, á causa de que no hay ninguna razon para que la sortija corra hácia ningun lado; de donde resulta que las dos cuerdas AT, AF, estarán igualmente tirantes y se tendrá

F:P::sen.TAP=sen.$\frac{1}{2}$TAF:sen.TAF:: (I. § 460 cor.)

sen.$\frac{1}{2}$TAF:2sen $\frac{1}{2}$TAFcos.$\frac{1}{2}$TAF::1:2cos.$\frac{1}{2}$TAF.

297. Ahora, si dados dos puntos fijos T, F (fig. 89), y la longitud de una cuerda TAF, atada á dichos dos puntos, se quisiera *determinar el punto* A *en que se detendría el peso* P, *colgado de una sortija que puede correr libremente por la cuerda*: por los puntos T, F, se tirarían las verticales TG, FH; y haciendo centro en los mismos puntos con un radio igual á la longitud de la cuerda, se determinarían en las verticales los puntos N, G; y el punto de interseccion A de las líneas TN, FG, sería el que se pedía.

Porque tirando las horizontales NM, GH, los triángulos rectángulos TMN, FGH, ademas de tener las hipotenusas iguales, por ser iguales á la cuerda, tienen iguales los catetos MN, GH; luego (I. 273, cor. 2º) serán iguales, y nos darán el ángulo en T igual al en F; pero el ángulo en T=TNF, por alternos internos; luego el ángulo en F=TNF; por lo que el triángulo NAF es isósceles, y dará AN=AF; ahora el ángulo TAQ=TNF por correspondientes; el QAF=GFN, por alternos internos; luego el ángulo TAQ=QAF; luego el punto A, determinado de este modo, es tal que la direccion del peso P divide en dos partes iguales el ángulo TAF; luego este será el punto donde se detendrá la sortija. L. Q. D. D.

298. Ahora observarémos, que cuando el peso ó fuerza P mantiene en equilibrio á la sortija, podemos mirar el punto de la sortija que está en contacto con la cuerda, como si fuese un punto fijo al cual están aplicadas las dos potencias T, F, que se contrarestan; de donde se deduce que cuando dos fuerzas tiran de los estremos de una cuerda, que está sujeta á un punto fijo, *la presion sobre este punto divide en dos partes iguales el ángulo formado por las dos partes de la cuerda*, las cuales están entónces igualmente tirantes.

299. Luego cuando dos fuerzas se equilibran, por medio de una cuerda que pasa por la convexidad de un polígono ó de una curva cualquiera, *la presion sobre el vértice de cada ángulo le divide en dos partes iguales; todas las partes de la cuerda se hallan igualmente tirantes, y las dos fuerzas son iguales.*

300. Supongamos ahora muchos nudos unidos entre sí

por medio de las cuerdas AB, BC, etc., (fig. 90) y tirados por las fuerzas P, Q, R, S, T, y supongamos que en el caso de equilibrio se quiera *averiguar la relacion entre dos fuerzas cualesquiera del sistema*, v. g. entre P y T.

Para esto, tendrémos que como el sistema se supone en equilibrio, y en cada nudo A, B, C, etc., solo están reunidas tres cuerdas, señalando por t, t', las tensiones respectivas de las AB, BC, y los ángulos por las letras minúsculas que tienen en los arcos, tendrémos (296) estas tres proporciones

$$P:t::\text{sen}.a:\text{sen}.b;t:t'::\text{sen}.c:\text{sen}.d;t':T::\text{sen}.e:\text{sen}.f,$$

que multiplicadas ordenadamente (I. 191) dan

$$P:T::\text{sen}.a\,\text{sen}.c\,\text{sen}.e:\text{sen}.b\,\text{sen}.d\,\text{sen}.f,$$

que manifiesta la relacion pedida.

301. Si las fuerzas Q, R, S (fig. 91), fuesen unos pesos, el polígono PABCT y ellos estarían en un mismo plano vertical; porque el plano vertical PAQB y el ABRC, tienen comun la recta AB que no es vertical; por una razon semejante el plano ABRC y el BCST son uno mismo, y así sucesivamente si hubiese mas.

Ahora, los ángulos a, d, y los c, f, etc., tienen un mismo seno, por ser suplementos los unos de los otros; luego simplificando la proporcion anterior, se tendrá

$$P:T::\text{sen}.e:\text{sen}.b.$$

Pero, si por el punto de concurso z de las dos fuerzas P, T, se tira la vertical zx, resultará el ángulo $g=z$CS por alternos internos, y por consiguiente

$$\text{sen}.g=\text{sen}.z\text{CS}=\text{sen}.\text{SCT}=\text{sen}.e,$$

y el ángulo $h=z$AQ, y sen.h=sen.zAQ=sen.b;
y sustituyendo en vez de sen.e y sen.b sus iguales en la proporcion anterior, se tendrá P:T::sen.g:sen.h.

