

les avait obtenues. La perfection supérieure de la science du calcul tient principalement à l'extrême simplicité des idées qu'elle considère, par quelques signes qu'elles soient exprimées : en sorte qu'il n'y a pas le moindre espoir, à l'aide d'aucun artifice quelconque du langage scientifique, même en le supposant possible, de perfectionner, au même degré, des théories qui, portant sur des notions plus complexes, sont nécessairement condamnées, par leur nature, à une infériorité logique plus ou moins grande suivant la classe correspondante de phénomènes.

L'examen que nous avons tenté de faire, dans cette leçon, du caractère philosophique de la science mathématique, resterait incomplet, si, après l'avoir envisagée dans son objet et dans sa composition, nous n'indiquions pas quelques considérations générales directement relatives à l'étendue réelle de son domaine.

À cet effet, il est indispensable de reconnaître avant tout, pour se faire une juste idée de la véritable nature des mathématiques, que, sous le point de vue purement logique, cette science est, par elle-même, nécessairement et rigoureusement universelle. Car il n'y a pas de question quelconque qui ne puisse finalement être conçue comme consistant à déterminer des quantités les unes par les autres d'après certaines relations, et,

par conséquent, comme réductible, en dernière analyse, à une simple question de nombres. On le comprendra si l'on remarque effectivement que, dans toutes nos recherches, à quelque ordre de phénomènes qu'elles se rapportent, nous avons définitivement en vue d'arriver à des nombres, à des doses. Quoique nous n'y parvenions le plus souvent que d'une manière fort grossière et d'après des méthodes très incertaines, il n'en est pas moins évident que tel est le terme réel de tous nos problèmes quelconques. Ainsi, pour prendre un exemple dans la classe de phénomène la moins accessible à l'esprit mathématique, les phénomènes des corps vivans, considérés même, pour plus de complication, dans le cas pathologique, n'est-il pas manifeste que toutes les questions de thérapeutique peuvent être envisagées comme consistant à déterminer les quantités de tous les divers modificateurs de l'organisme qui doivent agir sur lui pour le ramener à l'état normal, en admettant, suivant l'usage des géomètres, les valeurs nulles, négatives, ou même contradictoires, pour quelques-unes de ces quantités dans certains cas? Sans doute, une telle manière de se représenter la question ne peut être en effet réellement suivie, comme nous allons le voir, pour les phénomènes les plus complexes, parce qu'elle nous présente dans l'application des

difficultés insurmontables; mais quand il s'agit de concevoir abstraitement toute la portée intellectuelle d'une science, il importe de lui supposer l'extension totale dont elle est logiquement susceptible.

On objecterait vainement contre une telle conception la division générale des idées humaines selon les deux catégories de Kant, de la quantité, et de la qualité, dont la première seule constituerait le domaine exclusif de la science mathématique. Le développement même de cette science a montré positivement depuis long-temps le peu de réalité de cette superficielle distinction métaphysique. Car la conception fondamentale de Descartes sur la relation du concret à l'abstrait en mathématiques, a prouvé que toutes les idées de qualité étaient réductibles à des idées de quantité. Cette conception, établie d'abord, par son immortel auteur, pour les phénomènes géométriques seulement, a été ensuite effectivement étendue par ses successeurs aux phénomènes mécaniques; et elle vient de l'être de nos jours aux phénomènes thermologiques. En résultat de cette généralisation graduelle, il n'y a pas maintenant de géomètres qui ne la considèrent, dans un sens purement théorique, comme pouvant s'appliquer à toutes nos idées réelles quelconques, en sorte que tout phénomène soit logiquement susceptible d'être représenté par une *équation*,

aussi bien qu'une courbe ou un mouvement, sauf la difficulté de la trouver, et celle de la résoudre, qui peuvent être et sont souvent supérieures aux plus grandes forces de l'esprit humain.

Mais si, pour se former une idée convenable de la science mathématique, il importe de la concevoir comme étant nécessairement douée par sa nature d'une rigoureuse universalité logique, il n'est pas moins indispensable de considérer maintenant les grandes limitations réelles qui, vu la faiblesse de notre intelligence, rétrécissent singulièrement son domaine effectif, à mesure que les phénomènes se compliquent en se spécialisant.

