tiel et la composition principale de la science mathématique, ainsi que ses relations générales avec l'ensemble de la philosophie naturelle, son caractère philosophique se trouve déterminé, autant qu'il puisse l'être par un tel aperçu. Nous devons passer maintenant à l'examen spécial de chacune des trois grandes sciences dont elle est composée, le calcul, la géométrie et la mécanique.

QUATRIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de l'Analyse mathématique.

Dans le développement historique de la science mathématique depuis Descartes, les progrès de la partie abstraite ont presque toujours été déterminés par ceux de la partie concrète. Mais il n'en est pas moins nécessaire, pour concevoir la science d'une manière vraiment rationnelle, de considérer le calcul dans toutes ses branches principales avant de procéder à l'étude philosophique de la géométrie et de la mécanique. Les théories analytiques, plus simples et plus générales que celles de la mathématique concrète, en sont, par elles-mêmes, essentiellement indépendantes; tandis que celles-ci ont, au contraire, de leur nature, un besoin continuel des premières, sans le secours desquelles elles ne pourraient faire presque aucun progrès. Quoique les principales conceptions de l'analyse conservent encore aujourd'hui quelques traces très-sensibles de leur origine géométrique ou mécanique, elles sont maintenant néanmoins essentiellement dégagées de ce caractère primitif, qui ne se manifeste plus guère que pour quelques points secondaires; en sorte que, depuis les travaux de Lagrange surtout, il est possible, dans une exposition dogmatique, de les présenter d'une manière purement abstraite, en un système unique et continu. C'est ce que je vais entreprendre dans cette leçon et dans les cinq suivantes, en me bornant, comme il convient à la nature de ce cours, aux considérations les plus générales sur chaque branche principale de la science du calcul.

Le but définitif de nos recherches dans la mathématique concrète étant la découverte des *équations*, qui expriment les lois mathématiques des phénomènes considérés, et ces *équations* constituant le véritable point de départ du calcul, dont l'objet est d'en déduire la détermination des quantités les unes par les autres, je crois indispensable, avant d'aller plus loin, d'approfondir, plus qu'on n'a coutume de le faire, cette idée fondamentale d'*équation*, sujet continuel, soit comme terme, soit comme origine, de tous les travaux mathématiques. Outre l'avantage de mieux circonscrire le véritable champ de l'analyse, il en

résultera nécessairement cette importante conséquence, de tracer d'une manière plus exacte la ligne réelle de démarcation entre la partie concrète et la partie abstraite des mathématiques, ce qui complétera l'exposition générale de la division fondamentale établie dans la leçon précédente.

On se forme ordinairement une idée beaucoup trop vague de ce que c'est qu'une *équation*, lorsqu'on donne ce nom à toute espèce de relation d'égalité entre deux fonctions *quelconques* des grandeurs que l'on considère. Car, si toute équation est évidemment une relation d'égalité, il s'en faut de beaucoup que, réciproquement, toute relation d'égalité soit une véritable *équation*, du genre de celles auxquelles, par leur nature, les méthodes analytiques sont applicables.

Ce défaut de précision dans la considération logique d'une notion aussi fondamentale en mathématiques, entraîne le grave inconvénient de rendre à peu près inexplicable, en thèse générale, la difficulté immense et capitale que nous éprouvons à établir la relation du concret à l'abstrait, et qu'on fait communément ressortir avec tant de raison pour chaque grande question mathématique prise à part. Si le sens du mot *équation* était vraiment aussi étendu qu'on le suppose habituellement en le définissant, on ne voit point, en effet, de quelle grande difficulté pourrait être réellement, en général, l'établissement des équations d'un problème quelconque. Car tout paraîtrait consister ainsi en une simple question de forme, qui ne devrait pas même exiger jamais de grands efforts intellectuels, attendu que nous ne pouvons guère concevoir de relation précise qui ne soit pas immédiatement une certaine relation d'égalité, ou qui n'y puisse être promptement ramenée par quelques transformations très-faciles.

Ainsi, en admettant, en général, dans la définition des *équations*, toute espèce de *fonctions*, on ne rend nullement raison de l'extrême difficulté qu'on éprouve le plus souvent à mettre un problème en équation, et qui est si fréquemment comparable aux efforts qu'exige l'élaboration analytique de l'équation une fois obtenue. En un mot, l'idée abstraite et générale qu'on donne de l'*équation* ne correspond aucunement au sens réel que les géomètres attachent à cette expression dans le développement effectif de la science. Il y a là un vice logique, un défaut de co-relation qu'il importe beaucoup de rectifier.

Pour y parvenir, je distingue d'abord deux sortes de *fonctions* : les fonctions *abstraites*, analytiques, et les fonctions *concrètes*. Les premières peuvent seules entrer dans les véritables *équations*, en sorte qu'on pourra désormais définir, d'une manière exacte et suffisamment approfondie, toute *équation* : une relation d'égalité entre deux fonctions *abstraites* des grandeurs considérées. Afin de n'avoir plus à revenir sur cette définition fondamentale, je dois ajouter ici, comme un complément indispensable sans lequel l'idée ne serait point assez générale, que ces fonctions abstraites peuvent se rapporter non-seulement aux grandeurs que le problème présente en effet de lui-même, mais aussi à toutes les autres grandeurs auxiliaires qui s'y rattachent, et qu'on pourra souvent introduire, simplement par artifice mathématique, dans la seule vue de faciliter la découverte des équations des phénomènes. Je ne fais ici, dans cette explication, qu'emprunter sommairement, par anticipation, le résultat d'une discussion générale de la plus haute importance, qui se trouvera à la fin de cette leçon. Revenons maintenant à la distinction essentielle des fonctions en abstraites et concrètes.

