

TROISIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations philosophiques sur l'ensemble de la science mathématique.

En commençant à entrer directement en matière par l'étude philosophique de la première des six sciences fondamentales établies dans la leçon précédente, nous avons lieu de constater immédiatement l'importance de la philosophie positive pour perfectionner le caractère général de chaque science en particulier.

Quoique la science mathématique soit la plus ancienne et la plus parfaite de toutes, l'idée générale qu'on doit s'en former n'est point encore nettement déterminée. La définition de la science, ses principales divisions, sont demeurées jusqu'ici vagues et incertaines. Le nom multiple par lequel on la désigne habituellement suffirait même seul pour indiquer le défaut d'unité de

son caractère philosophique, tel qu'il est conçu communément.

A la vérité, c'est seulement au commencement du siècle dernier que les diverses conceptions fondamentales qui constituent cette grande science ont pris chacune assez de développement pour que le véritable esprit de l'ensemble pût se manifester clairement. Depuis cette époque, l'attention des géomètres a été trop justement et trop exclusivement absorbée par le perfectionnement spécial des différentes branches, et par l'application capitale qu'ils en ont faite aux lois les plus importantes de l'univers, pour pouvoir se diriger convenablement sur le système général de la science.

Mais aujourd'hui le progrès des spécialités n'est plus tellement rapide, qu'il interdise la contemplation de l'ensemble. La mathématique (1) est maintenant assez développée, soit en elle-même, soit quant à ses applications les plus essentielles, pour être parvenue à cet état de consistance, dans lequel on doit s'efforcer de coordonner en un système unique les diverses parties de la science, afin de préparer de nouveaux progrès. On peut même observer que les derniers perfectionnemens capitaux éprouvés par la

(1) J'emploierai souvent cette expression au singulier, comme l'a proposé Condorcet, afin d'indiquer avec plus d'énergie l'esprit d'unité dans lequel je conçois la science.

science mathématique ont directement préparé cette importante opération philosophique, en imprimant à ses principales parties un caractère d'unité qui n'existait pas auparavant; tel est éminemment et hors de toute comparaison l'esprit des travaux de l'immortel auteur de la *Théorie des Fonctions* et de la *Mécanique analytique*.

Pour se former une juste idée de l'objet de la science mathématique considérée dans son ensemble, on peut d'abord partir de la définition vague et insignifiante qu'on en donne ordinairement, à défaut de toute autre, en disant qu'elle est la *science des grandeurs*, ou, ce qui est plus positif, la *science qui a pour but la mesure des grandeurs*. Cet aperçu scolastique a, sans doute, singulièrement besoin d'acquiescer plus de précision et plus de profondeur. Mais l'idée est juteau foud; elle est même suffisamment étendue, lorsqu'on la conçoit convenablement. Il importe d'ailleurs, en pareille matière, quand on le peut sans inconvénient, de s'appuyer sur des notions généralement admises. Voyons donc comment, en partant de cette grossière ébauche, on peut s'élever à une véritable définition de la mathématique, à une définition qui soit digne de correspondre à l'importance, à l'étendue et à la difficulté de la science.

La question de *mesurer* une grandeur ne présente par elle-même à l'esprit d'autre idée que celle de la simple comparaison immédiate de cette grandeur avec une autre grandeur semblable supposée connue, qu'on prend pour *unité* entre toutes celles de la même espèce. Ainsi, quand on se borne à définir les mathématiques comme ayant pour objet la mesure des grandeurs, on en donne une idée fort imparfaite, car il est même impossible de voir par là comment il y a lieu, sous ce rapport, à une science quelconque, et surtout à une science aussi vaste et aussi profonde qu'est réputée l'être avec raison la science mathématique. Au lieu d'un immense enchaînement de travaux rationnels très-prolongés, qui offrent à notre activité intellectuelle un aliment inépuisable, la science paraîtrait seulement consister, d'après un tel énoncé, dans une simple suite de procédés mécaniques, pour obtenir directement, à l'aide d'opérations analogues à la superposition des lignes, les rapports des quantités à mesurer à celles par lesquelles on veut les mesurer. Néanmoins, cette définition n'a point réellement d'autre défaut que de n'être pas suffisamment approfondie. Elle n'induit point en erreur sur le véritable but final des mathématiques; seulement elle présente comme direct un objet qui, presque toujours, est, au contraire, fort indi-

rect, et par là, elle ne fait nullement concevoir la nature de la science.

Pour y parvenir, il faut d'abord considérer un fait général, très-facile à constater. C'est que la mesure *directe* d'une grandeur, par la superposition ou par quelque procédé semblable, est le plus souvent pour nous une opération tout-à-fait impossible: en sorte que si nous n'avions pas d'autre moyen pour déterminer les grandeurs que les comparaisons immédiates, nous serions obligés de renoncer à la connaissance de la plupart de celles qui nous intéressent.