Toute question peut sans doute, ainsi que nous venons de le voir, être conçue comme réductible à une pure question de nombres. Mais la difficulté de la traiter réellement sous ce point de vue, c'est-à-dire d'effectuer une telle transformation, est d'autant plus grande, dans les diverses parties essentielles de la philosophie naturelle, que l'on considère des phénomènes plus compliqués, en sorte que sauf pour les phénomènes les plus simples et les plus généraux, elle devient bientôt insurmontable.

On le sentira aisément, si l'on considère que, pour faire rentrer une question dans le domaine de l'analyse mathématique, il faut d'abord être

parvenu à découvrir des relations précises entre les quantités coexistantes dans le phénomène étudié, l'établissement de ces équations des phénomènes étant le point de départ nécessaire de tous les travaux analytiques. Or, cela doit être évidemment d'autant plus difficile, qu'il s'agit de phénomènes plus particuliers, et par suite plus compliqués. En examinant sous ce point de vue les diverses catégories fondamentales des phénomènes naturels établis dans la leçon précédente, on trouvera que, tout bien considéré, c'est seulement au plus pour les trois premières, comprenant toute la *physique inorganique*, qu'on peut légitimement espérer d'atteindre un jour ce haut degré de perfection scientifique, autant du moins qu'une telle limite peut être posée avec précision. Comme je dois plus tard traiter spécialement cette discussion par rapport à chaque science fondamentale, il suffira de l'indiquer ici de la manière la plus générale.

La première condition pour que des phénomènes comportent des lois mathématiques susceptibles d'être découvertes, c'est évidemment que les diverses quantités qu'ils présentent puissent donner lieu à des nombres fixes. Or, en comparant, à cet égard, les deux grandes sections principales de la philosophie naturelle, on voit que la *physique organique* tout entière, et pro-

ablement aussi les parties les plus compliquées de la physique inorganique, sont nécessairement inaccessibles, par leur nature, à notre analyse mathématique, en vertu de l'extrême variabilité numérique des phénomènes correspondans. Toute idée précise de nombres fixes est véritablement déplacée dans les phénomènes des corps vivans, quand on veut l'employer autrement que comme moyen de soulager l'attention, et qu'on attache quelque importance aux relations exactes des valeurs assignées. Sous ce rapport, les réflexions de Bichat, sur l'abus de l'esprit mathématique en physiologie, sont parfaitement justes; on sait à quelles aberrations a conduit cette manière vicieuse de considérer les corps vivans.

Les différentes propriétés des corps bruts, surtout les plus générales, se présentent dans chacun d'eux avec des degrés presque invariables, ou du moins elles n'éprouvent que des variations simples, séparées par de longs intervalles d'uniformité, et qu'il est possible, en conséquence, d'assujétir à des lois précises et régulières. Ainsi, les qualités physiques d'un corps inorganique, principalement quand il est solide, sa forme, sa consistance, sa pesanteur spécifique, son élasticité, etc., présentent, pour un temps considérable, une fixité numérique remarquable, qui permet de les considérer réellement et utilement

sous un point de vue mathématique. On sait qu'il n'en est déjà plus ainsi à beaucoup près pour les phénomènes chimiques que présentent les mêmes corps, et qui, plus compliqués, dépendant d'un bien plus grand nombre de circonstances, présentent des variations plus étendues, plus fréquentes, et par suite plus irrégulières. Aussi, d'après quelques considérations déjà indiquées dans la première leçon (page 45) et qui seront spécialement développées dans le troisième volume de ce cours, on ne peut pas seulement assurer aujourd'hui, d'une manière générale, qu'il y ait lieu à concevoir des nombres fixes en chimie, même sous le rapport le plus simple, quant aux proportions relatives des corps dans leurs combinaisons, ce qui montre clairement combien un tel ordre de phénomènes est encore loin de comporter de véritables lois mathématiques. Admettons-en néanmoins, pour ce cas, la possibilité et même la probabilité futures, afin de ne pas rendre trop minutieuse la discussion de la limite générale qu'il s'agit d'établir ici par rapport à l'extension, effectivement possible, du domaine réel de l'analyse mathématique. Il n'y aura plus le moindre doute aussitôt que nous passerons aux phénomènes que présentent les corps, considérés dans cet état d'agitation intestinale continue de leurs molécules, qui constitue