Cette distinction peut être établie par deux voies essentiellement différentes, complémentaires l'une de l'autre ; *à priori*, et *à posteriori* : c'est-à-dire, en caractérisant d'une manière générale la nature propre de chaque espèce de fonctions, et ensuite en faisant, ce qui est possible, l'énumération effective de toutes les fonctions abstraites aujourd'hui connues, du moins quant aux élémens dont elles se composent.

A priori, les fonctions que j'appelle *abstraites* sont celles qui expriment entre des grandeurs un mode de dépendance qu'on peut concevoir uniquement entre nombres, sans qu'il soit besoin d'indiquer aucun phénomène quelconque où il se trouve réalisé. Je nomme, au contraire, fonctions *concrètes* celles pour lesquelles le mode de dépendance exprimé ne peut être défini ni conçu qu'en assignant un cas physique déterminé, géométrique, mécanique, ou de tout autre nature, dans lequel il ait effectivement lieu.

La plupart des fonctions, à leur origine, celles mêmes qui sont aujourd'hui le plus purement *abstraites*, ont commencé par être *concrètes*; en sorte qu'il est aisé de faire comprendre la distinction précédente, en se bornant à citer les divers points de vue successifs sous lesquels, à mesure que la science s'est formée, les géomètres ont considéré les fonctions analytiques les plus simples. J'indiquerai pour exemple les puissances, devenues en général fonctions abstraites, depuis seulement les travaux de Viète et de Descartes. Ces fonctions x^2, x^3, qui, dans notre analyse actuelle, sont si bien conçues comme simplement *abstraites*, n'étaient, pour les géomètres de l'antiquité, que des fonctions entièrement *concrètes*, exprimant la relation de la superficie d'un carré ou du volume d'un cube à la longueur de leur côté. Elles avaient si exclusivement à leurs yeux un tel caractère, que c'est seulement d'après leur définition géométrique qu'ils avaient découvert les propriétés algébriques élémentaires de ces fonctions, relativement à la décomposition de la variable en deux parties, propriétés qui n'étaient, à cette époque, que de vrais théorèmes de géométrie, auxquels on n'a attaché que beaucoup plus tard un sens numérique.

J'aurai encore occasion de citer tout à l'heure, pour un autre motif, un nouvel exemple très-propre à faire bien sentir la distinction fondamentale que je viens d'exposer; c'est celui des fonctions circulaires, soit directes, soit inverses, qui sont encore aujourd'hui tantôt concrètes, tantôt abstraites, selon le point de vue sous lequel on les envisage.

Considérant maintenant, *à posteriori*, cette division des fonctions, après avoir établi le caractère général qui rend une fonction abstraite ou concrète, la question de savoir si telle fonction déterminée est véritablement abstraite, et par-là susceptible d'entrer dans de vraies équations analytiques, va devenir une simple question de fait, puisque nous allons énumérer toutes les fonctions de cette espèce.

Au premier abord, cette énumération semble impossible, les fonctions analytiques distinctes étant évidemment en nombre infini. Mais, en les partageant en *simples* et *composées*, la difficulté disparaît. Car, si le nombre des diverses fonctions considérées dans l'analyse mathématique est réellement infini, elles sont, au contraire, même aujourd'hui, composées d'un fort petit nombre de fonctions élémentaires, qu'on peut aisément assigner, et qui suffisent évidemment pour décider du caractère abstrait ou concret de telle fonction déterminée, qui sera de l'une ou de l'autre nature, selon qu'elle se composera exclusivement de ces fonctions abstraites simples, ou qu'elle en comprendra d'autres. Voici le tableau de ces élémens fondamentaux de toutes nos combinaisons analytiques, dans l'état présent de la science. On ne doit, évidemment, considérer, à cet effet, que les fonctions d'une seule variable; celles relatives à plusieurs variables indépendantes étant constamment, par leur nature, plus ou moins *composées*.

Soit x la variable indépendante, y la variable corelative qui en dépend. Les différens modes simples de dépendance abstraite que nous pouvons maintenant concevoir entre y et x, sont exprimés par les dix formules élémentaires suivantes, dans lesquelles chaque fonction est accouplée avec son *inverse*, c'est-à-dire, avec celle qui aurait lieu,

d'après la fonction *directe*, si on y rapportait x à y, au lieu de rapporter y à x :

1er couple $\begin{cases} 1^\circ\ y=a+x \ldots \\ 2^\circ\ y=a-x \ldots \end{cases}$ fonction *somme*, / fonction *différence*,

2me couple $\begin{cases} 1^\circ\ y=ax \ldots \\ 2^\circ\ y=\dfrac{a}{x} \ldots \end{cases}$ fonction *produit*, / fonction *quotient*,

3me couple $\begin{cases} 1^\circ\ y=x^a \ldots \\ 2^\circ\ y=\sqrt[a]{x} \ldots \end{cases}$ fonction *puissance*, / fonction *racine*,

4me couple $\begin{cases} 1^\circ\ y=a^x \ldots \\ 2^\circ\ y=l_a x \ldots \end{cases}$ fonction *exponentielle*, / fonction *logarithmique*,

5me couple (1) $\begin{cases} 1^\circ\ y=\sin x \ldots \\ 2^\circ\ y=\mathrm{arc}(\sin=x) \end{cases}$ fonction *circulaire directe*, / fonction *circulaire inverse*.

