duplo de éste es 8, cuadrado necesario de la hipotenusa. Pero si ésta es igual á 4 su cuadrado es igual á 16, y entónces los catetos resultan incomensurables, pues $\frac{16}{2}=8$ que será el valor de la area de cada cateto, por lo que en este caso los dos catetos resultan con raíces sólamente aproximativas, pero jamas exactas en la numeracion decimal.

Por lo expuesto y viniendo hacia la demostracion del lema que me ocupa, véase que un cuadrado sea de $C.^{a2}$ ó $H.^{a2}$ cuya area sea $=8$, tiene por precision que componerse de unidades morfológicas, luego un cuadrado perfecto el más inmediato es $3^2=9$: por lo que en el sistema decimal $9-8=1$: cuya unidad es indispensable suprimirla del cuadrado de 9, sea de un ángulo, de un costado ó del centro. Luego en un cuadrado de la hipotenusa para disminuir su area á décimos, milésimos ó millonésimos, es indispensable aumentar los catetos por décimos, milésimos ó millonésimos. Luego si los catetos son iguales á 2, sus cuadrados serán iguales á 4 y $4\times2=8$ que será el cuadrado de la hipotenusa, por lo que $\sqrt{8}=2'8284$ etc., será arbitrario ademas de ser una pura aproximacion, si no se da á la raíz cuadrada de cada cateto la longitud de 20000. Y téngase presente que en su lugar me veré obligado á traer á la práctica la verdad de esta regla.

Ahora si se considera la unidad esférica como relacionada con la ley de los rectángulos, véanse sus consecuencias.

Uno de los triángulos rectángulos cuyos tres lados son alícuotas, como tengo dicho, es el que tiene un cateto igual á 3, el otro igual á 4, y la hipotenusa igual á 5, la suma de estas tres dimensiones es: $3+4+5=12$.

Pues bien, este mismo triángulo molecularmente dibujado, se encuentra de dos maneras distintas en las figuras, 53 y 54.

Las líneas abstactas *a b c* de ambas figuras son de igual longitud, por lo cual ambos triángulos, rectángulos en *b* son idénticos. Ademas: si se trazan estos dos triángulos morfológicamente, se vé que ambos están formados con doce esférides cada uno.

Sin embargo, si tenemos cuenta de que las líneas geométricas que pasan por los centros de las esférides son puramente limítrofes, tenemos que en la figura 53 tocan como límites los extremos de las líneas morfológicas, y por consecuencia; que con esférides se pueden dibujar los cuadrados alícuotas $(b\ c)^2$ con nueve esférides $(a\ b)^2$ con diez y seis, y $(a\ c)^2$ con veinticinco, cuya suma es igual á cincuenta esférides.

De la misma manera, y con idénticas esférides, contando tres, comenzando por *c*, contando cuatro comenzando por *b*, y contando cinco comenzando por *a*, se tiene el propio triángulo rectángulo alícuota, y que asímismo con cincuenta esférides se tendrán los tres cuadrados de las líneas morfológicas, porque $9+16+25=50$, consistiendo, no obstante, la diferencia entre ambas figuras en que siendo las líneas geométricas limítrofes extremos de las morfológicas en la figura 53, son determinantes de los centros de las esférides en la figura 54. Por consecuencia: entre las esférides componentes de estos dos triángulos hay un espacio más ámplio entre las esférides de la figura 54, que entre las que componen la figura 53, cuya importante consideracion se demostrará en biología.

De la misma manera se percibe la diferencia que hay entre los triángulos rectángulos morfológicos, figuras 38 y 39. En el primero, las esférides están encerradas entre cuadrados geométricos, y el cuadrado morfológico se compondría de diez y seis esférides, cuando en el segundo en que los mismos cuadra-

dos geométricos sirven con sus intersecciones á los centros de las esférides, teniendo por cada lado cinco, su cuadrado sería veinticinco, á pesar de que las líneas geométricas con que se ha determinado cada figura son idénticas en ambas.

De lo expuesto y demostrado en las dos proposiciones que anteceden, resultan las conclusiones siguientes:

1ª Que la ley de los rectángulos es correcta en sólo los triángulos rectángulos alícuotas y sus múltiples, en el sistema de numeracion decimal.

2ª Que si por el mismo sistema se quieren valuar los triángulos rectángulos no alícuotas, no pueden obtenerse sino aproximaciones.

3ª Que es imposible tener un cuadrado perfecto por medio de una raíz con fracciones perpétuas.

4ª Que del mismo modo es imposible tener una raíz cuadrada perfecta extraida de un cuadrado imperfecto, y por lo mismo inadecuado para deducir líneas correctas.

5ª Que hay cuadrados semi–perfectos bajo el sistema decimal, á los cuales no pueden extráersele raíces exactas, y que bajo otra numeracion morfológica, son cuadrados perfectos con sus raíces palpables y exactas,

6ª Que las líneas abstractas geométricas, son inferiores en consecuencias armónicas á las líneas concretas morfológicas.

7ª Que las proporciones y progresiones geométricas, son preferibles para muchas operaciones trigonométricas, que la aplicacion directa de la ley de los rectángulos; la cual, en multitud de triángulos rectángulos da sólo resultados aproximativos, cuya inexactitud se aumenta con la necesidad de desechar fracciones perpétuas, cuyo agotamiento es imposible, no sólo gráficamente, mas ni tampoco aun por el cálculo abstracto.

Para la más perceptible demostracion de la conclusion 7ª paso á exponer y demostrar el siguiente:

LEMA TERCERO.

La inexactitud de la ley de los rectángulos, bajo el sistema decimal, puede hacerse palpable en triángulos rectángulos no alícuotas, al mismo tiempo que en algunos de ellos puede demostrarse su proporcionalidad.

DEMOSTRACION. *(Fig. 48).*

La elipse $g\ a'\ g''\ a'''$ tiene sus dos focos en $i\ i''$ habiendo entre ellos la distancia de 22 módulos.

El eje menor de esta elipse es $=a'\ a'''$ tiene veintiocho módulos. Consecuentemente su semi–eje mayor debe ser proporcional á la semi–distancia entre sus focos y su semi–eje menor.

Por lo que, para deducirlo, se debe poner la proporcion siguiente:

$\div 11 : 14 :: 14 : x$. ó sea $\frac{14}{11}{}^{2}=17\ \frac{9}{11}$.

Consecuentemente estas tres líneas rectas proporcionales: $11''\ 14''\ 17\ \frac{9}{11}$ son evidentes gráficamente y por medio del cálculo. Para demostrar su exactitud continuaré analizando esta elipse.

Del centro de ella *C* á *g* hay la misma distancia que de *C* á g'', por lo que siendo en toda elipse los dos rádios, medios, vectores, iguales entre sí, é igual la suma de ambos al eje mayor $g\ g''$, es evidente que $i\ a'$ debe ser igual á $C g$, y $a'\ i''$ igual á $C g''$.

Consecuentemente: si el punto a' se mueve en torno, retenido á la vez por ambos rádios vectores, tiene por necesidad morfológica que formar la periferia de la elipse $a'\ d'\ g\ d\ a'''\ d^{VI}\ g''\ d'''$ cerrando la curva elíptica en a'.

Esta curva, como en toda elipse, tiene cuatro puntos medios y son d, $d,^{VI}$ d''', d', en los cuales forman los rádios vectores triángulos rectángulos con los focos, por ejemplo: $d'\ i\ i''$ rectángulo en i.

Del mismo modo la periferia elíptica toca los puntos extremos $g\ g''$ determinando el eje mayor, y $a'\ a'''$ determinando el eje menor, en cuyos últimos puntos, los rádios vectores forman tambien triángulos rectángulos, por ejemplo: $i\ C\ a'$ rectángulo en C.

Como para formar esta elipse me han servido de punto de partida como datos necesarios, que del foco i al foco i'' hay 22 módulos, los mismos debe haber entre $d\ d'$ por lo que $d\ d'\ d''\ d^{VI}$ es un cuadrado perfecto, bien entendido, que aunque en la piedra litográfica yo he dibujado correctamente todas las figuras de esta lámina, como se ha hecho la impresion con papel húmedo, al secarse deben tal vez haber sufrido alteraciones los dibujos en sus dimensiones y áun en sus formas, todas las cuales, sin embargo, deben comprenderse como correjidas con el cálculo.

Hecha esta advertencia y entendiéndose que entre los extremos del eje menor de la elipse $a'\ a'''$ hay 28 módulos; los cuatro rádios vectores $i\ a'$, $a'\ i''$, $i''\ a'''$ y $a'''\ i$ forman un rombo el cual sirve de dato constructor la elipse misma, cuyo rombo tiene por longitud su eje menor, y por latitud la distancia entre sus dos focos; luego los rádios vectores deben ser proporcionales, es decir: que si á $a'\ C$ se le dieran las dimensiones de 11 módulos $C g$, tendría las de 14; luego teniendo $a\ C$ las de 14 $C g$, debe tener las de 17 $\frac{9}{11}$.

He insistido en la proporcionalidad de estas líneas, para que haciéndose evidentes en la línea recta, ó eje mayor de la elipse, dividida proporcionalmente, se perciban las proporciones necesarias entre $i\ i''$ distancia entre ambos focos, $a\ a''$ longitud igual al eje menor, y $g\ g''$ longitud total del eje mayor de la elipse. Estas tres dimensiones necesarias y peculiares de esta elipse, repito que se expresan numéricamente con la proporcion $\div$ 11 : 14 : : 14 : 17 $\frac{9}{11}$,, longitud es la última, igual á cualquiera de estos rádios vectores medios, segun se manifiesta en la figura.

Ahora voy á demostrar que la ley de los rectángulos solo es aproximativa, pero no exacta, en este caso, como en todos los triángulos rectángulos en los cuales el lado que se busca no tiene raíz cuadrada exacta. La fórmula que se necesita analizar es la siguiente: teniéndose por A la semi-distancia $i\ C$ entre ambos focos de la elipse. Por B, su semi-eje menor $a'\ C$, y por x al rádio vector $a'\ i$ se tiene evidentemente un triángulo $a'\ C i$ rectángulo en C. Por lo que: $\div\ A^2+B^2=X^2$. Luego x debería ser igual al rádio vector $a'\ i$, lo cual no es así, sino sólo una aproximacion, pues sustituyendo los números, tenemos: $11^2=121+14^2=196=317$.

Pero $\sqrt{317}=17,$ 804 etc., etc.