On comprendra toute l'exactitude de cette observation générale, en se bornant à considérer spécialement le cas particulier qui présente évidemment le plus de facilité, celui de la mesure d'une ligne droite par une autre ligne droite. Cette comparaison, qui, de toutes celles que nous pouvons imaginer, est sans contredit la plus simple, ne peut néanmoins presque jamais être effectuée immédiatement. En réfléchissant à l'ensemble des conditions nécessaires pour qu'une ligne droite soit susceptible d'une mesure directe, on voit que le plus souvent elles ne peuvent point être remplies à la fois, relativement aux lignes que nous désirons connaître. La première et la plus grossière de ces conditions, celle de pouvoir parcourir la ligne d'un bout à l'autre,

pour porter successivement l'unité dans toute son étendue, exclut évidemment déjà la très-majeure partie des distances qui nous intéressent le plus; d'abord toutes les distances entre les différens corps célestes, ou de la terre à quelque autre corps céleste, et ensuite même la plupart des distances terrestres, qui sont si fréquemment inaccessibles. Quand cette première condition se trouve accomplie, il faut encore que la longueur ne soit ni trop grande ni trop petite, ce qui rendrait la mesure directe également impossible; il faut qu'elle soit convenablement située, etc. La plus légère circonstance, qui abstraitement ne paraîtrait devoir introduire aucune nouvelle difficulté, suffira souvent, dans la réalité, pour nous interdire toute mesure directe. Ainsi, par exemple, telle ligne que nous pourrions mesurer exactement avec la plus grande facilité, si elle était horizontale, il suffira de la concevoir redressée verticalement, pour que la mesure en devienne impossible. En un mot, la mesure immédiate d'une ligne droite, présente une telle complication de difficultés, surtout quand on veut y apporter quelque exactitude, que presque jamais nous ne rencontrons d'autres lignes susceptibles d'être mesurées directement avec précision, du moins parmi celles d'une certaine grandeur, que des lignes purement artificielles, créées expressément

par nous pour comporter une détermination directe, et auxquelles nous parvenons à rattacher toutes les autres.

Ce que je viens d'établir relativement aux lignes se conçoit, à bien plus forte raison, des surfaces, des volumes, des vitesses, des temps, des forces, etc., et, en général, de toutes les autres grandeurs susceptibles d'appréciation exacte, et qui, par leur nature, présentent nécessairement beaucoup plus d'obstacles encore à une mesure immédiate. Il est donc inutile de s'y arrêter, et nous devons regarder comme suffisamment constatée l'impossibilité de déterminer, en les mesurant directement, la plupart des grandeurs que nous désirons connaître. C'est ce fait général qui nécessite la formation de la science mathématique, comme nous allons le voir. Car, renonçant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à les déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques.

La méthode générale qu'on emploie constamment, la seule évidemment qu'on puisse concevoir, pour connaître des grandeurs qui ne comportent point une mesure directe, consiste à les rattacher à d'autres qui soient susceptibles d'être déterminées immédiatement, et d'après lesquelles on parvient à découvrir les premières, au moyen

des relations qui existent entre les unes et les autres. Tel est l'objet précis de la science mathématique envisagée dans son ensemble. Pour s'en faire une idée suffisamment étendue, il faut considérer que cette détermination indirecte des grandeurs peut être indirecte à des degrés fort différens. Dans un grand nombre de cas, qui souvent sont les plus importants, les grandeurs, à la détermination desquelles on ramène la recherche des grandeurs principales qu'on veut connaître, ne peuvent point elles-mêmes être mesurées immédiatement; et doivent par conséquent, à leur tour, devenir le sujet d'une question semblable, et ainsi de suite; en sorte que, dans beaucoup d'occasions, l'esprit humain est obligé d'établir une longue suite d'intermédiaires entre le système des grandeurs inconnues qui sont l'objet définitif de ses recherches, et le système des grandeurs susceptibles de mesure directe, d'après lesquelles on détermine finalement les premières, et qui ne paraissent d'abord avoir avec celles-ci aucune liaison.

Quelques exemples vont suffire pour éclaircir ce que les généralités précédentes pourraient présenter de trop abstrait.

Considérons, en premier lieu, un phénomène naturel très-simple qui puisse néanmoins donner lieu à une question mathématique réelle, et

susceptible d'applications effectives, le phénomène de la chute verticale des corps pesans.