Y como las fuerzas P, T, están en la razon de los senos de los ángulos que forma la otra con una tercera xz, resulta (267) que *la vertical* xz *es la direccion de la resultante de las dos fuerzas* P, T; y por consiguiente tambien lo será de los

pesos Q, R, S, etc., que cargan las cuerdas y contrarestan las fuerzas P, T.

302. Una cuerda pesada se puede considerar como un hilo cargado de una multitud de pequeños pesos distribuidos en todos sus puntos, y por consiguiente este hilo formará un polígono de tantos lados como pesos pequeños haya; y concibiendo que los pesos vayan disminuyendo, lo irán haciendo igualmente los lados del polígono; y en llegando á su límite, el polígono se convertirá en una curva que toda ella estará en el plano vertical, en que se hallen las dos potencias aplicadas á sus estremos en direcciones tangentes á esta curva: y si por el punto de concurso de estas dos tangentes se hace pasar una recta vertical, esta comprenderá el centro de gravedad de la cuerda, y será la direccion de la resultante de las dos fuerzas ó presiones que cargan sobre los dos puntos de apoyo; las cuales estarán en razon inversa de los senos de los ángulos que sus direcciones forman con la vertical.

Luego si una potencia obra sobre un cuerpo ó una máquina, por medio de una cuerda pesada, y en una direccion que no sea vertical, la cuerda no comunicará toda la accion de la potencia, sinó en el caso de que la vertical, tirada por el punto de concurso de las tangentes en los estremos de la curva descrita por la cuerda, divida en dos partes iguales el ángulo formado por dichas tangentes.

303. *Una cuerda pesada no puede jamas estar exactamente tirante, sinó en una direccion vertical.*

Porque descomponiendo el peso de la cuerda en dos fuerzas, directamente opuestas á las dos potencias que la tienen tirante y la mantienen en equilibrio, dicho peso está representado (267) por el seno del ángulo que forman las dos potencias; y como el peso de la cuerda no puede jamas ser nulo, se sigue que el seno siempre tendrá algun valor, y por consiguiente nunca el ángulo podrá llegar á valer dos rectos.

De la palanca, balanza y romana.

304. La *palanca* es una vara ó barra inflexible, recta ó curva, cuyo movimiento ha de ser de rotacion al rededor de un punto fijo, que se llama *punto de apoyo, hipomoclio*, ó simplemente *apoyo*.

En la palanca (fig. 92) hay tres cosas que considerar, á saber: la potencia ó fuerza P, la resistencia ó peso R, y el apoyo C. Cuando el apoyo está entre la fuerza y el peso, la palanca es de *primera especie;* cuando el apoyo está en el estremo C (fig. 93), y el peso R está entre el apoyo y la potencia, la palanca se llama de *segunda especie;* y cuando estando el apoyo en el estremo, la potencia se halla entre el peso y el apoyo, la palanca es de *tercera especie* (fig. 94).

305. Para hallar las condiciones del equilibrio en cada una de estas especies de palanca, supongamos que P (fig. 95) sea una potencia que sostiene el peso R por medio de la palanca AB, cuyo punto de apoyo está en C. Supongamos la potencia P aplicada en el punto K, donde su direccion encuentra á la vertical tirada por el centro de gravedad del peso R; tírese la recta KC al punto de apoyo; tómese la parte KH para representar la potencia P, y sobre ella como diagonal y las direcciones KD, KC, constrúyase el paralelogramo DHEK.

Ahora, en vez de la fuerza P se podrán sustituir (266 esc.) las dos KE, KD; y como la KE quedará destruida por la resistencia del apoyo, y la KD está directamente opuesta al peso R, deberá serle igual en el caso del equilibrio. Tómese ahora KG=KD, y tírese la GE; de donde resultará por ser KG igual y paralela á HE, que la figura KHEG será un paralelogramo; luego KE, que es la carga del apoyo, es al mismo tiempo la resultante de las dos fuerzas P, R; y en virtud de lo espuesto (267) será

P:R::sen.CKR:sen.CKP.

Pero si desde el punto C tiramos las CL, CM, perpendiculares á las direcciones de las fuerzas R, y P, resulta que estas espresarán los senos de los ángulos CKR, CKP, con relacion al mismo radio CK; luego se tendrá P:R::CL:CM; lo que manifiesta que *la potencia y resistencia están en razon inversa de las distancias de sus direcciones al punto de apoyo.*

Como toda fuerza se puede considerar aplicada en cualquier punto de su direccion, podrémos suponer que P obra en M, y R en L, y en vez de la palanca recta ACB, podrémos considerar la *palanca angular* LCM que produce el mismo efecto.

306. La proporcion P:R::CL:CM,
es lo mismo que KH:KG=HE::CL:CM,
y manifiesta que las dos líneas KH, HE, son proporcionales á las CL, CM. Ahora, como los ángulos M, L, del cuadrilátero CMKL son rectos, el ángulo K será suplemento del C; pero el ángulo K es tambien suplemento del ángulo KHE; luego el ángulo C=KHE; luego si se tira la ML, los triángulos CML, KHE serán semejantes (I. 330), y darán HE:KE::CM:ML; y llamando C la carga del apoyo, se tendrá

R:C::CM:ML, ó P:R:C::CL:CM:ML;

lo que manifiesta que la potencia, el peso y carga del apoyo, se pueden espresar respectivamente por los lados CL, CM, ML, del triángulo CML.