Más 17 $\frac{9}{11}$,, Reducido su quebrado á fracciones decimales es: 17, 818 etc. etc.

Por lo cual existe entre el resultado proporcional y el de la ley de los rectángulos, una diferencia en ménos, de esta última, mayor de catorce milésimas.

Cuya diferencia evidente resulta de que en la ley de los rectángulos, cuando los tres lados de un triángulo rectángulo no son alícuotas, los resultados son sólo aproximativos, mas jamas exactos, porque ademas de que en ellos mismos hay ya una diferencia con la verdad, en la numeracion decimal, hay fracciones perpétuas que siempre es preciso, en definitiva, desechar, y que por sí solas harían ya deficiente al cálculo.

Luego hay una discordancia entre los resultados que acerca de este triángulo se obtienen, bien sea deduciendo, como indudablemente debe deducirse: la línea $a'\ i$, como rádio vector de la elipse como proporcional deribada de la semi-distancia de sus focos, y el semi-eje menor que han servido de datos para la construccion de la misma elipse, ó bien deduciéndose de la ley geométrica de los rectángulos, por la cual se obtiene para la misma línea $a'\ i$ una diferencia en ménos de : 0'0 14,, catorce milésimas; cantidad bien pequeña, pero que no sólo no es en sí misma exacta, sino que llegaría á ser muy grande, si el triángulo rectángulo $a'\ C i$ sirviese de base á una série ascendente de triangulaciones, deduciéndose por esa hipotenusa, numéricamente menor que la verdadera, otro cateto, etc. etc., que al fin llegarían á obtenerse de deduccion en deduccion muy marcadas diferencias entre el cálculo, así hecho deficiente, y la verdad morfológia.

Otro tanto se percibe en la misma elipse, con igual evidencia, en la operacion siguiente: $i\ d'\ d'\ i''$ deben sumar necesariamente, como rádios vectores, una línea igual al eje mayor $g\ g''$ de la elipse. Luego $g\ g''—i\ d'=d'\ i.''$ Y expresando esta ecuacion con los números, tendremos $g\ g''=35\ \frac{7}{11}$ y reduciendo esta fraccion á decimales produce: 35, 1636 etc.—$d'\ i=11=24'636$ etc.

Ahora, como para producir la misma elipse se han dado, por precision veintidos módulos á i i'' y evidentemente una mitad, ú once módulos á $i\ d'$ resulta un triángulo rectángulo en i por lo que haciendo la operacion directamente con los números tendremos: segun la ley de los rectángulos:

$11^2=121+22^2=484=605.$

Por lo cual $\sqrt{605}=24\ 596$ etc., así pues, el resultado de la ley mencionada es menor: algo más de cuarenta milésimas, que el resultado proporcional deducido directamente de las líneas proporcionales que han servido para la construccion de la misma elipse.

CUADRO COMPARATIVO.

Triángulo rectángulo $a'\ C i$, Figura 48.

Deduccion por el método proporcional $\div i\ C=11:\ a'\ C=14::14:$ 17,818 etc.
Id. por la ley de los rectángulos $i\ C\ 11^2+a'\ C=14^2=317$ y $\sqrt{317}=17{,}804$ etc.

Diferencia en contra de la segunda $=00{,}014$ etc.

Triángulo rectángulo $d'\ i\ i''$

Deduccion por el método proporcional $g\ g''=35\frac{7}{11}—d\ i'=11=24{,}636$ etc.
Id. por la ley delos rectángulos $(i\ i'')^2+(d'\ i)=(d'\ i'')^2=605$ y $\sqrt{605}=24{,}596$ etc.

Diferencia en contra de la segunda 00,040 etc.

Estas diferencias no me han sorprendido; yo las esperaba y lo único que me sorprende es su pequeñéz, pero sea cual fuere ésta, ella bastaría para quitar toda su armonía á las operaciones morfológicas, conforme procuraré oportunamente demostrar. En lo pronto creo D. E. L.

DIGRESION.

He demostrado ya, y creo, concluyentemente, que la ley de los rectángulos si bien es evidente morfológicamente, con una exactitud y precision admirable, más cuando se le aplica la numeracion decimal, sólo vienen á ser los resultados aproximativos, mas no correctos.

Con esta demostracion se pierde una ilusion geométrica, cuya pérdida yo mismo he deplorado. Porque en efecto: como todo triángulo se puede descomponer en dos rectángulos, se tendria siempre, si dicha ley fuera correcta, un medio seguro de obtener el valor de muchas líneas que ahora aparecerán como simples aproximaciones.

En cambio, creo poder dar precision y armonía morfológica á varias resoluciones de problemas que ántes parecían insolubles.

Por lo mismo he insistido en el análisis á fondo de la repetida ley de los rectángulos, para que cuando yo exponga operaciones morfológicas más exactas y precisas en sus resultados, no se me opongan los que se obtengan por esa ley, pues repito que en la numeracion decimal, no es correcta sino en los triángulos cuyos tres lados son alícuotas.

EXPOSICION PREPARATORIA.

Habiendo manifestado ya los principios más sencillos de la morfológia y las diferencias esenciales de ésta y la geometría; pero sobre todo, habiendo demostrado la inconveniencia de usar, en el sistema de numeracion, decimal de la ley de los rectángulos cuando se desea una absoluta precision, y no una simple aproximacion en los triángulos rectángulos que no tienen alícuotas sus tres lados, me hallo ya en aptitud de estudiar á fondo el sistema morfológico, por el cual se deduce que la esfera es la unidad absoluta de las formas todas, y que éstas son alícuotas entre sí para que tenga su manera de ser el metamorfismo de la Naturaleza.

Mas para esto no es bastante el hallar que la esfera se adopta morfológica y mecánicamente consigo misma en diferentes sistemas para producir las líneas, planos y sólidos complementarios y proporcionales entre sí. Es necesario, ademas, conocer las armonías intrínsecas de la esfera, demostrándose que estas armonías están sujetas á un tipo universal, el que es alícuota y armonioso desde la esféride, ó unidad esférica, hasta el conjunto prodigioso y así mismo esférico, compuesto de esférides á que damos el nombre de Universo.

Para lograr la demostracion metódica de este vasto sistema morfológico, es indispensable el conocerse la conmensurabilidad alícuota de sus diferentes partes componentes, para lo cual es necesario no sólo resolver todos los problemas que comprende la cuadratura del círculo, comenzando por las proporciones entre el rádio y el diámetro con la circunferencia, sino ademas el demostrarse que éstas son alícuotas, y por lo tanto permutables metamórficamente entre ellas mismas.

Para abrir propiamente el estudio de tan importantes problemas, necesito sentar un principio fundamental y es que: No hay en la Naturaleza toda sino tres clases de esferas perfectas, la primera son todas las esférides ó átomos primitivos del fluido universal. Armonío, pues como, todas formadas por fuerzas opuestas, las menores posibles, han resultado todas iguales, inertes, inalterables, impenetrables y esféricas.

Luego siendo las esférides, todas iguales, las menores posibles y todas esféricas, resulta que sea cual fuere su incomparable multitud, ellas constituyen por su perfecta igualdad la primera clase de la forma esférica

La segunda clase la constituye una esfera invariable, inmensa y metamórfica, no en la forma de sus límites, sino en la multitud de las combinaciones de esférides y fuerzas que encierra. Tal es la esfera prodigiosa de Universo, en la cual desaparecen todas las sinuosidades determinadas por las esférides y se construye con la multidud y pequeñez de éstas, una esfera perfecta y necesaria para la unidad del plan morfológico de la creacion, dispuesto y ejecutado por la omiciencia del Creador.

Pero entre la pequeñez de la esféride y la magnitud del Universo, hay la esfera tipo, es decir: la tercera clase de esferas, que asume en sí misma las armonías del máximum y el mínimum esféricos, obteniendo la perfecta armonía y comensurabilidad alícuota de ambos, y sirviendo de norma ó unidad morfológica y numérica, que dando á la forma esférica su precision y armonía, ligue por medio de ésta el máximum y el mínimum de la creacion, y dé á conocer el plan portentoso del Criador. El que ha puesto ante la inteligencia humana este sublime problema, y la estimula benévolamente para que ella se esfuerce para resolverlo y admirarlo.

Con el objeto de penetrar metódicamente en los arcanos del metamorfismo natural, debemos comenzar por conocer el elemento esférico, y para hacerlo analíticamente, es necesario estudiar la seccion de la esfera, ó sea uno de sus círculos máximos. ¿Cuáles son sus proporciones? ¿Y cuál la solucion del problema que en la Naturaleza misma encontramos indicada? Estudiémosla.

En la Naturaleza no existe la abstraccion convencional matemática. En ella, como está ya indicado, el punto es una esféride, y las líneas, planos y sólidos son compuestos de esférides, en todos los cuales están patentes armonías que demuestran un plan prodigioso en las leyes que los han originado y los conservan.

Para demostrar esto y al mismo tiempo para resolver los problemas morfológicos con relacion á la esfera y al círculo, como seccion de ésta, busquemos los números de esférides que sirven de tipo á las armonías del círculo.

LEMA CUARTO.

Hay en la Naturaleza metamórfica armonías que sirven de tipo normal de las proposiciones entre el rádio y la circunferencia del círculo, valorizadas estas líneas por esférides en contacto.

DEMOSTRACION.

La figura 46, manifiesta dos círculos y dos cuadrados concéntricos y proporcionales entre sí, compuestos de líneas que se suponen ser de esférides amplificadas *ad libitum* en contacto, ó sean esferas iguales, representadas en este dibujo por sus secciones, es decir: por círculos máximos, tocándose recíprocamente.

El cuadrado exterior está compuesto de cincuenta y seis esférides, es decir: catorce por cada lado, y el círculo exterior está asimismo compuesta su circunferencia de cincuenta y seis esférides.

El cuadrado interior está compuesto de cuarenta y cuatro esférides, es decir: once por cada lado, y el círculo interior está igualmente compuesta su circunferencia de cuarenta y cuatro esférides. De este modo se tiene la proporcion siguiente:

$\div 11:11::14:14$. ó sea $11 \times 11:11 \times 14::14 \times 11: 14 \times 14$ ó sea $\div 121:154:: 154:196$.

Desde luego se percibe que estas tres proporciones son sólo variantes de la primera, y que puesto que el cuadrado exterior y que la circunferencia externa están compuestas del mismo número de esférides, y que igual cosa existe entre el cuadrado interior y la circunferencia interna, son ambas figuras perfectamente alícuotas y permutables metamórficamente entre sí.