En observant ce phénomène, l'esprit le plus étranger aux conceptions mathématiques reconnaît sur-le-champ que les deux quantités qu'il présente, savoir : la hauteur d'où un corps est tombé, et le temps de sa chute, sont nécessairement liées l'une à l'autre, puisqu'elles varient ensemble, et restent fixes simultanément; ou, suivant le langage des géomètres, qu'elles sont *fonction* l'une de l'autre. Le phénomène, considéré sous ce point de vue, donne donc lieu à une question mathématique, qui consiste à suppléer à la mesure directe de l'une de ces deux grandeurs lorsqu'elle sera impossible, par la mesure de l'autre. C'est ainsi, par exemple, qu'on pourra déterminer indirectement la profondeur d'un précipice, en se bornant à mesurer le temps qu'un corps emploierait à tomber jusqu'au fond; et, en procédant convenablement, cette profondeur inaccessible sera connue avec tout autant de précision que si c'était une ligne horizontale placée dans les circonstances les plus favorables à une mesure facile et exacte. Dans d'autres occasions, c'est la hauteur d'où le corps est tombé qui sera facile à connaître, tandis que le temps de la chute ne pourrait point être observé directement; alors le même phénomène donnera lieu à la question inverse, déterminer le

temps d'après la hauteur; comme, par exemple, si l'on voulait connaître quelle serait la durée de la chute verticale d'un corps tombant de la Lune sur la terre.

Dans l'exemple précédent, la question mathématique est fort simple, du moins quand on n'a pas égard à la variation d'intensité de la pesanteur, ni à la résistance du fluide que le corps traverse dans sa chute. Mais, pour agrandir la question, il suffira de considérer le même phénomène dans sa plus grande généralité, en supposant la chute oblique, et tenant compte de toutes les circonstances principales. Alors, au lieu d'offrir simplement deux quantités variables liées entr'elles par une relation facile à suivre, le phénomène en présentera un plus grand nombre, l'espace parcouru, soit dans le sens vertical, soit dans le sens horizontal, le temps employé à le parcourir, la vitesse du corps à chaque point de sa course, et même l'intensité et la direction de son impulsion primitive, qui pourront aussi être envisagées comme variables, et enfin, dans certains cas, pour tenir compte de tout, la résistance du milieu et l'énergie de la gravité. Toutes ces diverses quantités seront liées entr'elles, de telle sorte que chacune à son tour pourra être déterminée indirectement d'après les autres, ce qui présentera autant de recherches mathématiques distinctes

qu'il y aura de grandeurs coexistantes dans le phénomène considéré. Ce changement très-simple dans les conditions physiques d'un problème pourra faire, comme il arrive en effet pour l'exemple cité, qu'une recherche mathématique, primitivement fort élémentaire, se place tout-à-coup au rang des questions les plus difficiles, dont la solution complète et rigoureuse surpasse jusqu'à présent toutes les plus grandes forces de l'esprit humain.

Prenons un second exemple dans les phénomènes géométriques. Qu'il s'agisse de déterminer une distance qui n'est pas susceptible de mesure directe; on la concevra généralement comme faisant partie d'une *figure*, ou d'un système quelconque de lignes, choisi de telle manière que tous ses autres élémens puissent être observés immédiatement; par exemple, dans le cas le plus simple et auquel tous les autres peuvent se réduire finalement, on considérera la distance proposée comme appartenant à un triangle, dans lequel on pourrait déterminer directement, soit un autre côté et deux angles, soit deux côtés et un seul angle. Dès-lors, la connaissance de la distance cherchée, au lieu d'être obtenue immédiatement, sera le résultat d'un travail mathématique qui consistera à la déduire des élémens observés, d'après la relation qui la lie avec eux. Ce travail

pourra devenir successivement de plus en plus compliqué, si les éléments supposés connus ne pouvaient, à leur tour, comme il arrive le plus souvent, être déterminés que d'une manière indirecte, à l'aide de nouveaux systèmes auxiliaires, dont le nombre, dans les grandes opérations de ce genre, finit par devenir quelquefois très-considérable. La distance une fois déterminée, cette seule connaissance suffira fréquemment pour faire obtenir de nouvelles quantités, qui offriront le sujet de nouvelles questions mathématiques. Ainsi, quand on sait à quelle distance est situé un objet, la simple observation, toujours possible, de son diamètre apparent, doit évidemment permettre de déterminer indirectement, quelque inaccessible qu'il puisse être, ses dimensions réelles, et, par une suite de recherches analogues, sa surface, son volume, son poids même, et une foule d'autres propriétés, dont la connaissance semblerait devoir nous être nécessairement interdite.