essentiellement ce que nous nommons la *vie*, envisagée de la manière la plus générale, dans l'ensemble des êtres qui nous la manifestent. En effet, un caractère éminemment propre aux phénomènes physiologiques, et que leur étude plus exacte rend maintenant plus sensible de jour en jour, c'est l'extrême instabilité numérique qu'ils présentent, sous quelque aspect qu'on les examine, et que nous verrons plus tard, quand l'ordre naturel des matières nous y conduira, être une conséquence nécessaire de la définition même des corps vivans. Quant à présent, il suffit de noter cette observation incontestable, vérifiée par tous les faits, que chaque propriété quelconque d'un corps organisé, soit géométrique, soit mécanique, soit chimique, soit vitale, est assujétie, dans sa quantité, à d'immenses variations numériques tout-à-fait irrégulières, qui se succèdent aux intervalles les plus rapprochés sous l'influence d'une foule de circonstances, tant extérieures qu'intérieures, variables elles-mêmes; en sorte que toute idée de nombres fixes, et, par suite, de lois mathématiques que nous puissions espérer d'obtenir, implique réellement contradiction avec la nature spéciale de cette classe de phénomènes. Ainsi, quand on veut évaluer avec précision, même uniquement les qualités les plus simples d'un être vivant, par exemple sa densité moyenne, ou celle de l'une

de ses principales parties constituantes, sa température, la vitesse de sa circulation intérieure, la proportion des élémens immédiats qui composent ses solides ou ses fluides, la quantité d'oxygène qu'il consomme en un temps donné, la masse de ses absorptions ou de ses exhalations continues, etc., et, à plus forte raison, l'énergie de ses forces musculaires, l'intensité de ses impressions, etc., il ne faut pas seulement, ce qui est évident, faire, pour chacun de ces résultats, autant d'observations qu'il y a d'espèces ou de races et de variétés dans chaque espèce; on doit encore mesurer le changement très-considérable qu'éprouve cette quantité en passant d'un individu à un autre, et, quant au même individu, suivant son âge, son état de santé ou de maladie, sa disposition intérieure, les circonstances de tout genre incessamment mobiles sous l'influence desquelles il se trouve placé, telles que la constitution atmosphérique, etc. Que peuvent donc signifier ces prétendues évaluations numériques si soigneusement enregistrées pour les divers phénomènes physiologiques ou même pathologiques, et déduites, dans le cas le plus favorable, d'une seule mesure réelle, lorsqu'il en faudrait une multitude? Elles ne peuvent qu'induire en erreur sur la vraie marche des phénomènes, et ne doivent être appliquées

rationnellement que comme un moyen, pour ainsi dire mnémonique, de fixer les idées. Dans tous les cas, il y a évidemment impossibilité totale d'obtenir jamais de véritables lois mathématiques. Il en est encore plus fortement de même pour les phénomènes sociaux, qui offrent une complication encore supérieure, et, par suite, une variabilité plus grande, comme nous l'établirons spécialement dans le quatrième volume de ce cours.

Ce n'est pas néanmoins qu'on doive cesser, d'après cela, de concevoir, en thèse philosophique générale, les phénomènes de tous les ordres comme nécessairement soumis par eux-mêmes à des lois mathématiques, que nous sommes seulement condamnés à ignorer toujours dans la plupart des cas, à cause de la trop grande complication des phénomènes. Il n'y a en effet aucune raison de penser que, sous ce rapport, les phénomènes les plus complexes des corps vivans soient essentiellement d'une autre nature spéciale que les phénomènes les plus simples des corps bruts. Car, s'il était possible d'isoler rigoureusement chacune des causes simples qui concourent à produire un même phénomène physiologique, tout porte à croire qu'elle se montrerait douée, dans des circonstances déterminées, d'un genre d'influence et d'une quantité d'action aussi exactement fixes que nous le voyons dans la gravitation

