altura, es decir, del radio. Luego $616 \times 2\frac{1}{3} = 1437\frac{1}{3}$. Pero como despues demostraré, siendo la esfera, la mitad del cubo que la circunscribe $= \frac{2744}{2} = 1372$, resulta que el valor del volúmen de la esfera, valuado por los medios geométricos es $65\frac{1}{3}$ módulos mayores que lo es en realidad, conteniendo ademas una fraccion inadmisible.

Para no incurrir en semejantes errores, me he visto obligado á recurrir á un método diverso, el que procuraré en lo posible demostrar.

LEMA DUODÉCIMO.

El volúmen de la esfera es igual á la mitad del volúmen del cubo que la inscribe.

DEMOSTRACION.

La fig. 32, Lámina 1.ª, representa una esfera inscrita en un cubo. Siendo el diámetro esférico la raíz del cubo, tenemos $14^3 = 2744$, consecuentemente: el volúmen de la esfera es $= 1372$. Porque si suponemos á la esfera dividida en ocho partes iguales y colocándose á una de dichas partes en cada uno de los ángulos sólidos del cubo, quedando los ocho segmentos hacia el interior, resulta que queda vacío un espacio igual al que hay ahora entre la esfera y los ángulos sólidos del cubo, por lo que entre el volúmen de éste y el de la esfera que inscribe, hay la diferencia de 2 á 1.

Esta demostracion puede aparecer como algo vaga, y yo confieso que sólo se hace evidente con la exposicion de los sólidos. Por este motivo me he visto obligado á apelar á otra prueba material fundada en el principio de inmersion de Arquímedes.

Para eso construí un cubo de placas metálicas teniendo en su interior por todos sus lados igual longitud al diámetro de una esfera muy correcta de marfil, de modo que ésta, puesta dentro del cubo llenaba éste, tocándolo en los centros de todas sus seis caras, perfectamente planas y cuadradas. Por consecuencia, este cubo circunscribía á la esfera de marfil.

Para experimentar con este aparato: 1°. En una balanza de precision pesé el cubo de metal con su tapa y la esfera de marfil: 2°. Lleno el cubo de agua pesé la cantidad del líquido que la llenaba, conservando en el plato de la balanza la esfera. 3°. Puesta la esfera de marfil dentro del cubo lleno de agua, necesariamente desalojó de él una cantidad igual á su volúmen. Y cuando comparado el peso del agua llenando el cubo, con el agua que despues lo llenó con ménos el volúmen de la esfera, resultó que en el primer caso, el líquido pesó exactamente el duplo del líquido que en el segundo caso.

Para evitar la influencia capilar de las paredes del cubo y la superficie de la esfera, tuve la precaucion de mojarlas preliminarmente y llenar el cubo al colmo, poniéndole encima su tapa, derramando el agua sobrante y enjugando el exterior ántes de pesar de nuevo el aparato.

Despues del razonamiento morfológico arriba expuesto, y los resultados del experimento físico aquí detallado, me parece que D. E. L. Q. D.

LEMA DECIMO TERCIO.

Una vez demostrado que el volúmen de la esfera es igual á la mitad de el del cubo que la inscribe, resulta que la superficie esférica es igual á 588 módulos.

DEMOSTRACION.

Siendo el radio de la esfera $= 7$ su tercera parte es $= 2\frac{1}{3}$. Por consecuencia, el volúmen de la esfera dividido por la tercera parte del radio es $= \frac{1372}{2\frac{1}{3}} = 588 =$ á la superficie de la esfera.

Para demostrarse que esto es cierto véase la figura 34. Ésta representa un cuadrado inscrito en un círculo, y este inscrito en otro cuadrado evidentemente de dobles dimensiones que el primero.

Por lo tanto teniendo el cuadrado circunscrito sus lados iguales al diámetro del círculo y siendo éste igual á 14, el área del cuadrado circunscrito es igual á 196, y el área del inscrito igual á 98. Pues bien $98 \times 6 = 588$. Es decir que, el área de las seis caras del cubo con sus doce filos inscritos en la esfera es igual á la superficie de la esfera misma. Este resultado se confirma, por la analogía que existe entre la circunferencia del círculo, la cual es una línea curva reentrante en sí misma y todos sus puntos equidistantes de un centro comun, y la superficie de la esfera, la cual es una circunsuperficie convexa, reentrante en sí misma y á todos sus puntos de igual convexidad, equidistantes de un centro comun. Por consecuencia así como para el círculo hay un armopolígono cuyo perímetro es igual á la circunferencia $= 44$, así tambien para la esfera hay un armopoliedro cúbico, cuya superficie es igual á la circunsuperficie esférica $= 588$ Q. E. L. D.

COROLARIO

La analogía entre el armopolígono y el armopoliedro no se suspende aquí, pues así como el armopolígono cuadrado igual á la circunferencia del círculo que es $= 44$, multiplicada por la mitad del rádio produce 154, igual al círculo, así tambien la superficie del armopoliedro cúbico $= 588$ igual á la circunsuperficie esférica, multiplicada por la tercera parte del rádio es 1372 igual al volúmen de la esfera.

De este modo es como en el metamorfismo natural la transformacion del armopolígono en circunferencia se verifica por la depresion de los cuatro ángulos planos del cuadrado, así tambien en la transformacion de la superficie exterior del armopoliedro en circunsuperficie, se verifica por fuerzas exteriores que deprimen las ocho aristas del cubo, abultándose sus seis caras por la igualdad de presion de las fuerzas, las que añadiendo las esférides necesarias convierten al armopoliedro en esfera.

RESÚMEN.

De todo lo expuesto resulta que la esfera tipo tiene por rádio 7 esférides. Por diámetro 14. Por circunferencia 44. Por círculo máximo 154. Por circunsuperficie en el arreglo cuadrangular 588. Por circunsuperficie en el arreglo pentagonal y equilátero 616 y por volúmen 1372.

Por complemento: la esfera cruzada por nueve círculos máximos equiarmónicos, produce al armosferio cuadrangular, compuesto de cuarenta y ocho triángulos rectángulos esféricos iguales, generadores del tetraedro del cubo, del octaedro y del duodecaedro rombal, resultando todos estos poliedros alícuotas y por consiguiente metamórficos.

La esfera, cruzada con quince círculos máximos equiarmónicos, produce al armosferio pentagonal compuesto de ciento veinte triángulos rectángulos iguales, generadores del duodecaedro pentagonal, del icosaedro y del tricontriedro, resultando todos estos poliedros alícuotas.

Por último el poliedro de transicion entre ambos armosferios es el tetraedro generado por el armosferio cuadrangular y componente con veinte tetraedros del icosaedro generado por el armosferio pentagonal.

Así es como la esfera resulta ser la unidad armoniosa de las formas, así ella trae la comensurabilidad alícuota de todas y así es como el conjunto de las esférides, inertes, materiales, iguales, impenetrables, inalterables y esféricas, unidas á la fuerza libre, espiritual, contínua y activa residente entre ellas, constituyen al espacio y al tiempo, como medidas absolutas de extension y duracion en el elemento primitivo. Armónio ó sea la Naturaleza metamórfica, dotada de inteligencia, de libre albedrío y de Providencialidad, para realizar los altos fines de la creacion bajo las leyes divinas del Creador.

APLICACION PRÁCTICA

Antes de ahora, aún sin saberse la importancia metamórfica de la esfera como unidad morfológica; sin conocerse que las esférides á átomos primitivos forman con sus agrupamientos los poliedros compuestos ó átomos, químicos, y aún sin sospecharse la necesidad universal de conocerse bien las armonías esféricas para el claro conocimiento del metamorfismo de la Naturaleza, ya se comprendía la utilidad de resolverse los diferentes problemas relacionados con el genérico de la cuadratura del círculo.

La más apremiante de las necesidades para obtenerse la resolucion de tan interesante problema, era la de deducir con exactitud las paralajes astronómicas. Fundándose el método de obtenerlas en la construccion de triángulos rectángulos, cuyas bases formaran puntos de observacion y cuyo vértice lo fuese el planeta ó estrella observados, era indispensable el valuar el ángulo obtenido por medio de la comparacion de la distancia de su vértice y la amplitud de su base, segun las relaciones exactas entre el diámetro y la circunferencia del círculo.

Bien conocidos son los trabajos laboriosos y sutiles que en todos tiempos se han empleado para deducir con fruto, de las diversas proporciones halladas, las paralajes astronómicas. Muchos han hecho aplicaciones de las proporciones propuestas por Arquímedes como una simple aproximacion; es decir: de 7 al diámetro y 22 á la circunferencia. Proporciones que creo haber yo demostrado que no son aproximativas sino en realidad las verdaderamente exactas.

Para establecer yo un método adecuado, una vez conocido con exactitud el que el radio es igual á siete cuando la circunferencia es igual á cuarenta y cuatro, propongo el método siguiente paraláctico.

La primera necesidad es la de hacer que los instrumentos vengan á ser alícuotas, quitándoles la division de 360°, la cual es puramente arbitraria y convencional, y se la sustituya con cualquiera de los múltiples de la circunferencia natural ó tipo, para que en las triangulaciones se deduzcan con facilidad y precision las demas líneas morfológicas.