C'est par de tels travaux, que l'homme a pu parvenir à connaître, non-seulement les distances des astres à la terre, et par suite, entr'eux, mais leur grandeur effective, leur véritable figure, jusqu'aux inégalités de leur surface, et, ce qui semble se dérober bien plus encore à nos moyens d'investigation, leurs masses respectives, leurs densités moyennes, les circonstances principales

de la chute des corps pesans à la surface de chacun d'eux, etc. Par la puissance des théories mathématiques, tous ces divers résultats, et bien d'autres encore relatifs aux différentes classes de phénomènes naturels, n'ont exigé définitivement d'autres mesures immédiates que celles d'un très-petit nombre de lignes droites, convenablement choisies, et d'un plus grand nombre d'angles. On peut même dire, en toute rigueur, pour indiquer d'un seul trait la portée générale de la science, que si l'on ne craignait pas avec raison de multiplier sans nécessité les opérations mathématiques, et si, par conséquent, on ne devait pas les réserver seulement pour la détermination des quantités qui ne pourraient être mesurées directement, ou d'une manière assez exacte, la connaissance de toutes les grandeurs susceptibles d'estimation précise que les divers ordres de phénomènes peuvent nous offrir, serait finalement réductible à la mesure immédiate d'une ligne droite unique et d'un nombre d'angles convenable.

Nous sommes donc parvenu maintenant à définir avec exactitude la science mathématique, en lui assignant pour but, la mesure indirecte des grandeurs, et disant qu'on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui

existent entr'elles. Cet énoncé, au lieu de donner seulement l'idée d'un art, comme le font jusqu'ici toutes les définitions ordinaires, caractérise immédiatement une véritable science, et la montre sur-le-champ composée d'un immense enchaînement d'opérations intellectuelles, qui pourront évidemment devenir très-compiquées, à raison de la suite d'intermédiaires qu'il faudra établir entre les quantités inconnues et celles qui comportent une mesure directe, du nombre des variables co-existantes dans la question proposée, et de la nature des relations que fourniront entre toutes ces diverses grandeurs les phénomènes considérés. D'après une telle définition, l'esprit mathématique consiste à regarder toujours comme liées entr'elles toutes les quantités que peut présenter un phénomène quelconque, dans la vue de les déduire les unes des autres. Or, il n'y a pas évidemment de phénomène qui ne puisse donner lieu à des considérations de ce genre; d'où résulte l'étendue naturellement indéfinie et même la rigoureuse universalité logique de la science mathématique : nous chercherons plus loin à circonscrire aussi exactement que possible son extension effective.

Les explications précédentes établissent clairement la justification du nom employé pour désigner la science que nous considérons. Cette

dénomination, qui a pris aujourd'hui une acception si déterminée, signifie simplement par elle-même la science en général. Une telle désignation, rigoureusement exacte pour les Grecs, qui n'avaient pas d'autre science réelle, n'a pu être conservée par les modernes que pour indiquer les mathématiques comme la science par excellence. Et, en effet, la définition à laquelle nous venons d'être conduits, si on en écarte la circonstance de la précision des déterminations, n'est autre chose que la définition de toute véritable science quelconque, car chacune n'a-t-elle pas nécessairement pour but de déterminer des phénomènes les uns par les autres, d'après les relations qui existent entr'eux? Toute science consiste dans la coordination des faits; si les diverses observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait pas de science. On peut même dire généralement que la science est essentiellement destinée à dispenser, autant que le comportent les divers phénomènes, de toute observation directe, en permettant de déduire du plus petit nombre possible de données immédiates, le plus grand nombre possible de résultats. N'est-ce point là, en effet, l'usage réel, soit dans la spéculation, soit dans l'action, des lois que nous parvenons à découvrir entre les phénomènes naturels? La science mathématique, ne fait, d'après cela, que

pousser au plus haut degré possible, tant sous le rapport de la quantité que sous celui de la qualité, sur les sujets véritablement de son ressort, le même genre de recherches que poursuit, à des degrés plus ou moins inférieurs, chaque science réelle, dans sa sphère respective.

C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est qu'une science. C'est là uniquement qu'on doit chercher à connaître avec précision la méthode générale que l'esprit humain emploie constamment dans toutes ses recherches positives, parce que nulle part ailleurs les questions ne sont résolues d'une manière aussi complète, et les déductions prolongées aussi loin avec une sévérité rigoureuse. C'est là également que notre entendement a donné les plus grandes preuves de sa force, parce que les idées qu'il y considère sont du plus haut degré d'abstraction possible dans l'ordre positif. Toute éducation scientifique qui ne commence point par une telle étude, pèche donc nécessairement par sa base.

Nous avons jusqu'ici envisagé la science mathématique seulement dans son ensemble total, sans avoir aucun égard à ses divisions. Nous devons maintenant, pour compléter cette vue générale et nous former une juste idée du caractè-

re philosophique de la science, considérer sa division fondamentale. Les divisions secondaires seront examinées dans les leçons suivantes.