Tels sont les élémens très-peu nombreux qui composent directement toutes les fonctions ab-

(1) Dans la vue d'augmenter autant que possible les ressources et l'étendue si insuffisantes de l'analyse mathématique, les géomètres comptent ce dernier couple de fonctions parmi les élémens analytiques. Quoique cette inscription soit strictement légitime, il importe de remarquer que les fonctions circulaires ne sont pas exactement dans le même cas que les autres fonctions abstraites élémentaires. Il y a entr'elles cette différence fort essentielle, que les fonctions des quatre premiers couples sont vraiment à la fois simples et abstraites, tandis que les fonctions circulaires, qui peuvent manifester successivement l'un et l'autre ca-

straites aujourd'hui connues. Quelque peu multipliés qu'ils soient, il suffisent évidemment pour donner lieu à un nombre tout-à-fait infini de combinaisons analytiques.

Aucune considération rationnelle ne circonscrit rigoureusement *à priori* le tableau précédent, qui n'est que l'expression effective de l'état actuel de la science. Nos élémens analytiques sont au-

ractère suivant le point de vue sous lequel on les envisage et la manière dont elles sont employées, ne présentent jamais simultanément ces deux propriétés.

La fonction sin. x est introduite dans l'analyse comme une nouvelle fonction simple, quand on la conçoit seulement comme indiquant la relation géométrique dont elle dérive; mais alors elle n'est évidemment qu'une fonction *concrète*. Dans d'autres circonstances, elle remplit analytiquement les conditions d'une véritable fonction *abstraite*, lorsqu'on ne considère sin. x que comme l'expression abrégée de la formule $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ ou de la série équivalente; mais sous ce dernier point de vue, ce n'est plus réellement une nouvelle fonction analytique, puisqu'elle ne se présente que comme un composé des précédentes.

Néanmoins, les fonctions circulaires ont quelques qualités spéciales qui permettent de les maintenir au tableau des élémens rationnels de l'analyse mathématique.

1° Elles sont susceptibles d'évaluation, quoique conservant leur caractère concret; ce qui autorise à les introduire dans les équations, tant qu'elles ne portent que sur des données, sans qu'il soit nécessaire d'avoir égard à leur expression algébrique.

2° On sait effectuer sur les différentes fonctions circulaires, comparées entr'elles seulement, une certaine suite de transfor-

jourd'hui plus nombreux qu'ils ne l'étaient pour Descartes, et même pour Newton et Leïbnitz; il y a tout au plus un siècle que les deux derniers couples ont été introduits dans l'analyse par les travaux de Jean Bernouilli et d'Euler. Sans doute on en admettra de nouveaux dans la suite; mais, comme je l'indiquerai à la fin de cette leçon, nous ne pouvons pas espérer qu'ils soient jamais fort

mations, qui n'exigent pas davantage la connaissance de leur définition analytique. Il en résulte évidemment la faculté d'introduire ces fonctions dans les équations, même par rapport aux inconnues, pourvu qu'il n'y entre pas concurremment des fonctions non-trigonométriques des mêmes variables.

C'est donc uniquement dans les cas où les fonctions circulaires, relativement aux inconnues, sont combinées dans les équations avec des fonctions abstraites d'une autre espèce, qu'il est indispensable d'avoir égard à leur interprétation algébrique pour pouvoir résoudre les équations, et dès lors elles cessent, en effet, d'être traitées comme de nouvelles fonctions simples. Mais alors même, pourvu qu'on tienne compte de cette interprétation, leur admission n'empêche point les relations d'avoir le caractère de véritables *équations* analytiques, ce qui est ici le but essentiel de notre énumération des fonctions abstraites élémentaires.

Il est à remarquer, d'après les considérations indiquées dans cette note, que plusieurs autres fonctions concrètes peuvent être utilement introduites au nombre des élémens analytiques, si les conditions principales posées ci-dessus pour les fonctions circulaires ont été préalablement bien remplies. C'est ainsi, par exemple, que les travaux de M. Legendre, et récemment ceux de M. Jacobi, sur les fonctions *elliptiques*, ont vraiment agrandi le champ de l'analyse; il en est de même pour quelques intégrales définies obtenues par M. Fourier, dans la théorie de la chaleur.

multipliés, leur augmentation réelle donnant lieu à de très-grandes difficultés.