Mas la segunda y tercera proporcion demuestran, que la proporcionalidad entre ambos cuadrados con entre ambos círculos es tal, que pueden permutarse metamórficamente las cuatro formas de esta figura.

Ahora véase que las líneas $d\ d'\ d''\ d'''$ del cuadrado interior son perfectamente rectas y por consecuencia si se suponen todos los círculos que las componen tener sus diámetros dibujados, desde d hasta d' hay una línea recta compuesta de once diámetros, y siendo iguales los otros tres lados $d'\ d'''$, $d''\ d'\ d'''$ y $d'''\ d$ resulta un cuadrado perfecto con su perímetro igual á cuarenta y cuatro diámetros.

Supongamos despues que los cuatro ángulos $d\ d'\ d''$ y d''' del cuadrado se impulsan con una fuerza perfectamente igual hácia el centro comun de la figura, como todas las esférides son iguales, inertes é inalterables, deben rodar sobre ellas mismas convirtiéndose en la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ ¿Mas cuál deben ser los resultados de ésta permuta con relacion á los diámetros de las esférides, los cuales en el cuadrado constituyen cuatro líneas rectas?

1. Permaneciendo las esférides en contacto, entre cada dos esférides habrá de centro á centro de ellas, un diámetro pasando por los puntos de contacto.

2º. Así como los lados $d\ d'\ d''\ d'''$ del perímetro del cuadrado inscriben y circunscriben la circunferencia concreta $a\ a'\ a''\ a'''$ del mismo modo los diámetros ideales de cada par de esférides en contacto de dicha circunferencia concreta, deben inscribir y circunscribir á la circunferencia ideal.

3º. Las esférides componentes de la circunferencia concreta $a\ a'\ a''\ a'''$ constituyen una curva perfecta, reentrante en sí misma, y todas sus esférides ó puntos morfológicos, equidistantes de una esféride ó punto central.

Para probar que estas circunferencias son perfectamente curvas, tienen trazadas dos circunferencias geométricas: una exterior y otra interior, tocando todas las esférides, cuyas circunferencias, como limítrofes, demuestran la imposibilidad de encerrar á las circunferencias morfológicas dentro de polígonos circunscritos, los cuales cortarían las esférides que las componen.

4º. De centro á centro de las esférides opuestas en la circunferencia $a\ a''$ hay un diámetro compuesto de catorce esférides ó módulos, cuya palabra creo conveniente para expresar el diámetro de una esféride.

5º. La misma longitud de catorce módulos tiene cada lado del polígono cuadrado circunscrito $b\ b'\ b''\ b'''$ por lo cual vemos que la línea ideal $b\ b'$ es tan-

gente de la circunferencia ideal, y estas dos líneas sólo se tocan en el centro de la esféride a; por lo que siendo los cuatro lados de este polígono iguales, todos ellos son tangentes de la circunferencia á la que tocan en los centros de las esférides a, a', a'', a'''.

6º Consecuentemente: los dos diámetros cruzados ó sea polarizado $a\ a''$ y $a'''\ a'$ tienen cada uno catorce módulos, ó siete módulos por rádio de la circunferencia ideal, comenzando á contarse desde el centro de la figura hasta tocar dicha circunferencia.

7º. Como consecuencias de los resultados que llevo enumerados hasta aquí en el análisis de esta figura morfológica, aparecen las siguientes:

1ª. Que el diámetro $a\ a''$ es á la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ como 14:44.

2ª. Que el cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ que está formado por igual número de esférides que la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ no es para ésta un polígono inscrito, porque sus cuatro ángulos se proyectan como se ve, fuera de la circunferencia. Tampoco es un polígono circunscrito á ésta, porque la mayor parte de las cuatro líneas rectas que constituyen sus lados, están dentro de la circunferencia; luego este cuadrado la inscribe y circunscribe al mismo tiempo, por lo que le doy el nombre de armopolígono.

3ª. Que el cuadrado circunscrito $b\ b'\ b''\ b'''$ á la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ es al mismo tiempo armopolígono de la circunferencia proporcional $e\ e'\ e''\ e'''$.

4ª. Por último: que esta figura morfológica es en sí misma un tipo en que están previstas todas las figuras circulares y míxtas; porque la proporcionalidad entre las líneas que la componen no se altera en ninguno de sus múltiples. Q. E. L. D.

La circunferencia ideal ó tipo morfológico es la línea curva que está dibujada entre las cuarenta y cuatro esférides componentes de la circunferencia tipo, cuando el diámetro es igual á catorce módulos. Pero si se cuentan los dos rádios de las esférides $a\ a''$ que están fuera de la circunferencia ideal, el diámetro sería igual á quince módulos, habiendo un módulo de diferencia entre la circunferencia ideal y el diámetro tipo.

Pero supongamos que el diámetro fuese un millon de veces mayor representado por esférides del mismo tamaño que las que representan esta figura, entónces la diferencia entre la circunferencia ideal y la morfológica sólo sería la millonésima parte de la que se percibe en la actual figura tipo.

Por último: si el número de las esférides fuese un billon ó un trillon, la diferencia sería sólo una billonésima ó una trillonésima parte.

Hé aquí por que he sentado arriba que hay tres clases de esferas, la esféride, la esfera tipo en sus proporciones, y la esfera universal ó sea el espacio esférico que constituye al Universo medido por la pequeñez impalpable de las esférides ó átomos primitivos. Todas las demas esferas tienen la necesaria modificacion que resulta de estar construidas morfológicamente con esférides, es decir: con átomos que en nada influyen en la práctica por su imponderable pequeñez, mas en la teoría hay que considerarlos.

Pero lo admirable de las armonías morfológicas, es que en la esfera tipo y por consecuencia en el círculo tipo, se tienen las dimensiones comparadas del diámetro, del rádio, del armopolígono y de la circunferencia del círculo y consecuentemente, de la circunsuperficie, del volúmen, y de las armonías de la esfera.

La figura morfológica 46, da ya una idea de las líneas principales del círculo trazadas con esférides, pero como estas líneas son experimentales, sólo pueden tenerse como indicantes del tipo morfológico, en su más sencilla forma. En lo de adelante, para evitar el sumo trabajo que habría que impenderse para trazar con esférides las complicadas figuras que tengo que exhibir, trazaré sólo las líneas; mas sus dimensiones ó módulos se supondrán ser las necesarias para evitar fracciones, en las esférides mismas, porque como tengo sentado, las fracciones de la unidad son inadmisibles en morfológia, así como en física el átomo material es impenetrable, y por consecuencia infraccionable.

Esto no impide el que se enuncien en el análisis de algunas cantidades, fracciones que traen consigo la necesidad de emitir cálculos que por comodidad se disponen en números suficientemente reducidos para hacerlos accesibles á un estudio fácil, pero estos mismos cálculos, más adelante, se expondrán con números suficientemente altos, para evitar en ellos fracciones.

Hechas estas advertencias teóricas, paso á indicar en la práctica los hallazgos que la figura 46 nos ha proporcionado. Hallazgos que aunque hasta ahora aparezcan como vagos ó poco comprobados, espero que adelante serán demostrados á la evidencia.

La figura 46 manifiesta: 1º Que si el rádio es igual á 7, el diámetro es igual á 14, y la circunferencia del círculo igual á 44 módulos. 2º Que hay un polígono que no es ni circunscrito ni inscrito, y que inscribiendo y circunscribiendo á la vez á la circunferencia, es perfectamente igual con ésta, por lo que le he dado el nombre de Armopolígono. Y 3º, que el cuadrado circunscrito del círculo tipo, es armopolígono de otro círculo que le es proporcional.

Las anteriores consecuencias están deducidas de la necesaria evidencia que trae á la vista un dibujo morfológico, pero como ellas no serían bastantes para convencer por sí solas de su absoluta verdad, tengo que sujetarla á demostraciones de Lemas preliminares, para terminar la demostracion final con teoremas, cuya evidencia será incontrovertible.

Como en esta parte de la morfológia tengo que resolver el célebre problema de la cuadratura del círculo, me veo obligado en este lugar á decir algo acerca de este asunto.

Desde una remota antigüedad, entre los tracmanes de la India, se encuentran trabajos dirigidos á buscar las relaciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo, sin saberse áun de qué medios se valieron para lograr la aproximacion á que llegaron; probablemente su sistema fué puramente gráfico, como despues, aún en Grecia se practicó por mucho tiempo.

Así es, que quien primero trató de resolver el problema de un modo metódico fué Arquímedes, quien supuso á la circunferencia como representando un polígono de un número infinito de lados, y partiendo del principio de tener el exágono inscrito en el círculo seis cuerdas iguales al rádio y que el exágono circunscrito tenía al mismo rádio por apotema, ideó formar una série de triangulaciones en que formando triángulos rectángulos, y aplicándoles la ley de los rectángulos dedujo en cinco triangulaciones, sucesion que siendo el diámetro igual á 7, la circunferencia es mayor que 21 y algo menor que 22, por lo cual sentó como una simple aproximacion, el que puede decirse que las relaciones entre el diámetro y la circunferencia son como 7 es á 22.

Así es que yo morfológicamente sostengo, y creo que demostraré hasta la evidencia, que estas relaciones que Arquímedes supuso ser sólo aproximativas, son en realidad las verdaderas.

Despues de Arquímedes hasta nuestros dias se ha seguido considerando á la circunferencia como un polígono de un número infinito de lados, y para valorizarlos se ha partido del exágono ó del cuadrado y bidividiendo de operacion en operacion los ángulos, reduciendo los triángulos resultantes á triángulos rectángulos, y aplicando á éstos la ley de los rectángulos, se han hecho varias séries de triangulaciones por las que generalmente se ha convenido en que la aproximacion más cercana á la verdad es, si se toma al diámetro como la unidad, el término medio entre el valor de dos polígonos, el uno circunscrito y el otro inscrito en el círculo, obteniéndose aproximadamente la:

Razon matemática entre el diámetro y la circunferencia.

Polígono circunscrito de 4,096 lados....................	1:3'1415927
Polígono inscrito de 4,096 lados........................	1:3'1415925
Suma..............	2:6'2831852
Término medio......	1:3'1415926
Suponiéndose el diámetro = 7 resulta.....................	7:21'9911482
Resultado morfológico....................................	7:22
Fracciones que deben resultar nulificadas..............	88518

Entrar á fondo para demostrar las causas de los errores cometidos por tantos ilustres geómetras al valuar las proporciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo, sería lanzarme á escribir una obra extensa, que me divagaría de mi objeto principal al emitir estas nociones morfológicas, por lo que dejando á un lado los métodos y detalles especiales debo solo emitir mi juicio reduciéndolo á manifestar tres causas de error en los procedimientos hasta ahora seguidos.