Por lo tanto, la division que creo más propia en los instrumentos de precision es la de 352° á la circunferencia, ó sea 44×8, como múltiple del círculo tipo, únicamente menor ocho grados de la actual division sexagesimal acostumbrada.

Con dicha division se tienen: $7 \times 8 = 56$ para el radio $C\,o'$ figura 49. $14 \times 8 = 112$, para el diámetro $o\,o''$. $11 \times 8 = 88$ para el cuadrante $x'\,o'\,x''$ del círculo $o'\,o''\,o'''\,o$, las mismas. $11 \times 8 = 88$ para el lado $b'\,j'\,b''$ del armopolígono de cuatro lados. $4 \times 8 = 32$ para la apotema $C\,j'$. $3 \times 8 = 24$ para la ságita interior $j'\,o'$. Y $1\frac{1}{2} \times 8 = 12$ para la ságita exterior $x'\,b'$ la cual sumada al radio $C\,x' = 56 + 12 = 68$ igual al armosector $C\,b'$.

Así es que con la division de 352° al círculo, todas sus líneas resultan alícuotas y sin fracciones, para las triangulaciones comunes en grados.

De este modo: haciendo cada grado divisible en 64′. Cada minuto en 64″. Y cada segundo en 64‴, hay las divisiones más pequeñas que puedan con éxito emplearse en las paralajes estelares más diminutas.

Ahora para la aplicacion práctica de la adjunta tabla paraláctica, como el ángulo menor lo he reducido á once terceros, he tenido que aplicar para su uso la ley morfológica de que: *Cada vez que se duplica el radio, si se conservan iguales las armotangentes, se duplican las circunferencias así como los lados de sus armopolígonos, á la vez que las ságitas disminuyen, en razon inversa, á la mitad de su longitud, las apotemas crecen con tendencia á igualarse con el radio y los armosectores decrecen con la misma tendencia á hacerse iguales al radio.*

Así es como en la tabla adjunta los cálculos están adecuados para instrumentos morfológicos, de los cuales tengo construidos tres con el nombre de Cosmómetros, uno catóptrico y dos dióptricos.

Las divisiones circulares de estos instrumentos son de 352° para hacerlas alícuotas con el radio, las cuales se leen directamente, y despues por medio de ruedas de engrane se le leen con manecillas de relojería, las que se mueven en tres círculos pequeños, dividido cada uno en 64 divisiones, que por su órden corresponden á los minutos, segundos y terceros.

De este modo los radios resultan divididos en 56 módulos, cada módulo en 64′, cada minuto en 64″ y cada segundo en 64‴.

Porque $\div 44 : 7 :: 352 : 56$. Y multiplicadas las circunferencias por minutos segundos y terceros, así como los radios en módulos, minutos, segundos y terceros, resulta la proporcion siguiente: $\div 44 : 7 :: 92.274{,}688 : 14.680{,}064$.

De este modo tomándose la cuarta parte de la circunferencia resultante, la cual es 23.068,672 igual á la armotangente ó sea el lado del armopolígono cuadrado $b'\,b''$ figura 49, resultan para el radio $C\,o'$ 14.680,064. Para cada uno de los armosectores como $C\,b'$ el radio 14.680,064 + la ságita esterior = 1.572,864 igual á 16.252,928. Para la apotema $C\,j'$ 11,534,336 igual al radio $C\,o'$ ménos la ságita interior $j'\,o' = 3.145{,}728$.

Preparado con estos datos procedo á hacer en la tabla adjunta las 22 bidivisiones del ángulo, duplicando el mismo número de veces el radio, conservando igual la armotangente $b'\,b''$ disminuyendo en razon inversa la ságita interior $j'''\,o'''$ hasta que terminan sus números enteros, cuando ya han aparecido fracciones, y aumentando las apotemas $C\,j'$ con la diminucion de las ságitas, con la tendencia aquellas hacía obtener las dimensiones de los radios.

Para dar aquí un ejemplo del modo de apreciar un ángulo paraláctico que no se halle en la tabla, supóngase que la paralaje observada produce un ángulo de 99′ se vé que los números más cercanos á éste, son en la tabla columna 1.ª 176′ y su mitad: 88′, marcados por la operacion 6 y 7 de la columna 7.ª Entónces ejecuto la proporcion siguiente:

$\div$ 88: 469.663,744 = Apotema : : 99 : 529.508,075 = Apotema buscada.

El motivo de tomar por punto de comparacion el ángulo 88′ con la apotema de 176′ es el que se trata de encontrar una consecuencia proporcional, emanada de 99′ cuyo ángulo se halla entre los dos anteriores.

EXPOSICION TEÓRICA.

Habiendo ya expuesto ante el lector las armonías morfológicas susceptibles de una rigorosa demostracion, me quedan por exponer otras que por su belleza no debo de dejar desapercibidas, aunque no sean demostrables con el mismo grado de evidencia.

La primera de estas armonías consiste: figura 48 en la proporcionalidad de la elipse $g\ a'''\ g''\ a'$ como término medio entre los dos círculos: $g\ g'\ g''\ g'''$ y $a\ a'\ a''\ a'''$ siendo cotangente interna con el primero y externa con el segundo.

Desde luego se percibe que la periferia de esta elipse es menor que la circunferencia del círculo g, y mayor que la del círculo a, pero siendo un medio proporcional entre ambos, así como el círculo normal $a\ a'\ a''\ a'''$ tiene su circunferencia igual al perímetro del armopolígono $d\ d'\ d''\ d'''$ y su árca semejante á la del cuadrado $n\ n'\ n''\ n'''$, así tambien la elipse $g\ a'''\ g''\ a'$, tiene su periferia semejante al perímetro del cuadrado $n\ n'\ n''\ n'''$ y su árca á la del cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$. Lo cual se percibe gráficamente, y completa la proporcionalidad de la figura aún cuando los detalles no puedan demostrarse numéricamente.

La segunda armonía que me he propuesto indicar, y que igualmente carece de demostracion directa, es en la fig. 49.

Si se hace centro con el compas en b con la punta móvil se traza la curva $d'''\ u^{V}\ a''\ u^{VI}\ d''$, la cual gráficamente se identifica con la curva elíptica y facilita notablemente la construccion de la figura; porque haciéndose sucesivamente centros $b, f, b', f', b'', f'', b'''$ y f''', se tienen las curvas semejantemente opuestas y marcadas con sus intersecciones $u\ u'\ u''\ u'''\ u^{IV}\ u^{V}\ u^{VI}$ y u^{VII} y consecuentemente los ocho lados del armopolígono octágono; mas, como el procedimiento puede generalizarse, haciéndose centros en $u\ u'$ &c., se tendrá el armopolígono de 16 lados y así sucesivamente los de cualquier número de lados bimúltiples requeridos, porque así como haciéndose centro en f''' se tiene con el compas la curva $u'''\ r''\ u^{IV}$, haciéndose centro en d se tiene con la otra punta del compas la curva $B\ A'\ B'$, quedando expuestas las dos armonías morfológicas, aunque no sean demostrables numérica y rigorosamente.

CONCLUSION

Puesto que el polígono circunscrito es mayor y el inscrito menor que la circunferencia del círculo, resulta con evidencia el

AXIOMA 1.° MORFOLÓGICO.

Hay un armopolígono cuyo perímetro es igual á la circunferencia del círculo, á la cual inscribe y circunscribe á la vez.

COROLARIO.

Este armopolígono tiene su perímetro igual á cuarenta y cuatro igual á la circunferencia cuando el radio es igual á siete.

Así es como estas dimensiones resultan lo mismo que todas las líneas que de ellas emanan, alícuotas y proporcionales, morfológica y geométricamente.

Y así conservan su estricta proporcionalidad, bien se sumen, se resten, se dividan ó multipliquen, se le eleve á potencias ó se les extraigan raíces.

AXIOMA MORFOLÓGICO 2.°

La esfera es la más simple de todas las formas.

COROLARIO.

La simplicidad de la forma esférica es de tal manera evidente que aun los poliedros regulares más sencillos tienen con respecto de ella la complicacion de facetas y aristas.

AXIOMA MORFOLÓGICO 3.°

La esfera es la unidad universal de las formas.

COROLARIO.

Siendo la esfera la forma más simple, á ella deben referirse las formas todas como más complicadas.

AXIOMA MORFOLÓGICO 4.°

La esfera es la forma componente de todas las formas.

COROLARIO.

Siendo la forma esférica la más simple, la menor posible y la unidad de todas las formas, éstas como complicadas son compuestas, y es evidente que el elemento componente debe ser y es el más simple y el menor posible.

AXIOMA 5.°

La esfera es el elemento universal del metamorfismo de la Naturaleza.

COROLARIO.

La Naturaleza constituida por el Criador en un ser metamórfico de fenómeno en fenómeno, para construir todos los del Universo, pasados, presentes y futuros, tiene por elemento material á la forma esférica, la más simple, la más pequeña y la unidad morfológica y metamórfica universal de todas las formas.