universelle, véritable type des lois fondamentales de la nature. Ce qui engendre la variabilité irrégulière des effets, c'est le grand nombre d'agens divers déterminant à la fois un même phénomène, et d'où il résulte que, dans les phénomènes très-compiqués, il n'y a peut-être pas deux cas rigoureusement semblables. Nous n'avons pas besoin, pour trouver une telle difficulté, d'aller jusqu'aux phénomènes des corps vivans. Elle se présente déjà dans ceux des corps bruts, quand nous considérons les cas les plus complexes; par exemple, en étudiant les phénomènes météorologiques. On ne peut douter que chacun des nombreux agens qui concourent à la production de ces phénomènes ne soit soumis séparément à des lois mathématiques, quoique nous ignorions encore la plupart d'entr'elles; mais leur multiplicité rend les effets observés aussi irrégulièrement variables que si chaque cause n'était assujétie à aucune condition précise.

La considération précédente conduit à apercevoir un second motif distinct en vertu duquel il nous est nécessairement interdit, vu la faiblesse de notre intelligence, de faire rentrer l'étude des phénomènes les plus compliqués dans le domaine des applications de l'analyse mathématique. En effet, indépendamment de ce que, dans les phénomènes les plus spéciaux, les résultats effectifs sont tellement variables que nous ne

pouvons pas même y saisir des valeurs fixes, il suit de la complication des cas, que, quand même nous pourrions connaître un jour la loi mathématique à laquelle est soumis chaque agent pris à part, la combinaison d'un aussi grand nombre de conditions rendrait le problème mathématique correspondant tellement supérieur à nos faibles moyens, que la question resterait le plus souvent insoluble. Ce n'est donc pas ainsi qu'on peut faire une étude réelle et féconde de la majeure partie des phénomènes naturels.

Pour apprécier aussi exactement que possible cette difficulté, considérons à quel point se compliquent les questions mathématiques, même relativement aux phénomènes les plus simples des corps bruts, quand on veut rapprocher suffisamment l'état abstrait de l'état concret, en ayant égard à toutes les conditions principales qui peuvent exercer sur l'effet produit, une influence véritable. On sait, par exemple, que le phénomène très-simple de l'écoulement d'un fluide, en vertu de sa seule pesanteur, par un orifice donné, n'a pas jusqu'à présent de solution mathématique complète, quand on veut tenir compte de toutes les circonstances essentielles. Il en est encore ainsi, même pour le mouvement encore plus simple d'un projectile solide dans un milieu résistant.

Pourquoi l'analyse mathématique a-t-elle pu

s'adapter, avec un succès si admirable, à l'étude approfondie des phénomènes célestes ? Parce qu'ils sont, malgré les apparences vulgaires, beaucoup plus simples que tous les autres. Le problème le plus compliqué qu'ils présentent, celui de la modification que produit, dans le mouvement de deux corps tendant l'un vers l'autre en vertu de leur gravitation, l'influence d'un troisième corps agissant sur tous deux de la même manière, est bien moins composé que le problème terrestre le plus simple. Et, néanmoins, il offre déjà une telle difficulté, que nous n'en possédons encore que des solutions approximatives. Il est même aisé de voir, en examinant ce sujet plus profondément, que la haute perfection à laquelle a pu s'élever l'astronomie solaire par l'emploi de la science mathématique est encore essentiellement due à ce que nous avons profité avec adresse de toutes les facilités particulières, et, pour ainsi dire, accidentelles, qu'offrirait pour la solution des problèmes la constitution spéciale, très-favorable sous ce rapport, de notre système planétaire. En effet, les planètes dont il se compose sont assez peu nombreuses, mais surtout elles sont, en général, de masses fort inégales et bien moindres que celle du soleil, et de plus fort éloignées les unes des autres; elles ont des formes presque sphériques; leurs orbites sont presque circulaires,

et présentent de faibles inclinaisons mutuelles, etc. Il résulte de cet ensemble de circonstances que les perturbations sont le plus souvent peu considérables, et que pour les calculer il suffit ordinairement de tenir compte, concurremment avec l'action du soleil sur chaque planète en particulier, de l'influence d'une seule autre planète, susceptible, par sa grosseur et sa proximité, de déterminer des dérangemens sensibles. Mais si, au lieu d'un tel état de choses, notre système solaire eût été composé d'un plus grand nombre de planètes concentrées dans un moindre espace, et à peu près égales en masse; si leurs orbites avaient offert des inclinaisons fort différentes, et des excentricités considérables; si ces corps eussent été d'une forme plus compliquée, par exemple, des ellipsoïdes très-excentriques, etc.; il est certain qu'en supposant la même loi réelle de gravitation, nous ne serions pas encore parvenus à soumettre l'étude des phénomènes célestes à notre analyse mathématique, et probablement nous n'eussions pas même pu démêler jusqu'à présent la loi principale.