La causa primera consiste en el sistema mismo de considerar á la circunferencia como un polígono de un número infinito de lados. Al enunciarse así el método de valorizarla con relacion á una línea recta cual lo es el diámetro, se renuncia desde luego á tener un resultado correcto y se sujeta la resolucion del problema á obtenerse solo una aproximacion mezquina.

Ya he enunciado yo que la esfera del universo debe ser y es medida su circunferencia máxima por la medida mínima, es decir: por esférides. ¿Se puede percibir con la imaginacion, al ménos, una idea de semejante máximun medido por semejante mínimun? Y sin embargo: ¡tal es la morfológia en la Naturaleza y tan admirable la Onmiciencia del Supremo Hacedor, que la ha criado! Cuando el hombre trata de congeturar los átomos que componen la materia sólida del tamaño de la cabeza de un alfiler, la Inteligencia Suprema ha señalado leyes armoniosas á la inmensa magnitud del Universo, medido por esférides ó átomos primitivos, y sin que quepa duda en ello, ha trazado un círculo tipo que tiene en cuenta la ampliacion de sus proporciones en razon inversa de la disminucion de las relaciones atomísticas, hasta que el círculo tipo y el morfológico se identifican en los confines del Universo medido por esférides.

La causa segunda del error en que han incurrido los geómetras al tratar de hallar las relaciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo, consiste en que al bidividir los ángulos se ha supuesto que se bidividen los polígonos, lo cual no es exacto, puesto que: como el polígono circunscrito es mayor que la circunferencia, á cada bidivision de ésta el perímetro de dicho polígono resulta con lados menores que la mitad de los precedentes.

Al contrario resulta con la bidivision de la circunferencia y el polígono inscrito: como este es menor que aquella, al bidivirse se le va acercando y consecuentemente en cada bidivision resultan los lados del polígono inscrito mayores que la mitad de los lados precedentes.

Por el sistema de bidivisiones practicadas sin tener en cuenta la causa de error aquí mencionada, solo se puede aspirar á una aproximacion, pero jamas á obtenerse el valor real de la circunferencia, comparada con líneas rectas.

La causa tercera de error en geometría, es la de valuar las líneas de los triángulos rectángulos poligonales por medio de la ley de los rectángulos.

Yo creo haber demostrado arriba hasta la evidencia, que en la numeracion decimal esta ley solo da resultados correctos en los triángulos rectángulos que como en el de 3, 4 y 5 tienen sus tres lados alícuotas, pero que en todos los demas solo pueden obtenerse aproximaciones, pero nunca resultados ciertos y precisos.

Y en efecto: ¿podrán elevarse á su cuadrado fracciones perpetuamente indefinidas? ¿Y podrán considerarse como cuadrados perfectos aquellos que al extráerseles sus raíces den éstas con fracciones perpetuas é indefinidas?

Por último: al tratar de deducirse los valores de los catetos, ó de las hipotenusas, por medio de la ley de los rectángulos en la numeracion decimal, y cuando hay siempre la necesidad de desechar fracciones indeterminadas, ¿puede la ley de los retángulos proporcionar una exactitud clara y evidente en las triangulaciones?

Yo creo que no, y que con razon por los medios geométricos hasta hoy conocidos, se ha creido imposible la solucion del célebre problema de la cuadratura del círculo.

Las academias todas tenían ofrecidos premios al que resolviese cumplidamente tan importante problema; el emperador Cárlos V ofreció cien mil escudos de oro al que lograse resolverlo. Pero al fin, en las academias se ha determinado pasarse á la órden del dia cuando se presenten pretensiones de resolucion del problema mismo, por considerarse ésta como imposible.

Y yo confieso que en efecto lo es así por el sistema geométrico, pero no por el morfológico, como trato de demostrar en las operaciones siguientes:

LEMA QUINTO.

Habiéndose ya manifestado morfológicamente que hay relaciones proporcionales perfectamente alícuotas entre el diámetro y la circunferencia del círculo, este lema y los subsecuentes son dirigidos á demostrar que, las mismas proporciones se obtienen geométricamente, por medio de operaciones proporcionales. Consecuentemente: que el radio es igual á 7, cuando la circunferencia es igual á 44, obteniéndose así las dimensiones normales del círculo tipo.

Construccion demostrativa de la figura 48.

Con 7 módulos de abertura en un compás determínese el radio haciéndose centro en C, y trácese la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$

Hecho ésto, trácense geométricamente los dos diámetros perpendicularmente cruzados ó polarizados en ángulos rectos: $a\ C\ a''$ y $a'\ C\ a'''$

En seguida, haciéndose centro en a y teniendo el compás la misma abertura de 7 módulos que ha servido de radio, fíjense los puntos $b\ b'$, y fijándose lo mismo sucesivamente el compás en $a'\ a''\ a'''$ se tendrán las cuatro líneas $b\ b'$, $b'\ b''$, $b''\ b'''$ y $b'''\ b$ iguales á los diámetros cruzados $a\ a''$ y $a'\ a'''$ y paralelas con ellos, de modo que el cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$ toca sólo á la circunferencia en los puntos $a\ a'\ a''\ a'''$ y por lo tanto, es un polígono regular de cuatro lados, circunscrito á la circunferencia misma, cuyos lados son todos los cuatro, tangentes con ella é iguales cada uno á dos radios ó sea al diámetro del círculo.

Una vez esto obtenido, se trazan las dos diagonales $b\ b''$ y $b'\ b'''$, las que cortándose en el centro C, dividen el círculo en cuatro partes, las que sumadas á las otras cuatro en que lo habían dividido los diámetros polarizados, resulta la circunferencia dividida en ocho arcos iguales de 45° cada uno.

Trazada así geométricamente una parte de la figura 46 morfológica, se trata de trazar igualmente el cuadrado proporcional interno $d\ d'\ d''\ d'''$ en la figura 48.

Como cada lado del cuadrado circunscrito es igual á 14 módulos, tómese el compás con una abertura de $5\frac{1}{2}$ módulos, y haciéndose de nuevo centros en $a\ a'\ a''\ a'''$, se fijarán sobre los mismos lados del polígono circunscrito los ocho puntos e, e', e'', e''', e^{IV}, e^{V}, e^{VI} y e^{VII} cuya distancia entre e y e' es de 11 módulos y lo mismo entre sus iguales.

Despues, paralelas á dichos lados se trazarán las líneas $e\ e^{\text{V}}$, $e'\ e^{\text{IV}}$, $e''\ e^{\text{VII}}$ y $e'''\ e^{\text{VI}}$.

Con esta construccion resultan dos paralelógramos polarizados ó cruzados en ángulos rectos $e\ e'\ e^{\text{IV}}\ e^{\text{V}}$ y $e''\ e'''\ e^{\text{VI}}$ y e^{VII} y cada uno de estos paralelógramos tiene, por consiguiente, catorce módulos de longitud, por once de latitud.

Pero como las líneas que los constituyen se cruzan en $d\ d'\ d''\ d'''$ resulta que estos puntos marcan el cuadrado interior proporcional, porque si llamamos B al cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$, E al paralelógramo $e\ e'\ e^{\text{IV}}\ e^{\text{V}}$ y D al cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ tendremos la proporcion siguiente:

$\div D:E::E:B.$ y sustituyendo

$\div D^2:D\times B::B\times D:B^2$ y aplicando los números

$\div 11^2=121:11\times14=154::14\times11=154:14^2=196.$ Q. D. E. L.

Problema primero.

Obtenidos así geométricamente el valor de un cuadrado circunscrito, de un paralelógramo proporcional, y del armopolígono de la circunferencia, se trata de saber si ésta es igual al armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ y si resulta ella alícuota con el diámetro, ¿cuál es el área del círculo $a\ a'\ a''\ a'''$?

Resolucion fig. 48.

Para valuar geométricamente el área de un círculo se supone á cada una de las partes en que se divide la circunferencia, el constituir un triángulo isósceles, y por consecuencia si se multiplica el número de estas partes por la mitad del rádio, se obtiene el área.

Ahora siendo el perímetro del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ igual á $11\times4=44$ y el rádio $C\,a=7$, la mitad de éste es $=3\frac{1}{2}$. Por lo que $44\times3\frac{1}{2}=154$ igual á el área del círculo igual á el área del paralelógramo $e\ e^{\mathrm{V}}\ e'\ e^{\mathrm{IV}}$ y puesto que este es un medio proporcional entre el cuadrado circunscrito á la circunferencia y el armopolígono de ésta, el círculo resultante de la multiplicacion de ésta por la mitad del rádio, es un plano proporcional entre el cuadrado circunscrito y el area del armopolígono como se percibe en la proporcion misma.

Porque $\div\ 11^2 : 44\times3\frac{1}{2} :: 11\times14 : 14^2$ ó sea

$\div\ 121 : 154 :: 154 : 196.$

Ahora para demostrar que el area del paralelógramo $e\ e^{\mathrm{V}}\ e'\ e^{\mathrm{IV}}$ es igual á l del círculo, véase que $11\times4\times\frac{14}{4}=11\times14$.

Y para demostrar que la cuarta parte del diámetro ó sea la mitad del radio es$=3\frac{1}{2}$, véase que ha servido de base en la construccion de esta figura 48 el que el radio $C\ a$ es igual á 7, y que el lado $b\ b'$ del cuadrado circunscrito es igual al diámetro del círculo, ó sean dos radios. Porque $b\ a=a\ C$ y $b\ a+a\ b'=2\ a\ C$.

Finalmente, para demostrarse que el perímetro del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ es igual á la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ debe observarse que así como el lado $d\ d''$ inscribe y circunscribe á la cuarta parte ó cuadrante de la circunferencia, la undécima parte del mismo lado *5* y *6* inscribirá y circunscribirá igualmente á la undécima del cuadrante de la circunferencia, y de la misma manera la inscribirían y circunscribirían cualquier número de partes por pequeñas que se las supongan en que se dividiese el armopolígono, resultando así la alicuocidad perfecta del círculo tipo, en el cual quedan consignadas como normales las proporciones siguientes:

Radio$=$7. Diámetro$=$14. Perímetro del armopolígono$=$44. Perímetro del cuadrado circunscrito$=$56. Circunferencia del círculo tipo$=$44. Q. R. y D. E. P.