Nous pouvons donc maintenant nous former une idée positive, et néanmoins suffisamment étendue, de ce que les géomètres entendent par une véritable *équation*. Cette explication est éminemment propre à nous faire comprendre combien il doit être difficile d'établir réellement les *équations* des phénomènes, puisqu'on n'y est effectivement parvenu que lorsqu'on a pu concevoir les lois mathématiques de ces phénomènes à l'aide de fonctions entièrement composées des seuls élémens analytiques que je viens d'énumérer. Il est clair, en effet, que c'est uniquement alors que le problème devient vraiment *abstrait*, et se réduit à une pure question de nombres, ces fonctions étant les seules relations simples que nous sachions concevoir entre les nombres, considérés en eux-mêmes. Jusqu'à cette époque de la solution, quelles que soient les apparences, la question est encore essentiellement concrète, et ne rentre pas dans le domaine du *calcul*. Or, la difficulté fondamentale de ce passage du *concret* à l'*abstrait* consiste surtout, en général, dans l'insuffisance de ce très-petit nombre d'élémens analytiques que nous possédons, et d'après lesquels néanmoins, malgré le peu de variété réelle qu'ils nous offrent, il faut parvenir à se représenter toutes

les relations précises que peuvent nous manifester tous les différens phénomènes naturels. Vu l'infinie diversité qui doit nécessairement exister à cet égard dans le monde extérieur, on comprend sans peine combien nos conceptions doivent se trouver fréquemment au-dessous de la véritable difficulté; surtout si l'on ajoute que, ces élémens de notre analyse nous ayant été fournis primitivement par la considération mathématique des phénomènes les plus simples, puisqu'ils ont tous, directement ou indirectement, une origine géométrique, nous n'avons *à priori* aucune garantie rationnelle de leur aptitude nécessaire à représenter les lois mathématiques de toute autre classe de phénomènes. J'exposerai tout à l'heure l'artifice général, si profondément ingénieux, par lequel l'esprit humain est parvenu à diminuer singulièrement cette difficulté fondamentale que présente la relation du concret à l'abstrait en mathématiques, sans cependant qu'il ait été nécessaire de multiplier le nombre de ces élémens analytiques.

Les explications précédentes déterminent avec précision le véritable objet et le champ réel de la mathématique abstraite; je dois passer maintenant à l'examen de ses divisions principales, car nous avons toujours jusqu'ici considéré le *calcul* dans son ensemble total.

La première considération directe à présenter sur la composition de la science du *calcul*, consiste à la diviser d'abord en deux branches principales, auxquelles, faute de dénominations plus convenables, je donnerai les noms de *calcul algébrique* ou *algèbre*, et de *calcul arithmétique* ou *arithmétique*, mais en avertissant de prendre ces deux expressions dans leur acception logique la plus étendue, au lieu du sens beaucoup trop restreint qu'on leur attache ordinairement.

La solution complète de toute question de *calcul*, depuis la plus élémentaire jusqu'à la plus transcendante, se compose nécessairement de deux parties successives dont la nature est essentiellement distincte. Dans la première, on a pour objet de transformer les équations proposées, de façon à mettre en évidence le mode de formation des quantités inconnues par les quantités connues; c'est ce qui constitue la question *algébrique*. Dans la seconde, on a en vue d'*évaluer* les *formules* ainsi obtenues, c'est-à-dire, de déterminer immédiatement la valeur des nombres cherchés, représentés déjà par certaines fonctions explicites des nombres donnés; telle est la question *arithmétique* (1). On voit que, dans toute

(1) Supposons, par exemple, qu'une question fournisse entre une grandeur inconnue x et deux grandeurs connues a et b l'équation :

$$x^3+3ax=2b$$

comme il arriverait pour la trisection d'un angle. On voit, de suite, que la dépendance entre x d'une part, et a, b de l'autre, est complétement déterminée; mais, tant que l'équation conserve sa forme primitive, on n'aperçoit nullement de quelle manière l'inconnue dérive des données. C'est cependant ce qu'il faut découvrir avant de penser à l'évaluer. Tel est l'objet de la partie algébrique de la solution. Lorsque, par une suite de tranformations qui ont successivement rendu cette dérivation de plus en plus sensible, on est arrivé à présenter l'équation proposée sous la forme

$$x=\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}}+\sqrt[3]{b-\sqrt{b^2+a^3}}$$

le rôle de l'algèbre est terminé; et, quand même on ne saurait point effectuer les opérations arithmétiques indiquées par cette formule, on en n'aurait pas moins obtenu une connaissance très-réelle et souvent fort importante. Le rôle de l'arithmétique consistera maintenant, en partant de cette formule, à faire trouver le nombre x quand les valeurs des nombres a et b auront été fixées.

solution vraiment rationnelle, elle suit nécessairement la question algébrique, dont elle forme le complément indispensable, puisqu'il faut évidemment connaître la génération des nombres cherchés avant de déterminer leurs valeurs effectives pour chaque cas particulier. Ainsi, le terme de la partie algébrique devient le point de départ de la partie arithmétique.

Le calcul *algébrique* et le calcul *arithmétique* diffèrent donc essentiellement par le but qu'on s'y propose. Ils ne diffèrent pas moins par le point de vue sous lequel on y considère les quantités, envisagées, dans le premier, quant à leurs relations, et, dans le second, quant à leurs valeurs. Le véritable esprit du *calcul*, en général, exige que cette distinction soit maintenue avec la plus sévère exactitude, et que la ligne de démarcation entre les deux époques de la solution soit rendue aussi nettement tranchée que le permet la question proposée. L'observation attentive de ce précepte, trop méconnu, peut être d'un utile secours dans chaque question particulière, en dirigeant les efforts de notre esprit, à un instant quelconque de la solution, vers la véritable difficulté correspondante. A la vérité, l'imperfection de la science du calcul oblige souvent, comme je l'expliquerai dans la leçon suivante, à mêler très-fréquemment les considérations algébriques et les considérations arithmétiques pour la solution d'une même question. Mais, quoiqu'il soit impossible alors de partager l'ensemble du travail en deux parties nettement tranchées, l'une purement algébrique, et l'autre purement arithmétique, on pourra toujours éviter, à l'aide des indications précédentes, de confondre les deux ordres de considérations, quelque intime que puisse être jamais leur mélange.