307. Si la palanca es recta (fig. 92), y las direcciones PB, RA, de la potencia y peso son paralelas, entónces en vez de las perpendiculares *Cr, Cp*, se podrán sustituir las oblicuas ó *brazos de palanca* AC, CB, que les son proporcionales (I. 331); por lo que en este caso *la potencia y peso están en razon inversa de sus brazos de palanca.* Así, para que la potencia esté favorecida, se deberá procurar que su brazo de palanca BC sea mayor que el brazo CA; si los brazos son iguales, la potencia y peso deberán ser iguales; y si el brazo de palanca de la potencia fuese menor

que el del peso, se necesitaría siempre una potencia mayor que el peso que se quería equilibrar.

308. *En la palanca de segunda especie* (fig. 93), *siempre está favorecida la potencia*; porque el brazo de palanca CD á que se aplica la potencia, siempre será mayor que el CB á que se aplica la resistencia; y si la distancia de esta al punto de apoyo fuese nula, tambien lo debería ser la fuerza, como en efecto debe verificarse; porque entónces el peso está sostenido por el apoyo y no por la potencia.

309. Por estas mismas razones, *en la palanca de tercera especie* (fig. 94), *siempre está perjudicada la potencia*. Por lo cual solo se aplica con ventaja en los telares, donde las resistencias son pequeñas, y con facilidad las puede poner en movimiento el tejedor con sus piés.

310. En la palanca hemos prescindido de su peso; si se quiere atender á él se le deberá considerar como una fuerza aplicada verticalmente á su centro de gravedad, y considerar su momento como si fuera una verdadera fuerza.

311. Se llama *balanza ó peso de cruz*, á una palanca de primera especie cuyos brazos son iguales, que sirve para pesar las mercancías; la palanca AB (fig. 96), se llama la *cruz*; en su punto medio E está atravesada por un eje perpendicular, que se llama *fiel*, y entra en los ojos de las armas EM, que se llama la *alcoba*, y es la que sostiene la máquina; el fiel termina por la parte inferior en un corte mas ó menos agudo, segun se destine la balanza para pesar en pequeño ó en grande; por entre las armas pasa una *lengüeta xz* perpendicular á la palanca, la cual cuando queda dentro de la alcoba manifiesta que la palanca está horizontal; de los estremos A, B de la palanca, cuelgan por medio de tres cordones dos platillos C, D; en el uno v. g. en C, se colocan las pesas conocidas de á *libra*, *dos libras*, *media libra*, etc., y en el otro se va echando el género ó mercancía hasta que se equilibra con la pesa; y la lengüeta con su desvío hácia la derecha ó hácia la izquierda, ó quedando en la alcoba, manifiesta que falta género, que *está corrido*, como se dice vulgarmente, ó que está en caja ó en fiel.

312. La *romana* (fig. 97) tambien es una palanca AB de primera especie, y solo se diferencia de la balanza en que el fiel E está inmediato á uno de sus estremos; en el estremo A hay un garfio C donde se cuelga el peso R, y á lo largo del brazo mayor, que está con las divisiones de *arrobas*, *libras*, etc., segun la magnitud de la romana, corre por medio de una argolla un peso constante P, que se llama *pilon*; y la division en que se pone el pilon para que la romana quede en caja ó un poco corrida, (que es como se acostumbra) señala el número de arrobas, libras, etc., que pesa el género R.

Comunmente tienen dos divisiones las romanas: la una correspondiente á la posicion que tiene ahora, que se llama *por lo mayor*; y la otra cuando se cuelga la romana del garfio *k*, que se llama *por lo menor*.

De la poléa ó garrucha, y de las tróculas y polipastros.

313. Se llama *poléa* ó *garrucha*, á un cilindro poco grueso, en cuya superficie esterior hay una especie de *garganta* ó *carril*, que se llama *cajera*, por donde pasa una cuerda, á cuyos estremos se aplican la potencia y la resistencia.

El eje de la poléa sale un poco por ambos lados de la superficie de las dos caras; y se apoya en un armazon CO (fig. 98), de modo que pueda girar con toda libertad.

Se puede hacer uso de la poléa de dos distintos modos: ó estando fijo el centro, como se ve (fig. 98), en cuyo caso la poléa es *fija* ó *inmóvil*, y la potencia y resistencia obran en direcciones tangentes á la poléa; ó se aplica la resistencia al centro de la poléa, y la potencia á un estremo de la cuerda cuyo otro estremo está fijo, y se llama *poléa móvil*, que está representada por la (fig. 99).

314. Para averiguar las condiciones de equilibrio en la