Cette division principale ne saurait être vraiment rationnelle, et dériver de la nature même du sujet, qu'autant qu'elle se présentera spontanément, en faisant l'analyse exacte d'une question mathématique complète. Ainsi, après avoir déterminé ci-dessus quel est l'objet général des travaux mathématiques, caractérisons maintenant avec précision les divers ordres principaux de recherches dont ils se composent constamment.

La solution complète de toute question mathématique se décompose nécessairement en deux parties, d'une nature essentiellement distincte, et dont la relation est invariablement déterminée. En effet, nous avons vu que toute recherche mathématique a pour objet de déterminer des grandeurs inconnues, d'après les relations qui existent entre elles et des grandeurs connues. Or, il faut évidemment d'abord, à cette fin, parvenir à connaître avec précision les relations existantes entre les quantités que l'on considère. Ce premier ordre de recherches constitue ce que j'appelle la partie *concrète* de la solution. Quand elle est terminée, la question change de nature; elle se réduit à une pure question de nombres, con-

sistant simplement désormais à déterminer des nombres inconnus, lorsqu'on sait quelles relations précises les lient à des nombres connus. C'est dans ce second ordre de recherches que consiste ce que je nomme la partie *abstraite* de la solution. De là résulte la division fondamentale de la science mathématique générale en deux grandes sciences, la mathématique abstraite et la mathématique concrète.

Cette analyse peut être observée dans toute question mathématique complète, quelque simple ou quelque compliquée qu'elle soit. Il suffira, pour la faire bien comprendre, d'en indiquer un seul exemple.

Reprenant le phénomène déjà cité de la chute verticale d'un corps pesant, et considérant le cas le plus simple, on voit que pour parvenir à déterminer l'une par l'autre la hauteur d'où le corps est tombé et la durée de sa chute, il faut commencer par découvrir la relation exacte de ces deux quantités, ou, suivant le langage des géomètres, l'*équation* qui existe entre elles. Avant que cette première recherche soit terminée, toute tentative pour déterminer numériquement la valeur de l'une de ces deux grandeurs par celle de l'autre serait évidemment prématurée, car elle n'aurait aucune base. Il ne suffit pas de savoir vaguement qu'elles dépendent l'une de l'autre,

ce que tout le monde aperçoit sur-le-champ, mais il faut déterminer en quoi consiste cette dépendance; ce qui peut être fort difficile, et constitue en effet, dans le cas actuel, la partie incomparablement supérieure du problème. Le véritable esprit scientifique est si moderne et encore tellement rare, que personne peut-être avant Galilée n'avait seulement remarqué l'accroissement de vitesse qu'éprouve un corps dans sa chute, ce qui exclut l'hypothèse, vers laquelle notre intelligence, toujours portée involontairement à supposer dans chaque phénomène les *fonctions* les plus simples, sans aucun autre motif que sa plus grande facilité à les concevoir, serait naturellement entraînée, la hauteur proportionnelle au temps. En un mot, ce premier travail aboutit à la découverte de la loi de Galilée. Quand cette partie concrète est terminée, la recherche devient d'une tout autre nature. Sachant que les espaces parcourus par le corps dans chaque seconde successive de sa chute croissent comme la suite des nombres impairs, c'est alors une question purement numérique et abstraite que d'en déduire ou la hauteur d'après le temps, ou le temps par la hauteur, ce qui consistera à trouver que, d'après la loi établie, la première de ces deux quantités est un multiple connu de la seconde puissance de l'autre, d'où l'on devra finalement conclure la va-

leur de l'une quand celle de l'autre sera donnée.

Dans cet exemple, la question concrète est plus difficile que la question abstraite. Ce serait l'inverse, si l'on considérait le même phénomène dans sa plus grande généralité, tel que je l'ai envisagé plus haut pour un autre motif. Suivant les cas, ce sera tantôt la première, tantôt la seconde de ces deux parties qui constituera la principale difficulté de la question totale; la loi mathématique du phénomène pouvant être très-simple, mais difficile à obtenir, et, dans d'autres occasions, facile à découvrir, mais fort compliquée : en sorte que les deux grandes sections de la science mathématique, quand on les compare en masse, doivent être regardées comme exactement équivalentes en étendue et en difficulté, aussi bien qu'en importance, ainsi que nous le constaterons plus tard en considérant chacune d'elles séparément.

Ces deux parties, essentiellement distinctes, d'après l'explication précédente, par l'objet que l'esprit s'y propose, ne le sont pas moins par la nature des recherches dont elles se composent.