LEMA SEXTO.

Siendo proporcionales el perímetro del cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ y de el cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$ así como la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ hay otra circunferencia proporcionar á ésta é igual al perímetro del cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$.

CONSTRUCCION DEMOSTRATIVA. *(Fig. 48).*

Desde los puntos $e^{\mathrm{VII}}\ e\ e'\ e''$ trácense las líneas $e^{\mathrm{VII}}\ e'''$, e^{IV}, $e\ e'\ e^{\mathrm{V}}$ y $e''\ e^{\mathrm{VI}}$. Todas estas líneas se cruzarán en el centro C de la figura, y por su grande importancia les doy el nombre de armosecantes.

Una vez trazadas éstas, véase que cruzan á la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ en los mismos puntos $f\ f'\ f''\ f'''\ f^{\mathrm{IV}}\ f^{\mathrm{V}}\ f^{\mathrm{VI}}\ f^{\mathrm{VII}}$ en que ésta intersecta á los cuatro lados del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ y como estas cuatro líneas tienen igual importancia, les doy el nombre de armotangentes.

Consecuentemente: considerando como armotangentes á las cuatro líneas $b\ b'$, $b'\ b''$, $b''\ b'''$ y $b'''\ b$ trácese con el compas, haciendo centro en C la circunferencia $e\ e'\ e''\ e'''\ e^{\mathrm{IV}}\ e^{\mathrm{V}}\ e^{\mathrm{VI}}\ e^{\mathrm{VII}}$ adonde su cruza con las armotangentes y los lados del armopolígono, la cual es la del círculo pedido en el Lema.

Ahora como el armopolígono cuyo lado $d\ d'$ es igual á 11 y produce un círculo cuya circunferencia es igual 44 y $a\ a''$ es igual á 14, el armopolígono cuyo lado es $b\ b'$ es igual á 14, produce una circunferencia igual á 56 y su diámetro igual á $17\frac{9}{11}$ porque

$$\div 11 : 14 :: 14 : 17\tfrac{9}{11}$$

De este modo han resultado en la figura 48, dos cuadrados armopolígonos y dos círculos proporcionales á ellos, siendo el círculo tipo ó normal el que tiene todas sus líneas alícuotas, porque su radio $C\ a=7$ y su circunferencia es $a\ a'\ a''\ a'''=44$ cuando su tangente $b\ b'$ es igual á 14. Pero si á esta tangente la hacemos$=$á 11, la circunferencia $g\ g'\ g''\ g'''$ resulta$=$44 y el radio $C\ g=7$, convirtiéndose $g\ g'\ g''\ g'''$ en el círculo tipo.

Así es que todos los círculos y sus armopolígonos ó armotangentes proporcionales pueden convertirse en el círculo tipo por medio de las armosceantes Q. E. L. D.

PROBLEMA SEGUNDO.

Trazar una elipse proporcional á los dos círculos $g\ g'\ g''\ g'''$ y $a\ a'\ a''\ a'''$ y á los dos armopolígonos $d\ d'\ d''\ d'''$ y $b\ b'\ b''\ b'''$

CONSTRUCCION RESOLUTIVA Y DEMOSTRATIVA.

Se ve y ha servido de base, que el armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$, tiene once módulos por cada uno de sus cuatro lados. Tambien se sabe que el diámetro $a\ a'$ tiene catorce módulos, y que el armopolígono $b\ b'\ b'''\ b''$ tiene por cada lado 14 módulos y que el diámetro $g\ g''=17\ \frac{9}{11}$. Por último, se conoce que los dos radios vectores de toda elipse, suman unidos la longitud de su eje mayor.

Con estos datos colóquense los dos focos de la elipse $g\ a'''\ g''\ a'$, en los puntos $i\ i''$ igual distancia á la longitud de los lados del armopolígono interior $=11$ y determinando los cuatro radios vectores $i\ a'$, $a'\ i''$, $i''\ a'''$ y $a'''\ i$, se ve que de a' hacia a''' hay 14 módulos, y que de i hacia i'' hay once, formándose un rombo con su eje mayor $a'\ a'''$ igual á 14 y su eje menor $i\ i''=11$.

Ahora resulta que el eje menor de la elipse $a'\ a'''$ viene á ser el eje mayor del rombo, y que moviéndose los dos puntos $a''\ a'''$ en revolucion, retenidos los radios vectores por los dos focos $i\ i''$ tocan los cuatro ángulos del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ y prolongándose la periferia de la elipse toca finalmente en el círculo esterior formándose en $g\ g''$ el eje mayor de la elipse.

De este modo se percibe que esta elipse llena las condiciones del problema, porque la distancia entre los dos focos $i\ i''$ es igual al lado del armopolígono menor. El eje menor de la elipse $a'\ a'''$ es igual al lado del armopolígono mayor, y la periferia de la elipse viene á ser cotangente con el círculo menor, y el eje mayor de la elipse $g\ g''$, es igual al diámetro del círculo mayor, siendo cotangente con la circunferencia de éste la periferia elíptica.

Consecuentemente resulta la proporcion siguiente:

$$\div i\ i''=11 : a'\ a'''=14 :: 14 : g\ g''=17\tfrac{9}{11}$$ Q. R. E. P.

PROBLEMA TERCERO.

Hacer que la elipse descrita sea determinatriz de los arcos del círculo, de las armotangentes, del armopolígono y del círculo tipo ó normal.

RESOLUCION Y DEMOSTRACION.

Si se polariza o se cruza en ángulos rectos otra elipse igual á la descrita, se tendrá $i' i'''$ por la distancia entre sus dos focos $a\ a'$ por su eje menor y $g' g'''$ por su eje mayor.

Luego entre ambas elipses tocarán al círculo mayor en $g\ g'\ g''\ g'''$ y al círculo menor en $a\ a'\ a''\ a'''$.

Luego en los puntos $d\ d'\ d''\ d'''$ en que se cruzan las periferias de ambas elipses tocan asimismo los cuatro ángulos del armopolígono cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ del círculo tipo.

Ahora percíbase la importante accion determinatriz de estas elipses.

El lado $d\ d^{VI}$ del armopolígono es igual á 11 módulos; y las diagonales $d\ C$, $d^{VI}\ C$, á las que por su importancia les doy el nombre de armosectores, determinan el ángulo de 90° $d\ C\ d^{VI}$. Suponiendo que los dos armosectores se mueven simultáneamente hacia el radio $C\ a'''$ deben resultar los fenómenos siguientes:

1°. Determinarán ángulos de más en más agudos hasta anonadar del todo su amplitud, confundiéndose con el radio $C\ a'''$.

2°. La longitud de los armosectores tocando siempre la curva elíptica determinatriz $d\ a'''\ d^{VI}$ irá disminuyendo hasta hacerse igual á la del radio $C a'''$.

3°. La armotangente $d\ d^{VI}$ que, como costado del armopolígono cuadrado es igual á la cuarta parte de la circunferencia normal, irá disminuyendo proporcionalmente, hasta el punto a''' en que se anonada el ángulo y consiguientemente el arco del cuadrante, con el lado, su igual del armopolígono.

Para demostrarse que estos tres resultados son correctos, veamos la figura en el estado actual dibujada.

1°. La armotangente $d\ d^{VI}$ está dividida en once módulos, y sostiene como cuerda de la curva elíptica $d\ a'''\ d^{VI}$ un ángulo recto en C.

2.° La curva elíptica está dividida en los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, correspondiendo paralelamente estas divisiones con las que tienen los dos armosectores marcados á trechos iguales con los números romanos I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X y XI. Ahora, si de todos estos puntos, pasando por las divisiones iguales de la armotangente $d\ d^{VI}$ se tiran las líneas paralelas *I, 1; II, 2; III, 3* hasta *XI 11* y al mismo tiempo se trazan las perpendiculares paralelas *I, X; 1, 10; II, IX; 2, 9;* hasta *V, VI; 5, 6* y se trazan las armotangentes 1, 10,, 2, 9,, 3, 8,, 4, 7 y 3, 6,, y desde estos puntos se trazan los nuevos armosectores hacia el centro C, se tendrá que la armotangente $d\ d^{VI} = 11$ es de la misma longitud del arco $d\ a'''\ d^{VI}$ y los dos armosectores marcan el ángulo $d\ C\ d^{VI}$. La armotangente *1, 10* tiene nueve módulos, el arco tiene tambien nueve módulos y los armosectores marcan el ángulo *1 C 10* y así las armotangentes van disminuyendo en 7, 5, 3 y 1 módulos, en igualdad á los arcos, y de la misma manera los armosectores van estrechando el ángulo hasta *5 C 6* en el cual (si se suponen los módulos tener el nombre de grados) se llega un grado, para seguir disminuyendo en minutos, segundos, etc. Siendo en todas estas divisiones las armotangentes ó cuerdas elípticas iguales á los arcos del círculo que determinan.

Hé aquí cómo las curvas elípticas $d\ a'''\ d^{VI}$, $d^{VI}\ a''\ d''$, $d''\ a'\ d'$ y $d'\ a\ d$, son determinatrices de los arcos y sus iguales armotangentes, con relacion á los ángulos marcados por los armosectores, desde los cuatro cuadrantes hasta la pequeñez requerida. Q. R. y D. E. P.

COROLARIO.

En comprobacion de la verdad de las operaciones detalladas en la demostracion que antecede, trácense en el lado del armopolígono exterior ó armotangente $b'\ a'\ b''$ la curva elíptica $b'\ g'\ b''$ trazándose iguales curvas elípticas en los cuatro lados del armopolígono exterior $b\ b'\ b''\ b'''$ haciéndose focos en $a\ a''$.

Como las dimensiones de cada lado de este armopolígono, son 14 módulos, cuando las del interior son 11, con igual escala divídase la armotangente $b'\ b''$ en catorce partes, y á los dos armosectores $b'\ C$ y $b''\ C'$ divídaseles tambien en catorce partes. Entónces, con el movimiento de los armosectores hasta confundirse ambos en el radio $C\ g'$, se tendrán los triángulos isóseles *b' C 14, 1 C 13, 2 C 12, 3 C 11, 4 C 10, 5 C 9, 6 C 8,* hasta anonadarse en 7 los ángulos.

En todos estos triángulos se perciben los fenómenos siguientes:

1.° Los ángulos determinados por los armosectores, se van haciendo de más en más agudos, hasta anonadarse en la línea recta marcada por el rádio $C\ a'$.