En cherchant à résumer le plus succinctement possible la distinction que je viens d'établir, on voit que l'*algèbre* peut se définir, en général, comme ayant pour objet la *résolution* des *équations*, ce qui, quoique paraissant d'abord trop

restreint, est néanmoins suffisamment étendu, pourvu qu'on prenne ces expressions dans toute leur acception logique, qui signifie transformer des fonctions *implicites* en fonctions *explicites* équivalentes : de même, l'*arithmétique* peut être définie comme destinée à l'*évaluation* des fonctions. Ainsi, en contractant les expressions au plus haut degré, je crois pouvoir donner nettement une juste idée de cette division, en disant, comme je le ferai désormais pour éviter les périphrases explicatives, que l'*algèbre* est le *calcul des fonctions*, et l'*arithmétique* le *calcul des valeurs*.

Il est aisé de comprendre par-là combien les définitions ordinaires sont insuffisantes et même vicieuses. Le plus souvent, l'importance exagérée accordée aux signes a conduit à distinguer ces deux branches fondamentales de la science du calcul par la manière de désigner dans chacune les sujets du raisonnement, ce qui est évidemment absurde en principe et faux en fait. Même la célèbre définition donnée par Newton, lorsqu'il a caractérisé l'*algèbre* comme l'*arithmétique universelle*, donne certainement une très-fausse idée de la nature de l'algèbre et de celle de l'arithmétique (1).

(1) J'ai cru devoir signaler spécialement cette définition, parce qu'elle sert de base à l'opinion que beaucoup de bons esprits, étrangers à la science mathématique, se forment de la partie abstraite

Après avoir établi la division fondamentale du *calcul* en deux branches principales, je dois comparer, en général, l'étendue, l'importance et la difficulté de ces deux sortes de calcul, afin de n'avoir plus à considérer que le *calcul des fonctions*, qui doit être le sujet essentiel de notre étude.

Le *calcul des valeurs*, ou l'*arithmétique*, paraît, au premier abord, devoir présenter un champ aussi vaste que celui de l'*algèbre*, puisqu'il semble devoir donner lieu à autant de questions distinctes qu'on peut concevoir de formules algébriques différentes à évaluer. Mais une réflexion fort simple suffit pour montrer que le domaine du calcul des valeurs est, par sa nature, infiniment moins étendu que celui du calcul des fonctions. Car, en distinguant les fonctions en *simples* et *composées*, il est évident que lorsqu'on sait *évaluer* les fonctions simples, la considération des fonctions composées ne présente plus, sous ce rapport, aucune difficulté. Sous le point de vue algébrique, une fonction composée joue un rôle très-différent de celui des fonctions élémentaires qui la constituent, et c'est de là précisément que naissent toutes les principales difficultés analytiques. Mais il en est

de cette science, sans considérer qu'à l'époque où cet aperçu a été formé, l'analyse mathématique n'était point assez développée pour que le caractère général propre à chacune de ses parties principales pût être convenablement saisi, ce qui explique pourquoi Newton a pu proposer alors une définition qu'il rejetterait certainement aujourd'hui.

tout autrement pour le calcul arithmétique. Ainsi, le nombre des opérations arithmétiques, vraiment distinctes, est seulement marqué par celui des fonctions abstraites élémentaires, dont j'ai présenté ci-dessus le tableau très-peu étendu. L'évaluation de ces dix fonctions donne nécessairement celle de toutes les fonctions, en nombre infini, que l'on considère dans l'ensemble de l'analyse mathématique, telle, du moins, qu'elle existe aujourd'hui. A quelques formules que puisse conduire l'élaboration des équations, il n'y aurait lieu à de nouvelles opérations arithmétiques que si l'on en venait à créer de véritables nouveaux élémens analytiques, dont le nombre sera toujours, quoi qu'il arrive, extrêmement petit. Le champ de l'*arithmétique* est donc, par sa nature, infiniment restreint, tandis que celui de l'*algèbre* est rigoureusement indéfini.

Il importe cependant de remarquer que le domaine du *calcul des valeurs* est, en réalité, beaucoup plus étendu qu'on ne se le représente communément. Car plusieurs questions, véritablement *arithmétiques*, puisqu'elles consistent dans des *évaluations*, ne sont point ordinairement classées comme telles, parce qu'on a l'habitude de ne les traiter que comme incidentes, au milieu d'un ensemble de recherches analytiques plus ou moins élevées : la trop haute opinion qu'on se forme communément de l'influence des signes est encore la cause principale de cette confusion d'idées. Ainsi, non-seulement la construction d'une table de logarithmes, mais aussi le calcul des tables trigonométriques, sont de véritables opérations arithmétiques d'un genre supérieur. On peut citer encore comme étant dans le même cas, quoique dans un ordre très-distinct et plus élevé, tous les procédés par lesquels on détermine directement la valeur d'une fonction quelconque pour chaque système particulier de valeurs attribuées aux quantités dont elle dépend, lorsqu'on ne peut point parvenir à connaître généralement la forme explicite de cette fonction. Sous ce point de vue, la résolution *numérique* des équations qu'on ne sait pas résoudre *algébriquement*, et de même le calcul des intégrales définies dont on ignore les intégrales générales, font réellement partie, malgré les apparences, du domaine de l'*arithmétique*, dans lequel il faut nécessairement comprendre tout ce qui a pour objet l'*évaluation* des fonctions. Les considérations relatives à ce but, sont en effet, constamment homogènes, de quelques *évaluations* qu'il s'agisse, et toujours bien distinctes des considérations vraiment *algébriques*.