La première doit porter le nom de *concrète*, car elle dépend évidemment du genre des phénomènes considérés, et doit varier nécessairement lorsqu'on envisagera de nouveaux phénomènes; tandis que la seconde est complètement indépendante de la nature des objets examinés, et porte

seulement sur les relations numériques qu'ils présentent, ce qui doit la faire appeler *abstraite*. Les mêmes relations peuvent exister dans un grand nombre de phénomènes différens, qui, malgré leur extrême diversité, seront envisagés par le géomètre comme offrant une question analytique, susceptible, en l'étudiant isolément, d'être résolue une fois pour toutes. Ainsi, par exemple, la même loi qui règne entre l'espace et le temps, quand on examine la chute verticale d'un corps dans le vide, se retrouve pour d'autres phénomènes qui n'offrent aucune analogie avec le premier ni entre eux : car elle exprime aussi la relation entre l'aire d'un corps sphérique et la longueur de son diamètre; elle détermine également le décroissement de l'intensité de la lumière ou de la chaleur à raison de la distance des objets éclairés ou échauffés, etc. La partie abstraite, commune à ces diverses questions mathématiques, ayant été traitée à l'occasion d'une seule d'entre elles, se trouvera l'être, par cela même, pour toutes les autres; tandis que la partie concrète devra nécessairement être reprise pour chacune séparément, sans que la solution de quelques-unes puisse fournir, sous ce rapport, aucun secours direct pour celle des suivantes. Il est impossible d'établir de véritables méthodes générales qui, par une marche déterminée et invariable, assurent, dans tous les

cas, la découverte des relations existantes entre les quantités, relativement à des phénomènes quelconques : ce sujet ne comporte nécessairement que des méthodes spéciales pour telle ou telle classe de phénomènes géométriques, ou mécaniques, ou thermologiques, etc. On peut, au contraire, de quelque source que proviennent les quantités considérées, établir des méthodes uniformes pour les déduire les unes des autres, en supposant connues leurs relations exactes. La partie abstraite des mathématiques est donc, de sa nature, générale; la partie concrète, spéciale.

En présentant cette comparaison sous un nouveau point de vue, on peut dire que la mathématique concrète a un caractère philosophique essentiellement expérimental, physique, phénoménal; tandis que celui de la mathématique abstraite est purement logique, rationnel. Ce n'est pas ici le lieu de discuter exactement les procédés qu'emploie l'esprit humain pour découvrir les lois mathématiques des phénomènes. Mais, soit que l'observation précise suggère elle-même la loi, soit, comme il arrive plus souvent, qu'elle ne fasse que confirmer la loi construite par le raisonnement d'après les faits les plus communs; toujours est-il certain que cette loi n'est envisagée comme réelle qu'autant qu'elle se montre d'accord avec les résultats de l'expérience di-

recte. Ainsi, la partie concrète de toute question mathématique est nécessairement fondée sur la considération du monde extérieur, et ne saurait jamais, quelle qu'y puisse être la part du raisonnement, se résoudre par une simple suite de combinaisons intellectuelles. La partie abstraite, au contraire, quand elle a été d'abord bien exactement séparée, ne peut consister que dans une série de déductions rationnelles plus ou moins prolongée. Car, si l'on a une fois trouvé les équations d'un phénomène, la détermination des unes par les autres des quantités qu'on y considère, quelques difficultés d'ailleurs qu'elle puisse souvent offrir, est uniquement du ressort du raisonnement. C'est à l'intelligence qu'il appartient de déduire, de ces équations, des résultats qui y sont évidemment compris, quoique d'une manière peut-être fort implicite, sans qu'il y ait lieu à consulter de nouveau le monde extérieur, dont la considération, devenue dès lors étrangère, doit même être soigneusement écartée pour réduire le travail à sa véritable difficulté propre.

On voit, par cette comparaison générale, dont je dois me borner ici à indiquer les traits principaux, combien est naturelle et profonde la division fondamentale établie ci-dessus dans la science mathématique.

Pour terminer l'exposition générale de cette

division, il ne nous reste plus qu'à circonscrire, aussi exactement que nous puissions le faire dans ce premier aperçu, chacune des deux grandes sections de la science mathématique.

La *mathématique concrète* ayant pour objet de découvrir les *équations* des phénomènes, semblerait, *à priori*, devoir se composer d'autant de sciences distinctes qu'il y a de catégories réellement différentes pour nous parmi les phénomènes naturels. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on soit encore parvenu à découvrir des lois mathématiques dans tous les ordres de phénomènes; nous verrons même tout-à-l'heure que, sous ce rapport, la majeure partie se dérobera très-vraisemblablement toujours à nos efforts. En réalité, dans l'état présent de l'esprit humain, il n'y a directement que deux grandes catégories générales de phénomènes dont on connaisse constamment les équations; ce sont d'abord les phénomènes géométriques, et ensuite les phénomènes mécaniques. Ainsi, la partie concrète des mathématiques se compose donc de la géométrie et de la mécanique rationnelle.