He dado la ojeada rápida que precede, para manifestar cuanta es la armonía que trae la forma esférica, emanando de ella los dos armosferios y sus círculos máximos, dando su armonía á todas las formas, armopolígonos y poliedros simples, y por consecuencia que esas armonías no solo influyen en la construccion de estos cuerpos, sino tambien en la de todos los que de ellos se derivan, y como en estos últimos se comprende los semiregulares, los irregulares y los compuestos, se echa de ver la universalidad con que están previstas las formas todas en las esferas armónicas por el Supremo Morfólogo que las dispuso en la Naturaleza para el metamorfismo de ésta.

En efecto: la unidad esférica de las formas no solo se percibe en los cristales y elementos estáticos en la materia inorgánica, sino tambien en la organizada, siendo en ésta más patentes, más bizarros y con mayores tendencias hácia la redondez de las formas, las armonías maravillosas que la Naturaleza exhive.

¿Quién no se siente agradablemente sorprendido al aspecto armonioso de las flores y follage de las plantas? ¿Quién no admira esos pétalos vistosos y deliciosamente coloridos, en que ya sencillamente ó ya multiplicadas se hallan las armonías equiláteras, cuadrangulares, pentagonales, exagonales y con frecuencia alternantes? ¿Quién no se extasía, al menos alguna vez, ante esos colores tan armoniosos en sus tintas y matices en que se perciben tan gallardamente aplicadas las leyes morfológicas? ¿Quién no desea penetrar en los misterios de la vida al ver encerrados sus gérmenes latentes, ya en las semillas, ya en los huevecillos y ya en las féculas de las plantas tuberosas?

En verdad la Naturaleza nos invita constantemente á investigar en la sencillez de las leyes que obedece, y la prodigiosa variedad de sus metamórfosis. Este mundo diminuto entre millones de mundos colosales, tiene sin embargo detalles tan interesantes para el hombre pensador, amante de la verdad y de su prodigiosa belleza, que analiza como en una ecuacion de maravillas las analogías sublimes de los mundos, y trata de llevar la induccion de la síntesis y el análisis no solo á los prodigios que toca en este pequeño y efímero planeta, sino tambien á la sacra Síntesis de la perfeccion final, en el descanzo y apoteósis de la Naturaleza.

¡Mas ah! ¡Cuando el vuelo de la induccion nos hace atravesar las regiones sidéreas y expaciar nuestro espíritu por el inmenso campo de las multiplicadísimas metamórfosis de los elementos creativos, viene el rigor lógico y analítico á fijar una senda modesta á la síntesis y á obligar á ésta á marchar humilde por la sencilla vía de los principios, ántes de elevarse á la prodigiosa variedad de los medios y á la sublimidad de los fines.

Así pues, obedeciendo á la severidad del método me será preciso estudiar á la Naturaleza metamórfica, como me propongo hacerlo en la tercera parte de esta obra.

Tabla sinóptica *de Paralajes llevadas á terceros de amplitud, teniendo por base la division de la circunferencia de 352 grados, cada grado de 64′ minutos, cada minuto en 64″ segundos y cada segundo en 64 terceros. A la vez que el radio se divide en 56 módulos, cada módulo en 64′ minutos, cada minuto en 64″ segundos y cada segundo en 64‴ terceros.*

FIGURA 49. LÁMINA PRIMERA.

1ª Angulos constantemente bidivididos, conservándose igual la armotangente b′ b″ y aumentando en cada término la apotema, conforme disminuye la ságita interior.	2ª Longitud de los radios en módulos, minutos, segundos y terceros, duplicándose en cada término en razon inversa á la bidivision de los ángulos.	3ª Ságitas interiores disminuyendo en razon inversa de la duplicacion de los radios.	4ª Apotemas crecientes segun la disminucion de las ságitas con tendencia á obtener las dimenciones de los radios.	5ª Longitud de la armotangente normal en grados, minutos, segundos y terceros.	6ª Número de lados de los armopolígonos iguales en todos sus términos á las circunferencias.
88° =	14680064‴—	3145728‴ =	11534336‴	23068672‴	4
44° =	29360128—	1572864 =	27787264	id.	8
22° =	58720256—	786432 =	57933824	id.	16
11° =	117440512—	393216 =	117046296	id.	32
352′ =	234881024—	196608 =	234684416	id.	64
176′ =	469762048—	98304 =	469663744	id.	128
88′ =	939524096—	49152 =	939474944	id.	256
44′ =	1879048192—	24576 =	1879023616	id.	512
22′ =	3758096384—	12288 =	3758084096	id.	1024
11′ =	7516192768—	6144 =	7516186624	id.	2048
352″ =	15032385536—	3072 =	15032382464	id.	4096
176″ =	30064771072—	1536 =	30064769536	id.	8192
88″ =	60129542144—	768 =	60129541376	id.	16384
44″ =	120259084288—	384 =	120259083904	id.	32768
22″ =	240518168576—	192 =	240518168384	id.	65536
11″ =	481036337152—	96 =	481036337056	id.	131072
352‴ =	962072674304—	48 =	962072674256	id.	262144
176‴ =	1924145348608—	24 =	1924145348584	id.	524288
88‴ =	3848290697216—	12 =	3848290697204	id.	1048576
44‴ =	7696587394432—	6 =	7696581394426	id.	2097152
22‴ =	15393162788864—	3 =	15395162788861	id.	4194304
11‴ =	30786325577728—	1½ =	30796325577726½	id.	8388608

Nota.—En las divisiones designadas en la presente sinopsis, he procurado establecer en el punto de partida números suficientemente altos para que no ocurran fracciones sino hasta la 22ª duplicacion del radio *C o′* figª 49 lámina, 1ª, manteniéndose siempre alícuotas y sin fracciones los radios y los armopolígonos de la serie.

Segun las leyes morfológicas demostradas ántes, he presentado aquí de manifiesto que: conservando igual á la base *o o″* el lado del armopolígono de cuatro lados = *b′ b″* = 23,068,672‴ y duplicándose en cada uno de los términos de la sinopsis el radio *C o′* = 14,680,064‴ menos la ságita interior *j′ o′* = 3,148,728 se tiene la apotema *C j′* = 11,534,336 y por consecuencia el triángulo isoseles *j j′ j″* en el primer término. El ángulo *j D j″* en el segundo y *j D′ j″* en el tercer término, únicos que han podido dibujarse en la adjunta figura, duplicándose el radio, de modo que C A′ es cuatro veces mayor que C o′. Del mismo modo se han duplicado los lados de los armopolígonos, de manera que conservándose la longitud de la base *j j″* en los lados de los armopolígonos, estos son de cuatro lados en *b b′* de ocho en *u″ u‴* y de diez y seis lados en *B B′*. Al mismo tiempo las ságitas interiores se han disminuido en razon inversa, porque si en *j o* es como cuatro, en *D* es como dos y en *D′ A′* es ya solo como uno.

En cuanto á la division de la circunferencia, como ella es igual en todos los términos á sus respectivos armopolígonos, y como en el primer término el lado *b′ b″* del cuadrado, es igual á la cuarta parte de la circunferencia y ésta está dividida en 352° tocan al lado $b' b''$ 88° que se marcan en el primer término de la columna 1ª

Ahora se ve que en cada término se bidividen los ángulos hasta 11°. Mas como la mitad del 11 deberían ser $5\frac{1}{2}$, se multiplica este número por 64'. Igual operacion se hace con los minutos y segundos, hasta que el último término de la serie son 11''' para cada lado del armopolígono de 8,388,608, lados.

Así es que: multiplicándose esta cantidad por el lado del armopolígono constante en la serie marcada en la columna 5ª se tiene la circunferencia cuyo radio designado en la columna 2ª es $=$30,786,325577728, cuya longitud, ménos la ságita interior$=1\frac{1}{2}$ es igual á la apotema final en terceros$=$30,786,325,577,726$\frac{1}{2}$ que es la distancia á la cual se lleva la base del ángulo con 11''' (once terceros).

Por lo tanto: en las paralajes de las estrellas, como la base de las triangulaciones es el diámetro de la órbita terrestre; suponiendo esta$=$72,000,000 de leguas se tiene:

$\div$23,068,672 : 30,786,325,577,726$\frac{1}{2}$ :: 72,000,000 : 96,087,256,669,409 leguas.

Para hacer uso del sistema morfológico de paralajes, se debe tomar en el instrumento la línea visual recta, por ejemplo $C\,D'$ figª 49, lam. 1ª Despues se fijarán en ángulos rectos las estaciones $j\,j''$ á iguales distancias del centro C. En seguida se tomarán las líneas $j\,D'$ y $j''\,D$. Es claro que con este procedimiento se tendrá un triángulo isoseles $j\,D'\,j''$ dividido en dos rectángulos iguales $j\,C\,D'$ y $j''\,C\,D$ que mutuamente se comprobarán, dando al triángulo isoseles la amplitud de la base y la verdadera longitud de la apotema $C\,D'$.

En los casos de paralajes estelares, se deberá tomar la línea central v. g. $C\,D'$ al paso de la estrella por el meridiano y las diagonales $j\,D'$ y $j''\,D'$ en las épocas del año correspondientes para tener el diámetro de la órbita terrestre: por ejemplo $j\,C\,j''$ como base del triángulo $j\,D'\,j''$ perpendicular á la línea zenital de la estrella $C\,D'$ obteniéndose así su paralaje.

Apéndice á las Nociones Morfológicas.