Pour achever de se former une juste idée de l'étendue réelle du calcul des valeurs, on doit y comprendre aussi cette partie de la science générale du calcul qui porte aujourd'hui spécialement le nom de *théorie des nombres*, et qui est encore si peu avancée. Cette branche, fort étendue par sa nature, mais dont l'importance dans le système général de la science n'est pas très-grande, a pour objet de découvrir les propriétés inhérentes aux différens nombres en vertu de leurs valeurs et indépendamment de toute numération particulière. Elle constitue donc une sorte d'*arithmétique transcendante*; c'est à elle que conviendrait effectivement la définition proposée par Newton pour l'*algèbre*.

Le domaine total de l'*arithmétique* est donc, en réalité, beaucoup plus étendu qu'on ne le conçoit ordinairement. Mais, néanmoins, quelque développement légitime qu'on puisse lui accorder, il demeure certain que, dans l'ensemble de la mathématique abstraite, le *calcul des valeurs* ne sera jamais qu'un point, pour ainsi dire, en comparaison du *calcul des fonctions*, dans lequel la science consiste essentiellement. Cette appréciation va devenir encore plus sensible par quelques considérations qui me restent à indiquer sur la véritable nature des questions arithmétiques en général, quand on les examine d'une manière approfondie.

En cherchant à déterminer avec exactitude en quoi consistent proprement les *évaluations*, on reconnaît aisément qu'elles ne sont pas autre chose que de véritables *transformations* des fonctions à évaluer, transformations qui, malgré leur but spécial, n'en sont pas moins essentiellement de la même nature que toutes celles enseignées par l'analyse. Sous ce point de vue, le *calcul des valeurs* pourrait être conçu simplement comme un appendice et une application particulière du *calcul des fonctions*, de telle sorte que l'*arithmétique* disparaîtrait, pour ainsi dire, dans l'ensemble de la mathématique abstraite, comme section distincte.

Pour bien comprendre cette considération, il faut observer que, lorsque l'on propose d'*évaluer* un nombre inconnu dont le mode de formation est donné, il est, par le seul énoncé même de la question arithmétique, déjà défini et exprimé sous une certaine forme; et qu'en l'*évaluant*, on ne fait que mettre son expression sous une autre forme déterminée, à laquelle on est habitué à rapporter la notion exacte de chaque nombre particulier, en le faisant rentrer dans le système régulier de la *numération*. L'*évaluation* consiste si bien dans une simple *transformation*, que lorsque l'expression primitive du nombre se trouve elle-même conforme à la numération régulière, il n'y a plus, à proprement parler, d'*évaluation*, ou plutôt on répond à la question par la question même. Qu'on demande, par exemple, d'ajouter les deux nombres trente et

sept, on répondra en se bornant à répéter l'énoncé même de la question, et on croira néanmoins avoir *évalué* la somme, ce qui signifie que, dans ce cas, la première expression de la fonction n'a pas besoin d'être transformée; tandis qu'il n'en serait point ainsi pour ajouter vingt-trois et quatorze, car alors la somme ne serait pas immédiatement exprimée d'une manière conforme au rang qu'elle occupe dans l'échelle fixe et générale de la numération.

En précisant, autant que possible, la considération précédente, on peut dire qu'*évaluer* un nombre n'est autre chose que mettre son expression primitive sous la forme

$$a+b\beta+c\beta^2+d\beta^3+e\beta^4 \ldots\ldots +p\beta^m$$

β étant ordinairement égal à 10; et les coefficiens a, b, c, d, etc. étant assujétis à ces conditions d'être nombres entiers moindres que β, pouvant devenir nuls, mais jamais négatifs. Ainsi, toute question arithmétique est susceptible d'être posée comme consistant à mettre sous une telle forme une fonction abstraite quelconque de diverses quantités que l'on suppose avoir déjà elles-mêmes une forme semblable. On pourrait donc ne voir dans les différentes opérations de l'arithmétique que de simples cas particuliers de certaines transformations algébriques, sauf les difficultés spéciales tenant aux conditions relatives à l'état des coefficiens.

Il résulte clairement, de ce qui précède, que la mathématique abstraite se compose essentiellement du *calcul des fonctions*, qui en était évidemment déjà la partie la plus importante, la plus étendue, et la plus difficile. Tel sera donc désormais le sujet exclusif de nos considérations analytiques. Ainsi, sans m'arrêter davantage au *calcul des valeurs*, je vais passer immédiatement à l'examen de la division fondamentale du *calcul des fonctions*.