Cela suffit, il est vrai, pour lui donner un caractère complet d'universalité logique, quand on considère l'ensemble des phénomènes du point de vue le plus élevé de la philosophie naturelle. En effet, si toutes les parties de l'univers étaient

conçues comme immobiles, il n'y aurait évidemment à observer que des phénomènes géométriques, puisque tout se réduirait à des relations de forme, de grandeur, et de situation; ayant ensuite égard aux mouvements qui s'y exécutent, il y a lieu à considérer de plus des phénomènes mécaniques. En appliquant ici, après l'avoir suffisamment généralisée, une conception philosophique, due à M. de Blainville, et déjà citée pour un autre usage dans la 1^{re} leçon (page 52), on peut donc établir que, vu sous le rapport statique, l'univers ne présente que des phénomènes géométriques; et, sous le rapport dynamique, que des phénomènes mécaniques. Ainsi la géométrie et la mécanique constituent, par elles-mêmes, les deux sciences naturelles fondamentales, en ce sens, que tous les effets naturels peuvent être conçus comme de simples résultats nécessaires, ou des lois de l'étendue, ou des lois du mouvement.

Mais, quoique cette conception soit toujours logiquement possible, la difficulté est de la spécialiser avec la précision nécessaire, et de la suivre exactement dans chacun des cas généraux que nous offre l'étude de la nature, c'est-à-dire, de réduire effectivement chaque question principale de philosophie naturelle, pour tel ordre de phénomènes déterminé, à la question de géo-

métrie ou de mécanique, à laquelle on pourrait rationnellement la supposer ramenée. Cette transformation, qui exige préalablement de grands progrès dans l'étude de chaque classe de phénomènes, n'a été réellement exécutée jusqu'ici que pour les phénomènes astronomiques, et pour une partie de ceux que considère la physique terrestre proprement dite. C'est ainsi que l'astronomie, l'acoustique, l'optique, etc., sont devenues finalement des applications de la science mathématique à de certains ordres d'observations (1). Mais, ces applications n'étant point,

(1) Je dois faire ici, par anticipation, une mention sommaire de la thermologie, à laquelle je consacrerai plus tard une leçon spéciale. La théorie mathématique des phénomènes de la chaleur a pris, par les mémorables travaux de son illustre fondateur, un tel caractère, qu'on peut aujourd'hui la concevoir, après la géométrie et la mécanique, comme une véritable troisième section distincte de la mathématique concrète, puisque M. Fourier a établi, d'une manière entièrement directe, les équations thermologiques, au lieu de se représenter hypothétiquement les questions comme des applications de la mécanique, ainsi qu'on a tenté de le faire pour les phénomènes électriques, par exemple. Cette grande découverte, qui, comme toutes celles qui se rapportent à la méthode, n'est pas encore convenablement appréciée, mérite singulièrement notre attention; car, outre son importance immédiate pour l'étude vraiment rationnelle et positive d'un ordre de phénomènes aussi universel et aussi fondamental, elle tend à relever nos espérances philosophiques, quant à l'extension future des applications légitimes de l'analyse mathématique, ainsi que je l'expliquerai dans le second volume de ce cours, en examinant le caractère général de cette nouvelle série de travaux. Je n'aurais

par leur nature, rigoureusement circonscrites, ce serait assigner à la science un domaine indéfini et entièrement vague, que de les confondre avec elle, comme on le fait dans la division ordinaire, si vicieuse à tant d'autres égards, des mathématiques en pures et appliquées. Nous persisterons donc à regarder la mathématique concrète comme uniquement composée de la géométrie et de la mécanique.

Quant à la *mathématique abstraite*, dont j'examinerai la division générale dans la leçon suivante, sa nature est nettement et exactement déterminée. Elle se compose de ce qu'on appelle le *calcul*, en prenant ce mot dans sa plus grande extension, qui embrasse depuis les opérations numériques les plus simples jusqu'aux plus sublimes combinaisons de l'analyse transcendante. Le *calcul* a pour objet propre de résoudre toutes les questions de nombres. Son point de départ est, constamment et nécessairement, la connaissance de relations précises, c'est-à-dire d'*équations*, entre les diverses grandeurs que l'on considère simultanément, ce qui est, au contraire, le terme de la mathématique concrète. Quelques

pas hésité dès à présent à traiter la thermologie, ainsi conçue, comme une troisième branche principale de la mathématique concrète, si je n'avais craint de diminuer l'utilité de cet ouvrage en m'écartant trop des habitudes ordinaires.

compliquées ou quelque indirectes que puissent être d'ailleurs ces relations, le but final de la science du *calcul* est d'en déduire toujours les valeurs des quantités inconnues par celles des quantités connues. Cette science, bien que plus perfectionnée qu'aucune autre, est, sans doute, réellement peu avancée encore, en sorte que ce but est rarement atteint d'une manière complètement satisfaisante. Mais tel n'en est pas moins son vrai caractère. Pour concevoir nettement la véritable nature d'une science, il faut toujours la supposer parfaite.