Habiendo determinado y en mi concepto, demostrado á la evidencia, las proporciones alícuotas entre el diámetro y la circunferencia del círculo morfológicamente, creo ser conveniente informar aquí al lector acerca de uno de los principales métodos que hasta hoy se habían establecido por los geómetras para conseguir el mismo fin.

Para simplicar este propósito, creo que lo más óbio es copiar los párrafos correspondientes del autor que me propongo citár.

El primero, que trató de dar un carácter científico á la investigacion de las relaciones mencionadas fué Arquímedes. Su método fué primero partir de un principio seguro, y así propuso el que siendo el exágono inscrito en el círculo igual á seis cuerdas iguales al radio, cada lado del exágono produce con el centro un triángulo equilátero, al cual se puede tirar una perpendicular desde el centro al medio de la cuerda dividiendo el equilátero en dos triángulos rectángulos, cada uno de los cuales tiene por cateto la mitad del radio, por hipotenusa el radio y por apotema la raíz cuadrada de la diferencia entre los cuadrados del cateto y de la hipotenusa. Repetidamente he demostrado que esta regla de los rectángulos, no siendo el que se trata uno de los triángulos rectángulos alícuotas, y no estando los lados del rectángulo arriba descrito en semejante caso, no podían el cateto, su hipotenusa y apotema ser alícuotas, y por consecuencia, siendo sus cuadrados solamente aproximaciones no podían sus raíces ser sino números aproximados con fracciones contínuas que agravaban la dificultad al tenerse que desechar parte de ellas.

El segundo punto de vista de Arquímedes fué, como demostró, que en el exágono circunscrito, el mismo radio, en el inscrito sirve de hipotenusa y en el circunscrito de apotema.

Con estos preliminares, como consta en Saunderson's Algebra, London 1756, estableció Arquímedes el siguiente

"TEOREMA"

"Si al diámetro del círculo se le llama 1 la circunferencia es algo ménos que $3\frac{10}{70}$ es decir de 22 á 7.

DEMOSTRACION. FIG. 41, LÁMINA 1.ª

"Sea *A B C* un ángulo en el cual se inscriben las líneas *A C, A D, A E,* "*A F, A G*, en la manera siguiente: hágase el ángulo *B A C* la tercera parte "de un rectángulo; *B A D* la sesta parte; *B A E* la doce-ava parte: *B A F* la "veinte y cuatro-ava parte; *B A G* la cuarenta y ocho-ava parte, entónces A "B es el doble de B C y A B es á *B G*, como el diámetro del círculo es al "lado de un polígono regular de 96 lados circunscritos en torno del círculo. "Ademas, como la línea A D bisecta el ángulo B A C, tendremos que A B "es á A C, como B D es á B C. A B+A C es á A B, como B C es á B D: "y por permutacion, A B+A C es á B C, como A B es á B D; por lo tanto: "si B C se divide en cualquier número de partes iguales cuantas ellas sean, "serán contenidas en la suma de las líneas A B y A C, y de igual manera, "cualquier número de iguales partes contenidas en B D se hallarán conteni- "das en A B sola. De este modo: si B C se divide en 10,000 partes iguales, "la suma A B+A C contiene 37,320 de esas mismas partes. Si la línea B D "se divide en 10,000 partes iguales, la línea A B sostendrá sola 37,320. Des- "pues de la misma manera puede demostrarse que cualquiera número de par- "tes de B D, se hallarán contenidas en la suma de las líneas de A B, A D, "igualmente el número de partes de B E, estarán contenidas en A B, de "donde proviene el procedimiento que sigue:"

"1º Divídase B C en 10,000 partes iguales, ó lo que es lo mismo: llamemos "10,000 á B C, entónces A C será 20,000, y por consecuencia A B será ma- "yor que 17,320, y A B+A C será mayor que 37,320.

"2.º Por tanto, si B D es igual á 10,000, A B será mayor que 37,320, A "D mayor que 38,636 y A B+A D mayor que 75,956.

"3.º Por tanto: si B E=10,000 A B será mayor que 75,956, A E mayor "que 76,611 y A B+A E mayor que 152,567.

"4.º Por tanto: si B F=10,000, A B será mayor que 152,567, y A B+A "F mayor que 305,461.

"5.º Por tanto: si B G=10,000, A B será mayor que 305,461 y por lo "mismo viceversa: si A B es igual á 305,461, A G será algo ménos que 10,000, "pues habiéndose manifestado ántes que A B es á B G como el diámetro de "cualquier círculo al polígono regular de 96 lados circunscrito al mismo círcu- "lo. Por tanto: si el diámetro del círculo es 305,461, el lado del tal polígono "será ménos de 10,000, y su total perímetro menor que 960,000; por tanto "el perímetro de ese polígono será menos que el producto del diámetro mul- "tiplicado por $3\frac{10}{70}$ ó $\frac{22}{7}$; porque $305{,}461 \times \frac{22}{7} = 960{,}020\frac{2}{7}$: Por tanto; el polígono "circunscrito de 96 lados, sería ménos que $3\frac{10}{70}$; pero como la circunferencia de "todo círculo es menor que el perímetro de cualquier polígono á el circunscri- "to, es por lo tanto la circunferencia menor que $3\frac{10}{70}$ ó sea menor que $\frac{22}{7}$ Q, E. D.

He copiado el método de Arquímedes para demostrar el error en que incurrió aquel geómetra, por el cual fracasó al buscar las proporciones alícuotas entre el diámetro y la circunferencia del círculo.

Arquímedes fué el primero en procurar resolver el problema por medio de polígonos inscritos y circunscritos, y ya he demnotrado, que por este medio no se puede aspirar sino á una aproximacion y que al apelar á él se renuncia de antemano á obtenerse resultados exactos.

Para demostrar el error geométrico de Arquímedes, permítaseme la construccion de la figura 52, lámina 1ª, aunque la pequeñez de la escala con que está dibujada hace que deje mucho que desear como dibujo morfológico.

En torno del centro C, hay los dos círculos *O* y *g* y los armopolígonos cuadrados *A h h' A'* exterior y *a a'* interior. Mas como tenga ya demostrado, el cuadrado *A h h' A'* es circunscrito al círculo *o* y armopolígono del círculo g. Por consecuencia: no ha podido Arquímedes suponer que al bidividir los ángulos conservando el valor de 10,000 al cateto conservaba á éste el carácter de lado circunscrito en lo cual se equivocó como voy á demostrar.

Arquímedes ni ninguno de los geómetras que le han sucedido han sospechado la existencia morfológica en el círculo de su armopolígono igual á su circunferencia, consiguientemente, supuso que al bidividir el ángulo podia conservar el valor de cateto circunscrito duplicando el número de los lados de este polígono, lo cual ya he demostrado es erróneo.

Para duplicar la circunferencia de un círculo, es necesario duplicar su radio, por lo que en el dibujo que se examina, como hay el círculo normal *o* y el proporcional *g* he duplicado ambos. Así que de duplo en duplo para el primero hay: *o, o', o'', o'''*. Para el segundo hay *g l l' l'' l'''*. Por consecuencia el triángulo isóseles *A C A'* es de la misma amplitud de *a C a'*. Duplicando el radio *C g* hácia *C l* se tiene la armosecante *B B'* y la apotema es: *C o+C B*. Porque C A=*A B=O D*. Pero el lado *B B'* ya no es tangente del círculo *o'* duplo del círculo *o*, sino armotangente del arco *n n'* de círculo *l*, duplo del círculo *g*. Por lo que no debió Arquímedes, desde la segunda operacion, llamar cateto ó lado circunscrito á la línea *B D*.

Una vez descubierta la existencia de los armopolígonos la figura 52 prueba la exactitud morfológica; porque el ángulo *A C* A' es igual al ángulo *a C a'*: El ángulo *B C' B'* es igual al ángulo *b C b'* y del mismo modo *D C D'=d C d'*: y *E C E'=e C e'* y *F C F'=f C f'*. Por tanto: la existencia de los dos armopolígonos queda comprobada, siendo 1º Para el círculo *o'* la armotangente *a a'*=11. Y para el círculo *g* la armotangente *A A'*=14. Ambos armopolígonos de cuatro lados. Para el arco *o'* la armotangente *b b'*=11 y para el arco *l* la armotangente B B'=14, siendo los armopolígonos de ocho lados. Para el arco *o''* la armotangente *d d'*=11 y para el arco *l'* la armotangente *D D'*=14, siendo los armopolígonos de diez y seis lados. Para el arco *o'''* la armotangente *e e'*=11 y para el arco *l''* la armotangente *E E'*=14 siendo los armopolígonos de treinta y dos lados. En fin: para el arco *o''''* la armotangente *f f'*=11 y para el arco *l'''* la armotangente *F F'*=14 siendo los armopolígonos de 64 lados.

Ya se vé á la evidencia que aunque la apotema *C D* es igual á la apotema *C* ó más el armosector *C A*. Que la apotema *C* D' es igual á la apotema *C D* más el armosector *C B*. Que la apotema *C E''* es igual á la apotema *C* D' más el armosector *C* D''. Y en fin: que la apotema *C k* es igual á la apotema *C E''* más el armosector *C E*, no pudo Arquímedes llamar á la armotangente *F F'* lado circunscrito derivado del círculo *C o*, descubriéndose ahora que es lado del armopolígono derivado del círculo *C g*. Quedando demostrado su error geométrico y morfológico, por lo que paso á demostrar su error numérico.