Ces conditions hypothétiques se trouveraient précisément réalisées au plus haut degré dans les phénomènes chimiques, si on voulait les calculer d'après la théorie de la gravitation générale.

En pesant convenablement les diverses consi-

dérations qui précèdent, on sera convaincu, je crois, qu'en réduisant aux diverses parties de la physique inorganique l'extension future des grandes applications réellement possibles de l'analyse mathématique, j'ai bien plutôt exagéré que rétréci l'étendue de son domaine effectif. Autant il importait de rendre sensible la rigoureuse universalité logique de la science mathématique, autant je devais signaler les conditions qui limitent pour nous son extension réelle, afin de ne pas contribuer à écarter l'esprit humain de la véritable direction scientifique dans l'étude des phénomènes les plus compliqués, par la recherche chimérique d'une perfection impossible.

Ainsi, tout en s'efforçant d'agrandir autant qu'on le pourra le domaine réel des mathématiques, on doit reconnaître que les sciences les plus difficiles sont destinées, par leur nature, à rester indéfiniment dans cet état préliminaire qui prépare pour les autres l'époque où elles deviennent accessibles aux théories mathématiques. Nous devons, pour les phénomènes les plus compliqués, nous contenter d'analyser avec exactitude les circonstances de leur production, de les rattacher les uns aux autres d'une manière générale, de connaître le genre d'influence qu'exerce chaque agent principal, etc.; mais sans les étudier sous le point de vue de la quantité, et par

conséquent sans espoir d'introduire, dans les sciences correspondantes, ce haut degré de perfection que procure, quant aux phénomènes les plus simples, un usage convenable de la mathématique, soit sous le rapport de la précision de nos connaissances, soit, ce qui est peut-être encore plus remarquable, sous le rapport de leur coordination.

C'est par les mathématiques que la philosophie positive a commencé à se former : c'est d'elles que nous vient la *méthode*. Il était donc naturellement inévitable que, lorsque la même manière de procéder a dû s'étendre à chacune des autres sciences fondamentales, on s'efforçât d'y introduire l'esprit mathématique à un plus haut degré que ne le comportaient les phénomènes correspondans; ce qui a donné lieu ensuite à des travaux d'épuration plus ou moins étendus, comme ceux de Berthollet sur la chimie, pour se dégager de cette influence exagérée. Mais chaque science, en se développant, a fait subir à la méthode positive générale des modifications déterminées par les phénomènes qui lui sont propres, d'où résulte son génie spécial; c'est seulement alors qu'elle a pris son véritable caractère définitif, qui ne doit jamais être confondu avec celui d'aucune autre science fondamentale.

Ayant exposé, dans cette leçon, le but essen-



tiel et la composition principale de la science mathématique, ainsi que ses relations générales avec l'ensemble de la philosophie naturelle, son caractère philosophique se trouve déterminé, autant qu'il puisse l'être par un tel aperçu. Nous devons passer maintenant à l'examen spécial de chacune des trois grandes sciences dont elle est composée, le calcul, la géométrie et la mécanique.

### QUATRIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de l'Analyse mathématique.

Dans le développement historique de la science mathématique depuis Descartes, les progrès de la partie abstraite ont presque toujours été déterminés par ceux de la partie concrète. Mais il n'en est pas moins nécessaire, pour concevoir la science d'une manière vraiment rationnelle, de considérer le calcul dans toutes ses branches principales avant de procéder à l'étude philosophique de la géométrie et de la mécanique. Les théories analytiques, plus simples et plus générales que celles de la mathématique concrète, en sont, par elles-mêmes, essentiellement indépendantes; tandis que celles-ci ont, au contraire, de leur nature, un besoin continu des premières, sans le secours desquelles elles ne pourraient faire presque aucun