Afin de résumer le plus philosophiquement possible les considérations ci-dessus exposées sur la division fondamentale des mathématiques, il importe de remarquer qu'elle n'est qu'une application du principe général de classification qui nous a permis d'établir, dans la leçon précédente, la hiérarchie rationnelle des différentes sciences positives.

Si l'on compare, en effet, d'une part le calcul, et d'une autre part la géométrie et la mécanique, on vérifie, relativement aux idées considérées dans chacune de ces deux sections principales de la mathématique, tous les caractères essentiels de notre méthode encyclopédique. Les idées analytiques sont évidemment à la fois plus abstraites, plus générales et plus simples que les

idées géométriques ou mécaniques. Bien que les conceptions principales de l'analyse mathématique, envisagées historiquement, se soient formées sous l'influence des considérations de géométrie ou de mécanique, au perfectionnement desquelles les progrès du calcul sont étroitement liés, l'analyse n'en est pas moins, sous le point de vue logique, essentiellement indépendante de la géométrie et de la mécanique, tandis que celles-ci sont, au contraire, nécessairement fondées sur la première.

L'analyse mathématique est donc, d'après les principes que nous avons constamment suivis jusqu'ici, la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives. Elle constitue la première et la plus parfaite de toutes les sciences fondamentales. Les idées dont elle s'occupe, sont les plus universelles, les plus abstraites et les plus simples que nous puissions réellement concevoir. On ne saurait tenter d'aller plus loin, sous ces trois rapports équivalens, sans tomber inévitablement dans les rêveries métaphysiques. Car, quel *abstractum* effectif pourrait-il rester dans l'esprit pour servir de sujet positif au raisonnement, si on voulait supprimer encore quelque circonstance dans les notions des quantités indéterminées, constantes ou variables, telles que les géomètres les emploient aujourd'hui, afin de

s'élever à un prétendu degré supérieur d'abstraction, comme le croient les ontologistes?

Cette nature propre de l'analyse mathématique permet de s'expliquer aisément pourquoi, lorsqu'elle est convenablement employée, elle nous offre un si puissant moyen, non-seulement pour donner plus de précision à nos connaissances réelles, ce qui est évident de soi-même, mais surtout pour établir une coordination infiniment plus parfaite dans l'étude des phénomènes qui comportent cette application. Car, les conceptions ayant été généralisées et simplifiées le plus possible, à tel point qu'une seule question analytique, résolue abstraitement, renferme la solution implicite d'une foule de questions physiques diverses, il doit nécessairement en résulter pour l'esprit humain une plus grande facilité à apercevoir des relations entre des phénomènes qui semblaient d'abord entièrement isolés les uns des autres, et desquels on est ainsi parvenu à tirer, pour le considérer à part, tout ce qu'ils ont de commun. C'est ainsi qu'en examinant la marche de notre intelligence dans la solution des questions importantes de géométrie et de mécanique, nous voyons surgir naturellement, par l'intermédiaire de l'analyse, les rapprochemens les plus fréquens et les plus inattendus entre des problèmes qui n'offraient primitivement aucune liaison appa-

rente, et que nous finissons souvent par envisager comme identiques. Pourrions-nous, par exemple, sans le secours de l'analyse, apercevoir la moindre analogie entre la détermination de la direction d'une courbe à chacun de ses points, et celle de la vitesse acquise par un corps à chaque instant de son mouvement varié, questions qui, quelque diverses qu'elles soient, n'en font qu'une, aux yeux du géomètre?

La haute perfection relative de l'analyse mathématique, comparée à toutes les autres branches de nos connaissances positives, se conçoit avec la même facilité, quand on a bien saisi son vrai caractère général. Cette perfection ne tient pas, comme l'ont cru les métaphysiciens, et surtout Condillac, d'après un examen superficiel, à la nature des signes éminemment concis et généraux qu'on emploie comme instrumens de raisonnement. Dans cette importante occasion spéciale, comme dans toutes les autres, l'influence des signes a été considérablement exagérée, bien qu'elle soit sans doute, très réelle, ainsi que l'avaient reconnu, avant Condillac, et d'une manière bien plus exacte, la plupart des géomètres. En réalité, toutes les grandes idées analytiques ont été formées sans que les signes algébriques fussent d'aucun secours essentiel, autrement que pour les exploiter après que l'esprit