Arquímedes dedujo del cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del cateto, el cuadrado de la apotema y extrayendo de éste la raíz cuadrada, produjo la longitud de la apotema. En seguida añadiendo á ésta la longitud de la hipotenusa dedujo la longitud de la nueva apotema la que elevada á su cuadrado, como tambien el cateto constante, produjo con la suma de ambos la nueva hipotenusa, y así continuó la serie de sus cinco procedimientos, cuya parte errónea tengo demostrada.

Pero como en la aplicacion de la ley de los rectángulos tengo tambien ya demostrado que cuando no son los tres lados de un triángulo rectángulo alícuotas, solo dan una aproximacion y no exactitud, voy ahora á demostrar esta proposicion y ademas que: *Al extraer las raíces de los cuadrados, los números producidos en una serie de triangulaciones, se acomodan á las circunstancias especiales, sin que los productos guarden entre sí una exacta proporcionalidad.*

Para hacer palpable la comparacion, tomo por ejemplo la misma figura 52 lámina 1ª

A o C es un triángulo rectángulo en *o* siendo la apotema *C o* igual al cateto *o A*, elevando á su cuadrado ambas líneas y estrayendo de la suma la raíz cuadrada, segun la ley de los rectángulos, se tendrá la longitud de la hipotenusa ó sea el armosector *C A*. Otro tanto debe resultar de los triángulos *C D B*, *C D' D''*, *C E''' E* y *C k F*.

Para hacer visibles la irregularidad de los resultados, recuerdo al lector que las ságitas exteriores disminuyen en razon inversa de la duplicacion de los radios y la duplicacion de los lados de los armopolígonos y que los armosectores son iguales al radio más la ságita exterior.

Consecuentemente haciendo á la armotangente $A\ A' = 352$, el cateto $A\ o = 176$ y la apotema $C\ o = 176$.

De aquí resulta la serie de ságitas interiores morfológicas siguiente: $o\ g = 48$. $D\ l = 24$. $D'\ l' = 12$. $E'''\ l'' = 6$ y $k\ l''' = \frac{3}{2}$. Resultando la progresion siguiente $\div\ 24 : 12 :: 12 : 6 :: 6 : 3 :: 3 : \frac{3}{2}$ para las ságitas exteriores.

Ahora, tomando los mismos números, se deduce por la ley de los rectángulos la triangulacion del siguiente:

Cuadro *de hipotenusas deducidas de un cateto constante y de apotemas crecientes*

Apotemas	Sus cuadrados	Catetos constante	Sus cuadrados.	Cuadrados de las hipotenusas.	Armosectores ó hipotenusas.	Radios de los círculos	Ságitas geométricas exteriores.	Ságitas morfológicas	Diferencia
$176^2 =$	30976 +	$176^2 =$	30976 =	$\sqrt{61962} =$	248'915—	224 =	24'915—	24 =	+915
$424^2 =$	179776 +	$176^2 =$	30976 =	$\sqrt{210752} =$	459'567—	448 =	11'567—	12 =	—433
$884^2 =$	781426 +	$176^2 =$	30976 =	$\sqrt{812432} =$	901'350—	896 =	5'350—	6 =	—650
$1786^2 =$	3189796 +	$176^2 =$	30976 =	$\sqrt{3220772} =$	1794'288—	1792 =	2'288—	3 =	—712
$3581^2 =$	12823561 +	$176^2 =$	30976 =	$\sqrt{12854537} =$	3585'322—	3584 =	1'322—	$\frac{3}{2}$ =	—178

Por el anterior cuadro se percibe que deduciendo las hipotenusas ó armosectores obtenidos por la ley de los rectángulos se tienen ságitas semejantes á las verdaderas, pero careciendo de su exactitud son solo aproximaciones unas veces en más y otros en ménos afectando los resultados con una irregularidad que contraste con la precision y proporcionalidad morfológicas.

He analizado el procedimiento de Arquímedes y demostrado sus errores. En cuanto á los demas métodos que se han empleado y aún se emplean por los geómetras para obtener la razon entre el diámetro y la circunferencia del círculo, como todos ellos incurren en las mismas causas erróneas, no es estraño el que se hayan equivocado, y que de una figura tan bella, proporcional y armoniosa como lo es el círculo, hayan hecho un conjunto incongruente de líneas irracionales é inconmensurables entre ellas mismas.

La proporcionalidad entre las líneas, planos y sólidos que yo he descubierto, tomando por unidad de la forma á la esfera, contrasta con la incomensurabilidad y falta de armonía que se nota en las formas todas generadas por los métodos geométricos en la investigacion de las relaciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo.

Para demostrarse esta falta de proporcionalidad en los resultados geométricos, baste notarse que si al diámetro se titula 14 la circunferencia geométrica, es $= 3'1415926 \times 14 = 43'9822964$ cuya última cantidad se puede convertir en un armopolígono cuadrado, en vez de 44, que es el normal ó armopolígono del círculo tipo, pero entónces toda proporcionalidad entre las líneas, planos y sólidos relacionados con el círculo desaparecen dejando en su lugar la incomensurabilidad y confusion, y una aproximacion precaria con respecto á las verdaderas proporciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo.

Finalmente: para terminar el análisis del sistema de Arquímedes en busca de dichas proporciones, repito que siendo el perímetro del polígono circunscrito mayor que la circunferencia; cada vez que se bidividan los ángulos de ésta, quedan sus arcos divididos por mitad, pero los lados del polígono circunscrito resultan menores que la mitad de los anteriores, por la sencilla razon de que se van acercando á las dimenciones de la circunferencia, la cual es menor.

Por el contrario un polígono inscrito, como su perímetro es menor que la circunferencia, cada vez que se bidividen los ángulos de ésta, crece el perímetro de este polígono y al duplicar sus lados, resulta cada lado mayor que la mitad del lado anterior, porque de duplicacion en duplicacion de los lados su perímetro tiene la tendencia de igualarse á la circunferencia del círculo.

De este modo, volviendo á la figura 41, si Arquímedes quizo bidividir cinco veces la línea *C B* no pudo bidividir cinco veces el ángulo *C A B* conservando á las bidivisiones de la línea *C B*, las cualidades de lados circunscritos al círculo. Por consiguiente su conclusion y proporcion final es errónea. Porque si $C\ B = 10000$, *D B* será menor que 5000, *E B* menor que 2500, *F B* menor que 1250, y *G B* menor *625*. Consecuentemente: en el resultado que obtuvo en las cinco operaciones exajeró en más el perímetro de su polígono de 96 lados y por consecuencia la circunferencia por ellos obtenida no quedó proporcional con el diámetro.

El resultado de la exageracion en más del cateto fué, por su método, que en cada bidivision resultasen así mismo exageradas, en más y con irregularidad, las apotemas y las hipotenusas, trayendo al fin á la comparacion proporcional números inexactos, y por consecuencia sus resultados fueron así mismo inexactos y solo aproximativos, pero que han quitado por muchos siglos su belleza y verdadera proporcionalidad á las líneas alícuotas, rectas y curvas que emanan del círculo.

El resultado erróneo del método de Arquímedes, ha afectado á todos los métodos posteriores fundados en la hipótesis, sin duda falsa, de considerar al círculo como un polígono de un número indefinido de lados, todos valorizables por medio de la ley ó regla de los rectángulos; así es que las consecuencias de este método erróneo en principio y en su desarrollo, ha conducido en todas sus variantes á simples aproximaciones.

Todas estas incongruencias y errores desaparecen en el círculo tipo morfológico, en el cual el armosector es igual al radio más la ságita exterior y esta es la mitad de la ságita interior, á la vez que ésta es igual al radio ménos la apotema.

De aquí resultan las tres leyes morfológicas ya demostradas: 1ª Que las ságitas decrecen en razon inversa de las duplicaciones de los radios y en razon directa de las bidivisiones de los ángulos.

2ª Que las ságitas interiores son siempre morfológicamente el duplo de las exteriores en los triángulos resultantes de los armopolígonos regulares con relacion á los arcos que ellos miden y determinan alicuotamente como sus iguales.

Y 3ª Que en la duplicacion de los radios y bidivision de los ángulos, se duplican las circunferencias y los lados de sus armopolígonos, decreciendo los armosectores y creciendo las apotemas á expensas de las ságitas exteriores é interiores con tendencia á hacerse iguales á los radios.

Con la aplicacion de estas tres leyes morfológicas se logra la multiplicacion de las líneas alícuotas del círculo tipo sin fracciones, tomándose por base sus números múltiples suficientemente altos, y sin necesidad de la regla solo aproximativa de los rectángulos.