2.° La longitud de los armosectores va disminuyendo de más en más, hasta venir á ser iguales al rádio $C\ g'$, con el cual finalmente se confunden.

3.° Las bases de todos los triángulos isóseles determinadas por los armosectores, son las armotangentes iguales á los arcos del círculo que subtenden, las que van disminuyendo hasta anonadarse en g'.

4.° Los arcos de la circunferencia determinados por los armosectores, son siempre iguales á las armotangentes, con las cuales se anonadan finalmente en g' . . . Q. R. y D. E. P.

LEMA SÉTIMO.

Si se toma al radio del círculo por norma, los armosectores son iguales al radio, más la ságita exterior al círculo, y las armotangentes sostienen una apotema igual al radio, ménos la ságita interior entre la armotangente y la circunferencia.

DEMOSTRACION.

Los armosectores $b'\ C$ y $b'^{v}\ C$, tienen de longitud el radio $C\ n +$ la ságita exterior $n'\ b'$ y $C\ n'' +$ la ságita $n''\ b'$, á la vez que la armotangente $b'\ a'^{v}\ b'^{v}$ tiene por ságita interior la línea $a'\ g'$ igual al radio, ménos la apotema $C\ a'$.

Descrito así el hecho, se percibe en el movimiento de los armosectores la siguiente ley: *Disminuyendo la amplitud de los ángulos por la aproximacion igual y simultánea de los armosectores, se van produciendo armotangentes de más en más pequeñas y disminuyendo las ságitas, tanto exteriores como interiores, de manera que las exteriores son siempre de la mitad de la longitud de las interiores, á la vez que las apotemas van creciendo hasta hacerse iguales al rádio, siendo los arcos constantemente iguales á sus armotangentes.*

La correccion de esta ley se prueba, porque si las ságitas exteriores fueran mayores ó menores que la mitad de las interiores, al irse aproximando los armosectores y produciendo triángulos isóseles con bases de menor á menor, no se anonadarían las ságitas definitivamente con igualdad, y por consecuencia la operacion sería imperfecta. Pero, como el diagrama manifiesta, en todas las armotangentes desde *0, 14*, hasta *6, 8*, la disminucion de las ságitas es constantemente la misma en sus relaciones recíprocas y el incremento de la apotema *C a'* es tambien constante en razon inversa con el decrecimiento de la ságita interior, hasta hacerse la apotema igual al rádio *C g'*. Así pues, la ley es constante como adelante se comprobará. Por ahora Q. D. E. L.

LEMA OCTAVO.

La ley por la cual conforme van disminuyendo los arcos, los armosectores, las armotangentes y las ságitas, armónicamente con la disminucion de los ángulos del círculo, á la vez que las apotemas van creciendo hasta hacerse iguales al rádio, se hace perceptible en la bidivision constante de los ángulos.

DEMOSTRACION. FIGURA 49.

En torno del centro *C* trácese el círculo *x x' x" x'"* y con el diámetro de éste como rádio, trácese el círculo *a a' a" a'"*. Es evidente que éste tiene doble rádio, doble circunferencia y dobles proporciones que el primero. Consecuentemente: si el círculo menor tiene 28 módulos de rádio, el rádio, del mayor es = 56.

Hecho esto, trácense geométricamente los diámetros polarizados ó cruzados en ángulos rectos *a a"* y *a' a'"* y dividiendo por mitad los ángulos rectos resultantes, trácense las diagonales *d d"* y *d' d'"*.

En este estado el dibujo, se trazarán con 22 módulos los cuatro lados del armopolígono, del círculo interior, *f f' f" f'"* y con 44 módulos los cuatro lados del armopolígono *d d' d" d'"* del círculo exterior *a a' a" a'"*.

Es evidente que el armosector *d C* es el duplo del armosector *f'" C*, y que la apotema *i C* es doble de la apotema *t C*. Del mismo modo la ságita interior *a i* es doble de la ságita exterior *d r*, y ésta es igual á la ságita interior *z t*, por lo que estas dos ságitas son iguales á la mitad de la ságita interior *a i*.

Ahora, paralelas al diámetro polarizado *a a'*, llévense los lados *f'" f"* hasta los puntos u^{V} *u* y *f f'* hasta $u' u^{IV}$.

Del mismo modo, paralelos al diámetro polarizado *a'" a'*, llévese el lado *f'" f* del armopolígono del círculo interior, hasta $u^{VII} u"$ y *f'" f* hasta $u^{VI} u'"$.

Trazándose ahora las ocho armotangentes $u\ u'$, $u'\ u"$, $u"\ u'"$, $u'"\ u^{IV}$, $u^{IV}\ u^{V}$, $u^{V}\ u^{VI}$, $u^{VI}\ u^{VII}$, y $u^{VII}\ u$, resulta que todas estas 8 armotangentes son necesariamente iguales á las cuatro armotangentes *f f' f' f"*, *f" f'"* y *f'" f*.

Dibujando en seguida las líneas $u\ C\ u^{V}$, $u'\ C\ u^{IV}$, $u"\ C\ u^{VI}$ y $u'"\ C\ u^{VII}$, resultan:

1.° Que el armopolígono cuadrado ó de cuatro lados *b b' b" b'"*, en rededor del círculo *x x' x" x'"*, se ha convertido en un armopolígono octágono ó de ocho lados $u\ u'\ u"\ u'"\ u^{IV}\ u^{V}\ u^{VI}\ u^{VII}$, en torno del círculo de doble rádio *a a' a" a'"*.

2.° Que si se duplican los lados del armopolígono, guardándoles la misma longitud á las armotangentes, resultan bidivididos los ángulos.

Y 3.° que la ságita exterior *f o* es la mitad de la ságita exterior *r' d'* á la vez que la ságita interior *t x* es la mitad de la ságita interior *i a* por lo que $z\ a = \frac{ia}{4}$ Q. D. E. L.

LEMA NOVENO.

Conservando la longitud de los lados de los armopolígonos, y duplicando el rádio del círculo, se duplican los lados del armopolígono del círculo simple armónicamente con el círculo doble.

DEMOSTRACION. *(Fig. 49).*

El armopolígono *b b' b" b'"* de cuatro lados tiene su perímetro igual á 88 módulos, igual á la circunferencia *x x' x" x'"* consecuentemente el armopolígono $u\ u'\ u"\ u'"\ u^{IV}\ u^{V}\ u^{VI}\ u^{VII}$ de ocho lados tiene su perímetro = 176 módulos = á la circunferencia *a a' a" a.'"*

Ahora, haciendo á *o o' o" o'"* el círculo tipo, si se le traza el armopolígono *f f' f' f'"* se ve que se interceptan ambos armopolígonos en los puntos *p p' p"* $p'"\ p^{IV}\ p^{V}\ p^{VI}\ p^{VII}$ por lo que trazándose las líneas que cortan estos ocho puntos, $u\ u^{IV}$, $u'\ u^{V}$, $u"\ u^{VI}$ y $u'"\ u^{VII}$ cruzándose todos en el centro C el perímetro del armopolígono, ha duplicado su número de lados á la vez que ha conservado la longitud de los lados ó armotangentes.

Porque C *f* = *f u'* = *u' b* = *b* C y C *b* = *b u* = *u f'"* = *f'"* C por lo que el ángulo de 90° *d* C *d'* subteniendo el lado del armopolígono cuadrado *d d'* y al arco, su igual en longitud, *r a r'* se ha bidividido en dos ángulos de 45° iguales á *u* C *u'* resultando u u' = $\frac{d'\ d.'}{2}$

Y Como los cuatro lados del armopolígono del círculo menor *b b' b" b'"*, son iguales é igualmente producen la duplicacion de sus lados, conservando la longitud de sus armotangentes bidividiendo los ángulos, los ocho lados $u\ u'\ u"\ u'"\ u^{IV}\ u^{V}\ u^{VI}\ u^{VII}$ son tambien sus iguales habiendo duplicado su perímetro.

COROLARIO.

Demostrado como está, que al duplicarse el radio del círculo, se duplican los lados del armopolígono, conservando la misma longitud de sus lados ó armotangentes, véase que esta ley morfológica es constante.

Prolónguense las líneas *b b'* hasta *B*, y *b'" b"* hasta *B'* y el radio C *o'* á su duplo C *r"* y de ahí al cuádruplo C *A"*, de este modo, el arco de 90° *x' x"* una vez rectificado es igual al armotangente *b' b"* igual al arco de 45° y $u'"\ u^{IV}$ una vez rectificado es igual á su armotangente, igual á el arco de 22½° *B B'* igual á su armotangente *A A.'*

Se ve por la simple inspeccion del diagrama que el radio simple C *o'* lo es de el lado *b' b"* del armopolígono de cuatro lados. Que el radio duplo C *a*, lo es del lado $u'"\ u^{IV}$ del armopolígono de ocho lados. Por lo que el radio cuádruplo C *A"* del lado *B B'* lo es del armopolígono de diez y seis lados. Porque C $u'"$ es = $u'"$ *A* = *A r"* = *r"* C. Luego el ángulo *b'* C *b"* de 90° se ha convertido en $u'"$ C u^{IV} en ángulo de 45°, y en *A* C *A'* en ángulo de 22½°. Luego los armopolígonos han sido; de cuatro lados en el círculo de radio sencillo. De ocho lados en el círculo de radio duplo y de diez y seis lados en el círculo de radio cuádruplo.

Consecuentemente: los arcos y los lados de sus armopolígonos tienen constantemente las mismas relaciones de igualdad entre sí, bien se aumenten ó disminuyan: Q. D. E. L.

LEMA DECIMO.

Cuando se bidivide un mismo círculo, la ságita interior se disminuye á la cuarta parte, mas cuando se bidivide el ángulo, conservándose la longitud de la armosecante por la duplicacion del radio del círculo, la ságita interior disminuye solo á la mitad.

DEMOSTRACION. *(Fig 49).*

El ángulo b' C b'' es de 90°, y la ságita interior j' o' es igual á doce módulos cuando el radio $C\,o' = 28$ y la apotema $C\,j' = 16$.

El ángulo u''' $C\,u^{IV}$ es de 45°, y la ságita interior es $= 6$ módulos cuando el radio C r'' $= 56$ y la apotema $C\,D = 50$.

El ángulo B $C\,B'$ es de $22\frac{1}{2}$°, y la ságita interior D' A'' $= 3$ módulos cuando el radio $C\,A'''$ es $= 112$ y la apotema $C\,D = 109$.