Nous avons déterminé, au commencement de cette leçon, en quoi consiste proprement la véritable difficulté qu'on éprouve à mettre en *équation* les questions mathématiques. C'est essentiellement à cause de l'insuffisance du très-petit nombre d'élémens analytiques que nous possédons, que la relation du concret à l'abstrait est ordinairement si difficile à établir. Essayons maintenant d'apprécier philosophiquement le procédé général par lequel l'esprit humain est parvenu, dans un si grand nombre de cas importans, à surmonter cet obstacle fondamental.

En considérant directement l'ensemble de cette question capitale, on est naturellement conduit à concevoir d'abord un premier moyen pour faciliter l'établissement des équations des phénomènes. Puisque le principal obstacle à ce sujet

vient du trop petit nombre de nos élémens analytiques, tout semblerait se réduire à en créer de nouveaux. Mais ce parti, quelque naturel qu'il paraisse, est véritablement illusoire, quand on l'examine d'une manière approfondie. Quoiqu'il puisse certainement être utile, il est aisé de se convaincre de son insuffisance nécessaire.

En effet, la création d'une véritable nouvelle fonction abstraite élémentaire présente, par elle-même, les plus grandes difficultés. Il y a même, dans une telle idée, quelque chose qui semble contradictoire. Car un nouvel élément analytique ne remplirait pas évidemment les conditions essentielles qui lui sont propres, si on ne pouvait immédiatement l'*évaluer* : or, d'un autre côté, comment *évaluer* une nouvelle fonction qui serait vraiment *simple*, c'est-à-dire, qui ne rentrerait pas dans une combinaison de celles déjà connues? Cela paraît presque impossible. L'introduction, dans l'analyse, d'une autre fonction abstraite élémentaire, ou plutôt d'un autre couple de fonctions (car chacune serait toujours accompagnée de son *inverse*), suppose donc nécessairement la création simultanée d'une nouvelle opération arithmétique, ce qui est certainement fort difficile.

Si nous cherchons à nous faire une idée des moyens que l'esprit humain pourrait employer pour inventer de nouveaux élémens analytiques, par l'examen des procédés à l'aide desquels il a effectivement conçu ceux que nous possédons, l'observation nous laisse à cet égard dans une entière incertitude, car les artifices dont il s'est déjà servi pour cela sont évidemment épuisés. Afin de nous en convaincre, considérons le dernier couple de fonctions simples qui ait été introduit dans l'analyse, et à la formation duquel nous avons pour ainsi dire assisté, savoir le quatrième couple, car, comme je l'ai expliqué, le cinquième couple ne constitue pas, à proprement parler, de véritables nouveaux élémens analytiques. La fonction a^x, et, par suite, son inverse, ont été formées en concevant sous un nouveau point de vue une fonction déjà connue depuis long-temps, les puissances, lorsque la notion en a été suffisamment généralisée. Il a suffi de considérer une puissance relativement à la variation de l'exposant, au lieu de penser à la variation de la base, pour qu'il en résultât une fonction simple vraiment nouvelle, la variation suivant alors une marche toute différente. Mais cet artifice, aussi simple qu'ingénieux, ne peut plus rien fournir. Car, en retournant, de la même manière, tous nos élémens analytiques actuels, on n'aboutit qu'à les faire rentrer les uns dans les autres.

Nous ne concevons donc nullement de quelle manière on pourrait procéder à la création de

nouvelles fonctions abstraites élémentaires, remplissant convenablement toutes les conditions nécessaires. Ce n'est pas à dire, néanmoins, que nous ayons atteint aujourd'hui la limite effective posée à cet égard par les bornes de notre intelligence. Il est même certain que les derniers perfectionnemens spéciaux de l'analyse mathématique ont contribué à étendre nos ressources sous ce rapport, en introduisant dans le domaine du calcul certaines intégrales définies, qui, à quelques égards, tiennent lieu de nouvelles fonctions simples, quoiqu'elles soient loin de remplir toutes les conditions convenables, ce qui m'a empêché de les inscrire au tableau des vrais élémens analytiques. Mais, tout bien considéré, je crois qu'il demeure incontestable que le nombre de ces élémens ne peut s'accroître qu'avec une extrême lenteur. Ainsi, ce ne peut être dans un tel procédé que l'esprit humain ait puisé ses ressources les plus puissantes pour faciliter autant que possible l'établissement des équations.

Ce premier moyen étant écarté, il n'en reste évidemment qu'un seul; c'est, vu l'impossibilité de trouver directement les équations entre les quantités que l'on considère, d'en chercher de correspondantes entre d'autres quantités auxiliaires, liées aux premières suivant une certaine loi déterminée, et de la relation desquelles on remonte ensuite à celle des grandeurs primitives.

Telle est, en effet, la conception, éminemment féconde, que l'esprit humain est parvenu à fonder, et qui constitue son plus admirable instrument pour l'exploration mathématique des phénomènes naturels, *l'analyse* dite *transcendante*.

En thèse philosophique générale, les quantités auxiliaires que l'on introduit, au lieu des grandeurs primitives ou concurremment avec elles, pour faciliter l'établissement des équations, pourraient dériver suivant une loi quelconque des élémens immédiats de la question, Ainsi, cette conception a beaucoup plus de portée que ne lui en ont supposé communément, même les plus profonds géomètres. Il importe extrêmement de se la représenter dans toute son étendue logique; car c'est peut-être en établissant un mode général de *dérivation* autre que celui auquel on s'est constamment borné jusqu'ici, bien qu'il ne soit pas, évidemment, le seul possible, qu'on parviendra un jour à perfectionner essentiellement l'ensemble de l'analyse mathématique, et par suite à fonder, pour l'investigation des lois de la nature, des moyens encore plus puissans que nos procédés actuels, susceptibles, sans doute, d'épuisement.