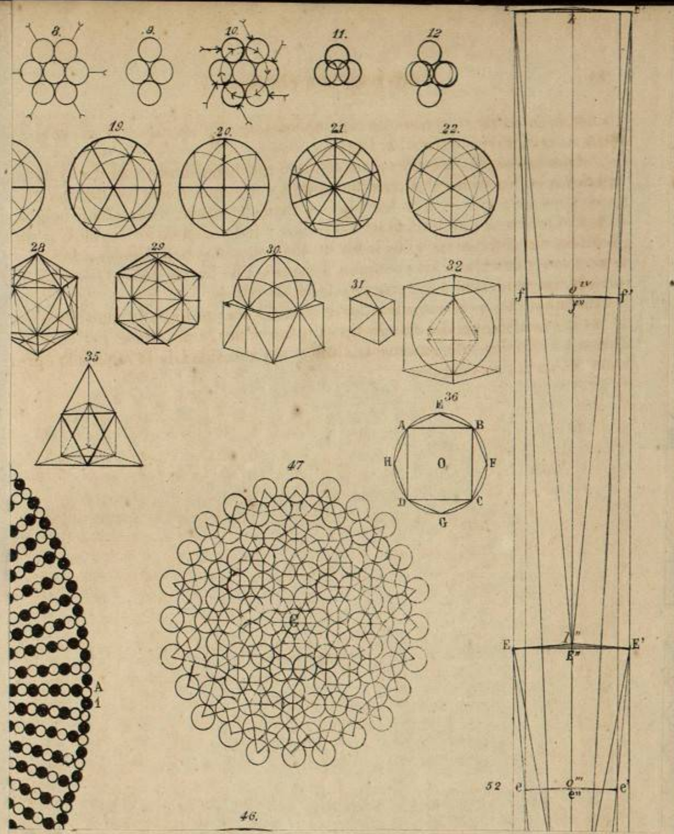
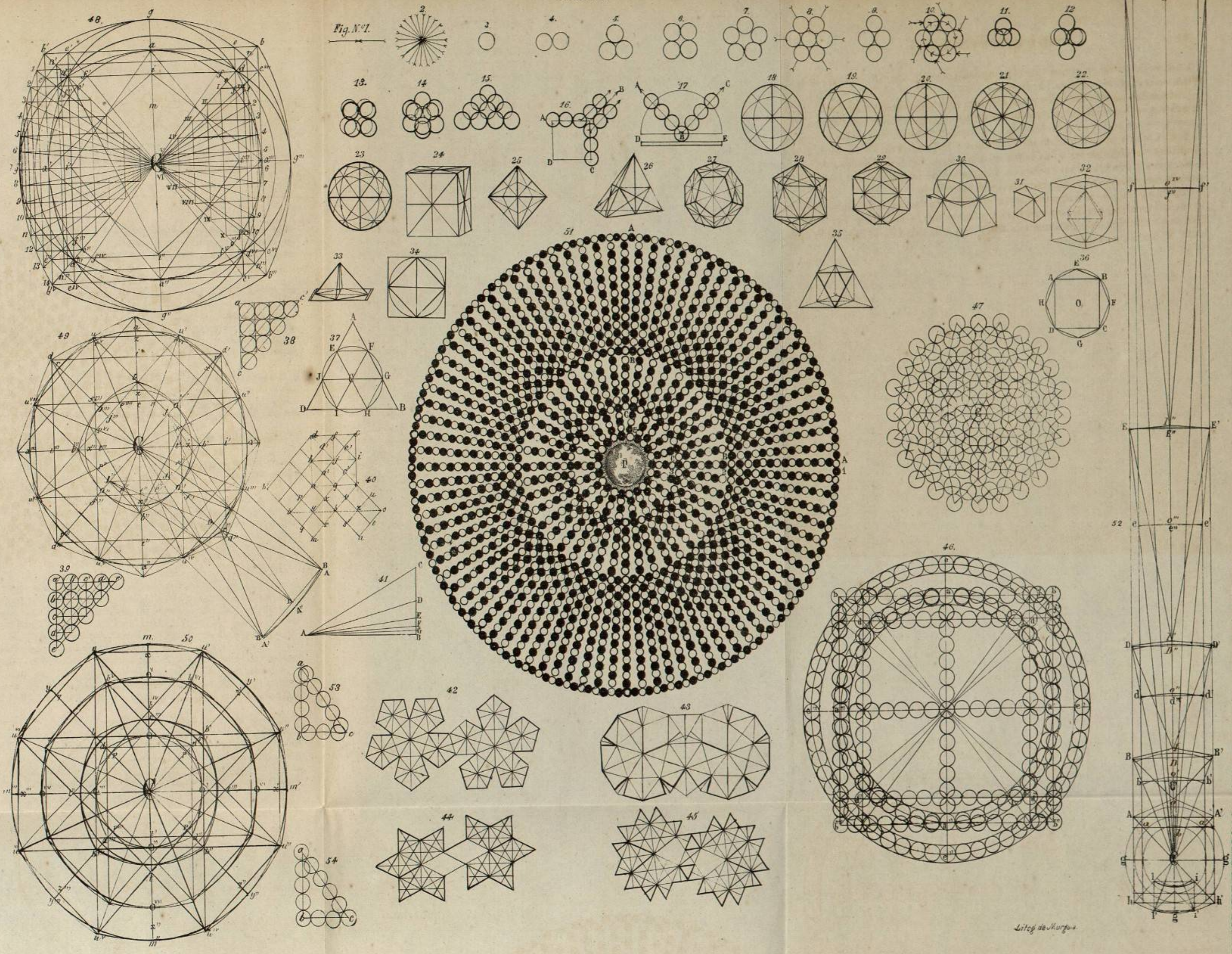


Lámina 1ª



RECAPITULACION.

Habiendo hecho el presente de un ejemplar de la Morfología fundamental que antecede, á un profesor de matemáticas, instruido y de buena fé, y habiéndome ofrecido éste darme su opinion acerca de mi obra, paso á exponer su dictámen y al lado de sus razones mis respuestas.

Dicho señor opúsome las objeciones siguientes:

1.ª Que es cierto el que los dos radios vectores de toda elipse, que partiendo de sus dos focos y reuniéndose con igualdad en el extremo del semi-eje menor, suman reunidos la misma longitud del eje mayor, pero que yo en la elipse $g\ a'\ g''\ a'''$ figura 48 lámina 1.ª propongo como proporcionales los tres lados del triángulo rectángulo i C a', suposicion cuya proporcionalidad no demuestro, y como el radio vector $a'\ i$ resulta por la ley numérica de los rectángulos algo menor, la elipse $g\ a'\ g''\ a'''$ resulta no llenar las condiciones requeridas en el texto.

Respuesta. Que estoy pronto á demostrar más cumplidamente la proporcionalidad y peculiaridades de esta elipse, y que en cuanto á la falta de exactitud numérica de la ley de los rectángulos, ya en las nociones morfológicas la tengo demostrada, pero que protesto amplificar dicha demostracion, prometiéndole, como ahora cumplo, satisfacer sus objeciones.

2.ª Que yo asiento el que el diámetro y la circunferencia del círculo son alícuotas, lo cual no es cierto, pues él veía claramente lo contrario.

Respuesta. Como yo por mi parte no sólo veo, sino en mi concepto demuestro esa alicuocidad, no creo que podamos descansar sobre las apreciaciones personales, sino sobre las demostraciones incontrastables en que las apoyemos.

3.ª Que es evidente el que la ley de los triángulos rectángulos por la cual, como yo tambien asiento, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadros de los dos catetos, inconcusa como lo es geométricamente, cuando se le aplica la numeracion, trae los resultados incongruentes de haber multitud de cuadrados, geométricamente perfectos, que no tienen raíz cuadrada exacta, pero que sí la tienen aproximativa en el número requerido de decimales.

Respuesta. Que no admito esa regularidad en la aproximacion de los resultados numéricos de la ley, pues teniendo la numeracion decimal que acomodarse á los resultados especiales del cálculo, ya tengo yo demostrado en el cuadro de hipotenusas deducidas de un cateto constante y de apotemas crecientes, página 60 de mis nociones morfológicas, que en la série de las cinco triangulaciones de dicha sinopsis, hay en la columna 8.ª resultados deficientes unas veces en más y otras en ménos, deducidos de la expresion numérica de la ley de los rectángulos, cuya irregularidad se palpa comparando esos resultados con los que se obtienen por mi sistema proporcional, en la misma série de triángulos, como demostré en las columnas 9.ª y 10.ª y como espero evidenciar aquí adelante.

4.ª Que es evidente que ademas de los polígonos inscrito y circunscrito en la circunferencia, debe haber, como yo asiento, otro polígono igual á ésta, pero que la dificultad está en determinarlo.

Respuesta. Que en efecto, la simple enunciacion de la existencia de un armopolígono demuestra no sólo su posibilidad sino su evidente existencia, pero esto mismo arguye en favor de las operaciones que yo ejecuto, puesto que ningun geómetra, que yo sepa, había ántes ni áun indicado la existencia de un armopolígono, y por el contrario, ninguna de las aproximaciones que se han establecido entre el diámetro y la circunferencia por los geómetras es divisible por cuatro, no pudiendo por lo tanto construirse el armopolígono fundamental de cuatro lados que es el único que armoniza como punto de partida en las divisiones alícuotas de la circunferencia con el radio.

5.ª Que en la abstraccion algebraica para nada influye la deficiencia numérica en la ley de los rectángulos, porque algebraicamente 2 tiene raíz cuadrada exacta como este signo la expone $\sqrt{2}$.