Porque á cada vez que se duplica el radio del círculo, se duplica su circunferencia, y consecuentemente su armopolígono. Mas como en razon inversa disminuyen las ságitas, conforme el arco de la circunferencia se va aproximando hacia la línea recta que constituye la armotangente ó lado del armopolígono, la razon del decrecimiento de la ságita interior es y debe ser, de mitad en mitad más pequeña, en razon inversa de los radios que son de mitad en mitad mayores.

Pues en efecto: el lado del armopolígono b' b'' es $= 22$ módulos, y su perímetro igual á la circunferencia $= 22 \times 4 = 88$, siendo el radio $= 28$.

El lado del armopolígono u''' $u^{IV} = 22$ módulos y su perímetro $=$ á la circunferencia $= 22 \times 8 = 176$, siendo el radio $= 56$.

El lado del armopolígono B $B' = 22$ módulos y su perímetro $=$ á la circunferencia $= 22 \times 16 = 352$, siendo el radio 112.

Así se ve una ley importante y es *que cada vez que se duplica el radio se duplica la circunferencia y se duplican los lados del armopolígono, haciéndose éstos de más en más semejantes con los arcos que miden y que éstos van de más en más acercándose á la línea recta designada por el lado del armopolígono, por lo que la ságita interior que mide la distancia entre este lado y el arco respectivo es de más en más pequeña en razon inversa de la duplicacion sucesiva del radio.*

Demostrada así una parte del lema, paso á demostrar la otra.

El ángulo f''' $C\,f$ tiene por lado del armopolígono $f'''\,f = 22$ módulos, por apotema $C\,t = 16$, y por ságita interior $t\,x = 12$, siendo el radio $C\,x = 28$.

El ángulo u $C\,u'$ tiene por lado del armopolígono $u\,u' = 22$ módulos, por apotema $C\,z = 50$ y por ságita interior $z\,a = 6$, cuando el radio es igual á 56.

Ahora, siendo el radio $C\,a = 56$ se ve que, siendo el lado $d\,d'$ igual á 44 el ángulo d $C\,d'$ es de 90°, por consecuencia la apotema $C\,i = 32$ y la ságita interior $i\,a = 24$ cuando el radio es $= 56$. Luego la ságita z a $= 6 = \frac{i\,a}{4}$ es igual á la cuarta parte de la ságita interior $i\,a$. Q. D. E. L.

LEMA UNDECIMO.

El polígono circunscrito al círculo normal, es á su vez armopolígono de otro círculo proporcional.

DEMOSTRACION. FIGURA 50.

El círculo normal $o\,o'\,o''\,o'''$ tiene como diámetros polarizados las líneas prolongadas hasta $m\,m''$ y $m'''\,m'$ y como armosectores las líneas prolongadas hasta $y\,y''$ é $y'\,y'''$ consecuentemente está dividido en 8 ángulos de 45° cada uno.

Ahora, de la manera detallada en el lema anterior, trácense los cuatro lados de su armopolígono $d\,d'\,d''\,d'''$ y su polígono circunscrito $b\,b'\,b''\,b'''$ y tírese la circunferencia proporcional e'''.

Con el duplo de $C\,o$ tráçese la circunferencia $o^{V}\,o^{VI}\,o^{VII}\,o^{IV}$ y con el duplo de $C\,e'''$ se traza la circunferencia $m\,m'\,m''\,m'''$.

Despues llévense paralelas las cuatro líneas del cuadrado circunscrito desde u hasta u'''. Desde u^{VII} hasta u^{IV}. Desde u' hasta u^{VI}. Y desde u'' hasta u^{V} y trazándose las armotangentes $u\,u'$, $u'\,u''$, $u''\,u'''$, $u'''\,u^{IV}$, $u^{IV}\,u^{V}$, $u^{V}\,u^{VI}$, $u^{VI}\,u^{VII}$ y $u^{VII}\,u$ queda construido el armopolígono de la circunferencia cuyo radio $C\,m$ es el duplo del radio $C\,e'''$

Si en torno del círculo cuyo radio es $C\,o^{V}$ se verifica igual procedimiento con las líneas del armopolígono $d\,d'd''d'''$ se tienen duplicados sus lados en torno de la circunferencia $o^{V}\,o^{VI}\,o^{VII}\,o^{IV}$ con ocho armotangentes iguales á $b^{V}\,b^{VI}$.

Trazadas despues las curvas elípticas $d\,o\,d'$, $b\,e'''\,b'$, $b^{V}\,o^{V}\,b^{VI}$ y $u\,m\,u'$ y todas las semejantes de ellas, se tiene construida la figura X. Ahora $b\,b'$ que es un lado del cuadrado circunscrito al círculo normal $o\,o'\,o''\,o'''$ llevado hasta $u\,u'$ viene á ser la armotangente del armopolígono de ocho lados en torno del círculo proporcional $m\,m'\,m''\,m'''$.

Consecuentemente tenemos 1° que $b\,d\,C\,d'\,b'$ es un ángulo de 90°, y que $u\,b^{V}\,C\,b^{VI}\,u'$ es un ángulo de 45°

2° Que el duplo del radio $C\,o$ es el radio $C\,o^{V}$, y que el duplo del radio $C\,e'''$ es el radio $C\,m$; pero el lado del polígono circunscrito $b\,b'$ al cuadrante del círculo normal $d\,o\,d'$ no es ya tangente del arco $b^{V}\,o^{V}\,b^{VI}$ sino armotangente $u\,x\,u'$ del arco su igual: m.

3° De este modo resulta que el círculo $o\,o'\,o''\,o'''$ es proporcional al círculo e''', y que el círculo $o^{IV}\,o^{V}\,o^{VI}\,o^{VII}$ es proporcional al círculo $m\,m'\,m''\,m'''$

4° Que la armotangente $d\,d'$ es igual á la armotangente $b^{V}\,b^{VI}$, y que la armotangente $b\,b'$ es igual á la armotangente $u\,u'$.

5° Consecuentemente que el ángulo $b\,d\,C\,d'\,b'$ de noventa grados se ha convertido en el ángulo $u\,b^{V}\,C\,b^{VI}\,u'$ de 45, conservando la longitud de los lados $d\,d'$ con $b^{V}\,b^{VI}$ y $b\,b'$ con $u\,u'$.

6.° Que el diámetro del círculo normal o''' $C\,o'$ es igual á 28 módulos, é igual al lado de su polígono regular circunscrito de cuatro lados $b\,o\,b'$, é igual al lado $u\,x\,u'$ del armopolígono de ocho lados del círculo $m\,m'\,m''\,m'''$ trazado con el radio $C\,m$. Q. D. E. L.

TEOREMA MORFOLÓGICO.

La expresion más sencilla de las diferentes armonías del círculo, es que: su radio es igual á 7 cuando su circunferencia es igual á 44. Mas no se suspenden aquí esas armonías, porque así mismo armonizan alícuotamente con la circunferencia las demas líneas y planos en el círculo tipo ó normal numéricamente.

DEMOSTRACION.

Las demostraciones detalladas en los lemas y problemas que anteceden, dan á conocer que en el círculo normal ó tipo hay como resultantes: 1.° Su radio. 2.° Su diámetro. 3.° Su armopolígono. 4.° Su polígono circunscrito. 5.° Sus armotangentes. 6.° Sus armosecantes. 7.° Sus armosectores. 8.° Sus ságitas exteriores. 9.° Sus apotemas. 10.° Sus ságitas interiores. 11.° Su circunferencia. 12.° Su area. 13.° El area de su armopolígono. 14.° El area de su polígono circunscrito. Y 15.° Las curvas elípticas determinatrices.

Despues de las demostraciones gráficas, algebraicas y numéticas ya expresadas, solo queda por demostrarse sinópticamente la proporcionalidad en todas las líneas y dimensiones enunciadas, tomándose para la demostracion del círculo tipo uno de sus múltiples con números suficientemente altos para evitar fracciones, las cuales repito son inadmisibles en Morfológia, por ser representadas las líneas morfológicas con esférides ó átomos esféricos, los que en la Naturaleza son todos iguales, esféricos, impenetrables, y por consecuencia, indivisibles é inalterables.

Bajo esta inteligencia, y supuesto que á las demostraciones de los lemas que anteceden, las creo suficientes para ratificarse su verdad con respecto al círculo tipo, voy á confirmar esas demostraciones con una serie sostenida de cinco de sus múltiples, y para evitar fracciones tomo las demostraciones mínimas de sus líneas multiplicadas por 32, cesando en las operaciones del cálculo luego que aparece en las ságitas exteriores la primera cantidad fraccional.

El método seguido en la próxima sinopsis es el demostrado ya: que al bi-dividirse los ángulos, conservándose iguales los lados de los armopolígonos, se duplican los radios, las circunferencias y los lados de los armopolígonos, disminuyendo las ságitas en razon inversa y aumentando las apotemas en razon directa de la duplicacion de los radios, con la adicion de los armosectores.

SINOPSIS DE LAS LÍNEAS PROPORCIONALES DEL CÍRCULO.

Radios.	Ságitas exteriores.	Armosectores.	Angulos.	Ságitas interiores.	Apotemas.	Radios.	Armotangentes.	Lados de los armopolígonos.	Perímetro de los Armopolígonos.	Diámetros.	Circunferencias.
224+	24=	248	90°	48+	176=	224	352×	4=	1403	448	1408
448+	12=	460	45°	24+	424=	448	352×	8=	2816	896	2816
896+	6=	902	$22\frac{1}{2}$°	12+	884=	896	352×	16=	5632	1792	5632
1792+	2=	1794	$11\frac{1}{4}$°	6+	1786=	1792	352×	32=	11264	3584	11264
3584+	$1\frac{1}{2}$=	$3585\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{8}$°	3+	3581=	3584	352×	64=	22528	7168	22528

Con la anterior sinopsis queda demostrado: 1.° La proporcionalidad de las líneas del círculo. 2.° La permutabilidad metamórfica de todas ellas, carentes de fracciones, pues aunque en la columna segunda aparece la fraccion de $1\frac{1}{2}$

para la ságita exterior ha sido prevista para determinar el límite requerido en la sinopsis, y 3.° Que en la columna 4.ª aparecen fracciones de los grados del círculo, debidas á la division hoy aceptada de 360°·á la circunferencia, para cuya correccion propondré adelante una nueva division morfológica.

Demostrada como se halla la proporcionalidad de las líneas relativas al círculo, debo decir algunas palabras acerca de los planos.