Respuesta. Es evidente que abstractamente puede un signo convencional representar y en efecto representa una cantidad complexa. Por ejémplo: hay un signo que con solo su exposicion indica las relaciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo. Y todavía más: con la simple palabra se enuncian estas relaciones en abstracto, así como enunciamos la raíz cuadrada de dos. Pero al tratar de representar estas cantidades numéricamente necesitamos irremediablemente aplicarles la numeracion, encontrándonos de un modo inevitable con los inconvenientes de esta.

Del mismo modo, con el cálculo diferencial, podemos establecer, y se han establecido, fórmulas que conducen las diferencias hácia cantidades indefinidamente grandes, ó indefinidamente pequeñas algebraicamente; pero luego que á esas fórmulas se aplica la numeracion vienen las cantidades fraccionales muchas veces misteriosas, como en las raíces cuadradas de 2, de 8, de 32, & cuyas inconmensurabilidades empañan los resultados concretos de las fórmulas mas precisas en abstracto.

Atendidos estos inconvenientes de la numeracion, no se extrañan los errores que se han cometido al quererse determinar numéricamente las relaciones entre el diámetro y la circunferencia del círculo, por lo cual yo no solo he tomado para resolver este problema el rumbo nuevo y filosófico de la morfológia, sino que al hacerle la valuacion numérica he desechado la aplicacion numeral de la ley de los rectángulos, y he adoptado las leyes de las razones y proporciones mucho mas precisas y constantes en sus resultados.

Todas estas consideraciones, y el deseo de satifacer más cumplidamente las objeciones arriba expuestas, me obligan á exhibir y explicar los dibujos de la lámina 1 y ½ en la cual no expongo nada que no haya expuesto ya en la morfológia, pero procuraré hacerlo con figuras mas simples y en mayor escala, bajo razonamientos mas claros.

Empero de antemano es necesario afirmar las nociones fundamentales de la morfológia. En esta ciencia hay las consideraciones filosóficas de la unidad y multiplicidad alícuota de las formas elementales como dispuestas por la Omniciencia Suprema, y como existentes y necesarias en la Naturaleza para la realizacion del metamorfismo de esta. Así es que el morfólogo busca la recíproca armonía y permutabilidad práctica de las formas. En fin, él necesita ser filósofo.

El geómetra puede ser filósofo, pero no es indispensable que lo sea. Él escudriña en las condiciones de la forma por los medios de las demostraciones convencionales que posee, y cuando estos medios son deficientes y lo conducen al error no descubre ni se afana por descubrir este y lo acepta como verdad.

De aquí nace la diferente manera de considerar al círculo y sus líneas naturales, entre el geómetra y el morfólogo. El primero acepta la figura tal cual la cree cierta, con sus proporciones irracionales y deficientes, con sus términos indefinidos y con sus consecuencias aproximativas y jamas exactas, como él mismo lo confiesa.

El morfólogo por el contrario, ve en todas las formas la exactitud, la armonía, la comensurabilidad y la permutabilidad; observa la necesidad de lo objetivo en lo subjetivo, y por lo tanto, penetra en los misterios de la forma, esencialmente en la fundamental esférica, por lo que descubre en su seccion máxima: el círculo, no una figura indiferente é irracional en las proporciones de sus líneas, sino la necesaria armonía y comensurabilidad de estas, indicantes de su construccion infaliblemente objetiva, dispuesta por el Supremo Morfólogo, cuyas concepciones son leyes que el hombre va lentamente descubriendo en las formas elementales.

Apoyado yo en esta fé, procuro buscar la armoniosa correlacion de las formas, y una vez hallada aguardo tranquilo el que los geómetras se conviertan en morfólogos, sin cuidarme mucho de la oposicion de sus juicios presentes, esperando que llegue la debida reforma de estos en la posteridad si no tengo la fortuna del presente.

Despues de una profesion de fé tan explícita, paso á analizar la figura 1.ª, lámina 1 y ½, esperando se me permita considerarla como indicante subjetivo de armonías morfológicas objetivas, en las cuales yo no tengo más mérito que su descubrimiento.

Tambien espero se me disimulará el que (como con corta diferencia repito la figura 48) tenga yo en parte que repetir la construccion y conclusiones del *lema quinto*, puesto que mi objeto al exponer la descripcion del actual dibujo, es sólo exponerlo con más sencillez para responder á las objeciones que se me han hecho.

Construccion y demostracion de la figura 1.ª, lámina 1 y ½.

PRIMERA SÉRIE PROPORCIONAL.

Teniéndose en cuenta la deformacion resultante de la contraccion irregular al secarse el papel de la estampa, puede trazarse en otro papel esta figura bajo una escala métrica decimal bien dividida y tomándose con el compas siete centímetros, haciéndose centro en C, trácese el círculo $a\ a'\ a''\ a'''$.

En seguida, segun las reglas detalladas en la demostracion del lema quinto, trácense el cuadrado circunscrito al círculo $b\ b'\ b''\ b'''$ y los armosectores $b\ C\ b''$ y $b'''\ C\ b'$ los cuales, lo mismo que los diámetros polarizados se cruzarán todos en el centro C, quedando la circunferencia dividida en ocho partes iguales con ángulos de á 45° segun la division ordinaria.

Ahora, tomándose con el compas cinco y medio centímetros de la escala, y haciéndose centros sucesivamente en a, a', a'', a''', se marcarán los puntos $e\ e'\ e''\ e'''\ e^{IV}\ e^{V}\ e^{VI}\ e^{VII}$ y tirándose las líneas $e\ e'''$, $e'\ e^{VI}$, $e''\ e^{V}$, $e^{IV}\ e^{VII}$ se tienen dos paralelógramos polarizados: $e\ e'''\ e^{IV}\ e^{VII}$ y $e'\ e^{VI}\ e''\ e^{V}$ cada uno de los cuales tiene catorce centímetros, ó sean módulos, de longitud, por once de latitud.

Estos dos paralelógramos cruzan sus líneas en $d\ d'\ d''\ d'''$ produciendo un cuadrado perfecto, el cual tiene once módulos por cada uno de sus lados.

En este estado la figura presenta la primera proporcionalidad evidente, porque: el cuadrado b, es al paralógramo e, como este es al cuadrado d.

Y en efecto el cuadrado b tiene por cada lado catorce módulos y por consecuencia su área es $=196$.

El paralelógramo e' tiene 14 de longitud y 11 de latitud y su área es $=154$. A la vez que el cuadrado d tiene once módulos por cada lado y su área es $=121$. De donde resulta que $\div b:e::e:d$. Y aplicándole los números $\div 196:154::154:121$. Y exponiéndose en forma de ecuacion $\frac{154^2}{196}=121$.

SEGUNDA SÉRIE PROPORCIONAL.

El cuadrado b es al círculo a, como el paralelógramo e es al cuadrado d. Esta proporcion indica que la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$ es igual al perímetro del armopolígono cuadrado $d\ d'\ d''\ d'''$ lo cual se demuestra ser cierto, valorizando el área del círculo, porque para lograr esto se multiplica la circunferencia por la mitad del radio, y puesto que el radio $C\,a$ que ha servido de base para la construccion de la figura, es igual á 7, su mitad es igual á $3\frac{1}{2}$, por lo que dando á la circunferencia la misma longitud del perímetro armopolígono d, se tiene: que el área del círculo $a=44\times 3\frac{1}{2}$ es igual á $154=$ á 14×11, área del paralelógrama e, y por lo tanto resulta la proporcion siguiente:

$$\div\ b:e::a:d \text{ ó sea}$$

$\div$ El cuadrado circunscrito es al paralelógramo como el círculo es á el área de su armopolígono. Y sustituyendo los números.

$\div 14^2=196:14\times 11=154::44\times 3\frac{1}{2}=154:11^2=121.$

De aquí resulta: que puesto que el diámetro es igual á dos radios, es igual al lado $b\ b'$ del cuadrado circunscrito. Y puesto que la circunferencia es igual al perímetro del armopolígono, las relaciones del diámetro á la circunferencia son alícuotas; es decir: 14 el diámetro y 44 la circunferencia, ó sea como 7 á 22, como adelante se comprobará.

TERCERA SÉRIE PROPORCIONAL.

El círculo $a\ a'\ a''\ a'''$ intersecta con su circunferencia á su armopolígono en los puntos $f\ f'\ f''\ f'''$ y sus semejantes, de lo cual resultan las líneas $f'\ C\ f''$ y sus semejantes en los cuatro lados del armopolígono, por lo que, en obsequio de la sencillez y claridad, sólo detallaré estas armonías del lado $d'' i'' d'$ subentendido el que iguales á estas existen en todos los cuatro lados de la figura.

A las líneas $f' C$ y $f''. C$ y sus semejantes por su grande importancia morfológica les doy el nombre de armosecantes. A las dos líneas $d' C$ y $d'' C$ por igual motivo las denomino armosectores. Al lado $d' i'' d'''$ del armopolígono la nombro armotangente.

Ahora, haciéndose igual dibujo en los otros tres lados $i\ i'\ i'''$, se ve que los cuatro lados del armopolígono, $d\ d'\ d''\ d'''$ inscriben y circunscriben á la vez á la circunferencia, lo cual era indispensable para que esta fuera igual al perimetro de aquel. Porque si este fuera circunscrito ó inscrito, sería mayor ó menor que la circunferencia: luego para que sea igual á esta debe inscribirla y circunscribirla con las cuatro armotangentes.

Pero como esta circunstancia pudiera verificarse en multitud de líneas, más ó ménos luengas, segun se acercaren al polígono circunscrito ó al inscrito, debo demostrar que el armopolígono del diagrama es correcto y el único que con su perímetro da la medida de la circunferencia del círculo $a\ a'\ a''\ a'''$ al cual, por ser tambien el único comensurable alícuotamente con todas sus líneas, le doy el nombre de círculo tipo.

Como preliminar á esta demostracion debo advertir, que así como la circunferencia tipo corta el lado $d'\ d''$ de su armopolígono en los puntos $f'\ f''$, prolongando las armosecantes desde el centro C hasta e''' y e^{IV} y trazándose la circunferencia concéntrica $g\ g'\ g''\ g''$ esta corta al cuadrado $b\ b'\ b''\ b'''$ en los puntos $e\ e'\ e''\ e''\ e^{IV}\ e^{V}\ e^{VI}\ e^{VII}$ y por consecuencia: $\div$ la circunferencia a : al cuadrado d :: la circunferencia g : al cuadrado b.

Esta proporcion demuestra que todo círculo tiene su armopolígono, y que puede convertirse en círculo tipo con solo darle á su radio la division de siete así como la de once al lado de su armopolígono.

Para demostrar que los cuatro lados $d\ d'\ d''\ d'''$ del armopolígono tipo son exactamente iguales á la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$, observe que las sagitas exteriores $r\,d, p\,d', p\,d''$, y $r'\ d'''$ son la mitad de las cuatro sagitas interiores $i\ a, i'\ a', i''\ a'', i'''\ a''$ y por lo tanto, si se supone el convertirse realmente el armopolígono en circunferencia, se necesitan deprimir los cuatro ángulos $d\ d'\ d''\ d'''$, lo cual solo puede producir la circunferencia en las proporciones de las sagitas externas é internas de uno á dos. Porque si á la recta $d'''\ d$ se la hiciese formar el arco $d'''\ a\ d$, se tendrían que deprimir las sagitas $r'\ d'''$ y $r\,d$ igual longitud que la de la sagita interior $i\ a'$, á lo cual provee evidentemente el ser la suma de las dos primeras igual á la longitud de la segunda, resultando entónces el arco $d'''\ a\ d$ del armopolígono, este quedará convertido en la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$.

Entretanto tenemos. que si llamamos a al círculo interior, d á su armopolígono, g al círculo exterior y b á su armopolígono, resulta la proporcion siguiente para las líneas, así como para las áreas: $\div$ a : d :: g : b.

Mas en este caso se observa que la línea $b'\ b''$ que es tangente para el círculo a, es armotangente para el círculo g, y que esta proporcionalidad no existiría si al lado $d'\ d''$ del armopolígono tipo se le diesen otras dimensiones que no fuesen las de once ó sus múltiples que son alícuotas con las de siete y sus múltiples que tiene necesariamente el radio del círculo tipo.

Ademas, hay una armonía indicativa de esta verdad, y es: que si se traza un triángulo $e''\ p\ e'''$ resulta ser este equilátero, lo cual fija las distancias recíprocas de $f\,f'$, $e''\ e'''$, $b'\ d'\ p$.

De lo expuesto se deduce que el círculo tipo a tiene de comun con su círculo coarmónico g, el ser alícuotas sus circunferencias y sus armopolígonos, pero en los rádios y áreas ya no hay esa precision numérica, como se ve por la proporcion siguiente: $\div$ cuadrante $p\ a''\ p'$: radio $C\ a''$ :: cuadrante $q\ g''\ q'$: á radio $C\ g''$. Y sustituyendo los números, multiplicándolos por dos $\div\ d'\ d'' = 22 : C\ a'' = 14 :: C\ a'' = 14 : C\ g'' = 17\frac{18}{22} = 17\frac{9}{11}$

De aquí resulta que en el rádio $C\ g''$ hay ya quebrados aunque proporcionales, los que no hay en el círculo tipo.

Pero esta proporcionalidad sirve para demostrar que el triángulo $i''\ C\ a'''$ tiene exclusivamente sus tres lados proporcionales, satisfaciéndose así á la segunda objecion del profesor arriba expuesta. Resultando perfectamente proporcional la elipse $g\ a'\ g'\ a'''$.

CUARTA SÉRIE PROPORCIONAL.

Fijadas ya las proporciones de los radios $C\ a''$ y $C\ g''$, se puede trazar un elipse que sea un medio proporcional entre los dos círculos a y g.

Esta elipse se obtiene fijándose los dos focos en $i\ i''$, por lo que resultan los dos radios vectores medios é iguales tocando al punto a''' de la circunferencia $a\ a'\ a''\ a'''$.

Ahora véanse las peculiaridades de esta elipse $g\ a'\ g''\ a'''$.

1.ª El triángulo $i\ C\ a'''$ tiene sus tres lados proporcionales, porque si hacemos $i\ C = 11$, $C\ a''$ es $= 14$, y $a''\ i$ resulta $= 17\frac{9}{11}$ lo cual es evidente por ser esta proporcion correlativa á la serie proporcional 3.ª de las arriba enunciadas.

2.ª Consecuentemente, la distancia entre ambos focos $i\ i''$ es proporcional con los dos ejes de la elipse, porque:

$$\div i\ i'' = 11 : a''\ a' = 14 :: a''\ a' = 14 : g\ g'' = 17\tfrac{9}{11}.$$

3.ª Los radios vectores, al producir la periferia de la elipse, tocan sucesivamente los cuatro ángulos $d\ d'\ d''\ d'''$ del armopolígono. Pues en efecto: $i\ d''' + d'''\ i'' = g\ g''$.

Del mismo modo $i\ a''' + a'''\ i'' = i\ h + h'\ i' = g\ g''$.

He aquí como la elipse $g\ a'\ g''\ a'''$ cotangente interna del círculo exterior $g\ g'\ g''\ g'''$ es cotangente externa del círculo interior $a\ a'\ a''\ a'''$.

Pero no es esta elipse solamente proporcional entre ambos círculos, pues ademas es una verdadera armonía morfológica, que presenta por sí misma, como los armosferios, tanta precision armoniosa en sus detalles, que al momento se comprende que está prevista como una ley morfológica que atestigua la preexistencia de la Inteligencia Suprema del Ordenador del metamorfismo alícuota de la Naturaleza.

QUINTA SÉRIE PROPORCIONAL.

No se suspenden, sin embargo, aquí las peculiaridades de esta elipse, pues como con su periferia toca los cuatro ángulos $d\ d'\ d''\ d'''$ del armopolígono, las curvas $d\ a'\ d'$ y $d''\ a'''\ d'''$ vienen á ser determinatrices de la multitud de armotangentes que pueden trazarse identificadas con los arcos del círculo tipo que ellas subtiendan.

Para demostrar esto permítaseme el hacer ver que la curva $d\ a'\ d'$ de la elipse puede asimismo trazarse á compas. Para esto basta fijar una punta de este instrumento en el punto O, donde se intersectan los dos radios vectores $i''\ h\ i\ h'$ con el diámetro $a'\ a'''$, y con la otra punta se describe semejantemente la curva $d\ a'\ d'$.

Para demostrar que esto es verdad, con la misma medida en el compas se fija este en O' y se traza la curva $d\ a\ d'''$, y con otra abertura proporcional desde O'' se traza la curva $b\ g\ b'''$, resultando estas curvas determinatrices para los cuadrantes de sus respectivos círculos, porque:

$$\div r\ a\ r' : q''\ g\ q''' :: d\ a\ d'' : b\ g\ b'.$$

Esto se comprueba dividiendo el lado del armopolígono $d\ d'$ en once módulos y paralelamente se levantan estas divisiones hasta tocar la curva determinatriz $d\ a\ d'$ como se ve gráficamente en el diagrama, y desde todos estos puntos se trazan los armosectores *2 C, 3 C, 4 C, 5 C, 6 C, 7 C, 8 C, 9 C, 10 C, 11 C*, quedando dividido con ellos el cuadrante $d\ a\ d'''$ asimismo en once arcos iguales.

Para comprobarse que todas las armotangentes inscriben y circunscriben á la circunferencia, se pueden trazar las líneas *11, 2; 10, 3; 9, 4; 8, 5; 7, 6;* mirándose que siendo la circunferencia ideal verdaderamente una curva limítrofe del arco del círculo, toda línea recta por pequeña que sea, determinando el lado de un armopolígono, inscribe y circunscribe á la vez á la circunferencia.

En la Naturaleza estas diferencias entre la curva limitrofe y los armopolígonos no se anonadan sino hasta tocar los límites esféricos del Universo medidos por esférides.

¡Tales son el máximum y el mínimum comprendidos por la Inteligencia Suprema, y tal es la multiplicidad de los átomos esféricos con que la Naturaleza cuenta para realizar sus prodigiosas metamorfosis, cuando el hombre agota los guarismos comprensibles de su aritmética concreta, al querer calcular el número de esférides componentes de la cabeza de un alfiler!