En el lema cuarto tengo demostrado por medio de la figura 48, que entre el cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$ y el cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ aquel circunscrito y este armopolígono, hay proporcionalmente el círculo $a\ a'\ a''\ a'''$. Que el primer cuadrado circunscrito tiene sus cuatro lados iguales al diámetro del círculo, y el segundo cuadrado armopolígono tiene su perímetro igual á la circunferencia del círculo.

Por último: tengo demostrado y descrito con la construccion misma del diagrama, que el cuadrante de la circunferencia es igual al lado del armopolígono regular de cuatro lados igual á once módulos, por lo que un paralelógramo, teniendo por sus dos lados mayores las dimensiones del cuadrado circunscrito, y por sus dos lados menores las dimensiones del armopolígono, es un medio proporcional entre estos dos cuadrados, y que siendo el círculo un medio proporcional tambien entre los mismos, tiene su area igual á la del paralelógramo descrito.

Y en efecto: el cuadrado circunscrito $b\ b'\ b''\ b'''$, figura 48, tiene todos sus cuatro lados iguales á 14 módulos iguales al diámetro $a\ a''$ del círculo $a\ a'\ a''\ a'''$, cuya circunferencia está inscrita y circunscrita á la vez por los cuatro lados del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$, y el paralelógramo $e\ e^{V}\ e'\ e^{IV}$ tiene por sus lados mayores $e\ e^{V}$ y $e'\ e^{IV}$ la longitud del lado del cuadrado circunscrito y el diámetro del círculo $a\ a'$; y por sus dos lados menores $e\ e'$ y $e\ \ e^{V}$ la longitud del lado del armopolígono $d\ d'$.

Por último: tengo demostrado que para valuarse el area del círculo se multiplica la circunferencia por la mitad del radio, ó lo que es lo mismo: se multiplica el cuadrante de la circuferencia por el diámetro del círculo, lo que viene á ser igual á la multiplicacion del lado menor por el lado mayor del paralelógramo.

Estas operaciones traen por consecuencia la proporcion siguiente, llamando A al lado del cuadrado circunscrito, B al cuadrante de la circunferencia, C al diámetro y D al lado del armopolígono, resulta:

$\div A : B :: C : D$ Para la proporcion lineal, véase la proporcion de las areas:

$\div A = 14^2 : B \times C :: C \times B : D^2$ y sustituyendo los números.

$\div 14^2 = 196 : 44 \times 3\frac{1}{2} = 154 :: 11 \times 14 = 154 : 11^2 = 121$. Y exponiendo estos números en forma de ecuacion

$(\frac{11\ 14}{121}) = (\frac{196}{14\ 11}) = (\frac{196}{154})$ y analizando el cuociente

$\div \frac{154}{121} : 1\frac{33}{121} :: \frac{196}{154} : 1\frac{42}{154}$ y comparando los resultados

$\div 154 \times 154 : 196 \times 121 :: 121 \times 42 : 154 \times 33$. Q. D. E. T.

TEOREMA 2.°

Hay en el círculo comensuralidad morfológica y metamórfica con los planos alícuotas; consecuentemente no existe un cuadrado así mismo alícuota con el círculo, por no tener el area de esta raíz cuadrada exacta, pero hay círculos proporcionales con un término medio cuadrado.

DEMOSTRACION. FIGURA 48.

Si se toma el paralelógramo $e\, e^{V}\, e^{IV}\, e'$ se ve que tiene 14 módulos de longitud y 11 de latitud, por lo que multiplicando el uno por el otro estos números, resulta exactamente el arca del círculo. Ahora polarizando el paralelógramo $e''\, e'''\, e^{VI}\, e^{VII}$ resultan cuatro ángulos $e\, b\, e^{VII}$, $e^{VI}\, b'''\, e$, $e^{IV}\, b''\, e'''$ y $e''\, b\, e''$

En este estado el dibujo, se trazan las líneas $e\, e^{VI}$, $e^{VI}\, e^{V}$, $e^{IV}\, e'''$ y $e''\, e'$ y sirviendo de límites esas líneas, se dibuja el cuadrado $n\, n'\, n''\, n'''$ que es el indicado en el teorema morfológicamente; pero no numéricamente, porque 154 no tiene raíz cuadrada exacta.

Para subsanar este inconveniente, es necesario elevar el área de círculo tipo á su cuadrado, y por consecuencia multiplicar por 154 los otros dos términos de la proporcion para conservar la proporcionalidad del todo, por lo que:

$\div\, 121 \times 154 = 18{,}634 : 154^2 = 23{,}716 :: 23{,}716 : 196 \times 154 = 30{,}184.$

Consecuentemente 18,634 es un círculo menor, y 30,184 es otro círculo mayor proporcionales, los que tienen por término medio al cuadrado 23716, resultando la proporcion siguiente, tomando por A al círculo menor, por B al cuadrado medio y por C al círculo mayor: $\div A : B :: B : C$.

Porque $\div 121 : 154 :: 11 : 14$, y $154 : 196 :: 11 : 14$.

Y $\div 18{,}634 : 23{,}716 :: 11 : 14$, y $23{,}716 : 30{,}184 :: 11 : 14$.

Para demostrar que estos dos círculos son correctos, se sabe que el área del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio, y como el perímetro del armopolígono es igual á la circunferencia, tenemos que 121 es igual al lado del armopolígono de cuatro lados, y que 154 es igual al diámetro, luego: $121 \times 4 \times \frac{154}{4} = 18{,}634$.

Y para el círculo mayor: $154 \times 4 \times \frac{196}{4} = 30{,}184$.

Y como el cuadrado del término medio es 154^2—23,716, resulta la proporcion definitiva que sigue en forma de ecuacion:

$\div 18{,}634 \times 30{,}184 = 562.448{,}656 = 23{,}716^2$.

Y de aquí resulta: 1.° Que el área del círculo tipo = 154 no teniendo raíz cuadrada exacta, no puede un círculo morfológico ser perfectamente alícuota con un cuadrado numérico. Y 2.° Que para hacerse proporcionales dos círculos numéricamente con un cuadrado como término medio, bastan las proporciones del círculo tipo, multiplicándose las áreas de los tres términos proporcionales por el término medio. Q. E. T. D.

EXPOSICION DEMOSTRATIVA.

Creo haber demostrado hasta la evidencia, que el radio del círculo es con respecto á la circunferencia, como 7 es á 44 y que hay un polígono que no es inscrito ni circunscrito igual á la circunferencia, porque inscribe y circunscribe á la vez á ésta, armónica y proporcionalmente.

Para demostrarse que el radio del círculo es igual á 7, basta saberse que éste ha sido el punto de partida en la construccion de la fig. 48 de la lámina 1.ª, y para cerciorarse de que la circunferencia es igual á 44, basta seguir la construccion de la misma figura y ver la evidencia de ser el armopolígono de 44 módulos, los cuales se identifican con la circunferencia del círculo, porque siempre las secciones de ambas líneas son idénticas entre sí, ya se sumen ó se resten, se multipliquen ó dividan, se eleven á potencias ó se les extraiga raíces.

Las verdades así demostradas han estado sujetas á la más estricta ideología, y concordes con proporciones morfológicas, geométricas y numerales tan correctas que nunca han sido contrariadas en la práctica, ni ha sido necesario en ellas el uso de cantidades fraccionales, por lo que me lisonjeo de haber hallado con ellas la clave de las proporciones morfológicas, en tan interesante problema, para conciliar teórica y prácticamente la permutacion de las formas en el metamorfismo de la Naturaleza.

Ahora procuraré dar una idea acerca de la esfera como sólido, aunque tengo el sentimiento de que las demostraciones gráficas son muy imperfectas, sin la vista de los sólidos que tengo formados, por lo que es necesario conformarse con lo posible en las explicaciones y demostraciones que seguirán.

En geometría se enseña que la superficie del cilindro es la circunferencia multiplicada por el diámetro, lo cual es cierto morfológicamente, porque hay en la morfológia una verdadera curva circular, la cual no existe en geometría, por ser en esta ciencia la circunferencia del círculo un verdadero polígono.

Ahora, para valorizar numéricamente en geometría la superficie de la esfera, se dice que es igual á cuatro círculos máximos, ó lo que es lo mismo: igual á la superficie exterior del cilindro.

Morfológicamente es sumamente fácil el verificarlo, por estar bien definida y sin fracciones la circunferencia, pero no así geométricamente adonde ésta se considera solo como una aproximacion, por lo que aun cuando ésta sea en millonésimas, siempre es indispensable el prescindir de fracciones perpetuas.

Por consecuencia, usando de las proporciones morfológicas analizaré las reglas indicadas para obtenerse la superficie de la esfera.

Cuatro círculos máximos son $154 + 4 = 616$.

La superficie exterior del cilindro es la circunferencia multiplicada por el diámetro, lo cual da $44 \times 14 = 616$, un producto igual al de los cuatro círculos máximos.

Acerca de estos resultados debo decir, que trazándose en la esfera el armosferio pentagonal y cubriéndose sus líneas con pequeños círculos proporcionales, es decir, cuarenta y cuatro á la circunferencia, y haciéndose estos discos circulares, de cuatro diferentes colores, se logra dibujar con ellos en la superficie esférica el duodecaedro pentagonal, el icosaedro, el tricontriedro, y entonces resulta exactamente cubierta la superficie esférica con 616 módulos circulares, pero no en el arreglo cuadrangular, Lámina 1.ª, fig. 6, si no en el arreglo triangular equilátero, fig. 5, combinado con el arreglo pentagonal, fig. 1.

Para demostrarse que la regla geométrica es erronea, basta el aplicarla prácticamente para valuar la esfera como sólido.

Se supone que á todas las partes que constituyen la superficie esférica, se las considera como á las bases de otras tantas pirámides, cuyas aristas coinciden todas en el centro de la esfera, por lo que basta multiplicar las bases de estas pirámides por la tercera parte de la altura, para tenerse el valor del volúmen de la esfera.

Ya se percibe por esta regla el que en geometría, así como se hace del círculo un verdadero polígono, se hace de la esfera un verdadero poliedro, por referirse sus medidas, como sólido, á bases planas piramidales.

Mas prescindiendo en lo pronto de esta inexactitud, véase cuál es el sólido resultante de las reglas geométricas. Suponiendo á la superficie esférica compuesta de 616 modelos y su radio de 7; para valuar aquellos como las bases de otras tantas pirámides, se necesita multiplicarlos por la tercera parte de su