Mais, pour n'avoir égard qu'à la constitution présente de la science, les seules quantités auxiliaires introduites habituellement à la

place des quantités primitives dans l'*analyse transcendante*, sont ce qu'on appelle les élémens *infiniment petits*, les *différentielles* de divers ordres de ces quantités, si l'on conçoit cette analyse à la manière de Leïbnitz; ou les *fluxions*, les *limites* des rapports des accroissemens simultanés des quantités primitives comparées les unes aux autres, ou, plus brièvement, les *premières* et *dernières raisons* de ces accroissemens, en adoptant la conception de Newton; ou bien, enfin, les *dérivées* proprement dites de ces quantités, c'est-à-dire, les coefficiens des différens termes de leurs accroissemens respectifs, d'après la conception de Lagrange. Ces trois manières principales d'envisager notre analyse transcendante actuelle, et toutes les autres moins distinctement tranchées que l'on a proposées successivement, sont, par leur nature, nécessairement identiques, soit dans le calcul, soit dans l'application, ainsi que je l'expliquerai d'une manière générale dans la sixième leçon. Quant à leur valeur relative, nous verrons alors que la conception de Leïbnitz a jusqu'ici, dans l'usage, une supériorité incontestable, mais que son caractère logique est éminemment vicieux; tandis que la conception de Lagrange, admirable par sa simplicité, par sa perfection logique, par l'unité philosophique qu'elle a établie dans l'ensemble de l'analyse mathématique, jusqu'alors partagée en deux mondes presque indépendans, présente encore, dans les applications, de graves inconvéniens, en ralentissant la marche de l'intelligence: la conception de Newton tient à peu près le milieu sous ces divers rapports, étant moins rapide, mais plus rationnelle que celle de Leïbnitz, moins philosophique, mais plus applicable que celle de Lagrange.

Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer avec exactitude comment la considération de ce genre de quantités auxiliaires introduites dans les équations à la place des grandeurs primitives facilite réellement l'expression analytique des lois des phénomènes. La sixième leçon sera spécialement consacrée à cet important sujet, envisagé sous les différens points de vue généraux auxquels a donné lieu l'analyse transcendante. Je me borne en ce moment à considérer cette conception de la manière la plus générale, afin d'en déduire la division fondamentale du *calcul des fonctions* en deux calculs essentiellement distincts, dont l'enchaînement, pour la solution complète d'une même question mathématique, est invariablement déterminé.

Sous ce rapport, et dans l'ordre rationnel des idées, l'analyse transcendante se présente comme étant nécessairement la première, puisqu'elle a pour but général de faciliter l'établissement des équations, ce qui doit évidemment précéder la

résolution proprement dite de ces équations, qui est l'objet de l'analyse ordinaire. Mais, quoiqu'il importe éminemment de concevoir ainsi le véritable enchaînement de ces deux analyses, il n'en est pas moins convenable, conformément à l'usage constant, de n'étudier l'analyse transcendante qu'après l'analyse ordinaire; car, si, au fond, elle en est par elle-même logiquement indépendante, ou que, du moins, il soit possible aujourd'hui de l'en dégager essentiellement, il est clair que son emploi dans la solution des questions ayant toujours plus ou moins besoin d'être complété par celui de l'analyse ordinaire, on serait contraint de laisser les questions en suspens, si celle-ci n'avait été étudiée préalablement.

En résultat de ce qui précède, le *calcul des fonctions*, ou l'*algèbre*, en prenant ce mot dans sa plus grande extension, se compose de deux branches fondamentales distinctes, dont l'une a pour objet immédiat la *résolution* des équations, lorsque celles-ci sont immédiatement établies entre les grandeurs mêmes que l'on considère; et dont l'autre, partant d'équations, beaucoup plus aisées à former en général, entre des quantités indirectement liées à celles du problème, a pour destination propre et constante d'en déduire, par des procédés analytiques invariables, les équations correspondantes entre les grandeurs directes que l'on considère, ce qui fait rentrer la question dans le domaine du calcul précédent. Le premier calcul porte, le plus souvent, le nom d'*analyse ordinaire*, ou d'*algèbre* proprement dite ; le second constitue ce qu'on appelle l'*analyse transcendante*, qui a été désignée par les diverses dénominations de *calcul infinitésimal*, *calcul des fluxions et des fluentes*, *calcul des évanouissans*, etc., selon le point de vue sous lequel on l'a conçue. Pour écarter toute considération étrangère, je proposerai de la nommer *calcul des fonctions indirectes*, en donnant à l'analyse ordinaire le titre de *calcul des fonctions directes*. Ces expressions, que je forme essentiellement en généralisant et en précisant les idées de Lagrange, sont destinées à indiquer simplement avec exactitude le véritable caractère général propre à chacune des deux analyses.

Ayant établi la division fondamentale de l'analyse mathématique, je dois maintenant considérer séparément l'ensemble de chacune de ses deux parties, en commençant par le *calcul des fonctions directes*, et réservant ensuite des développemens plus étendus aux diverses branches du *calcul des fonctions indirectes*.

CINQUIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations générales sur le calcul des fonctions directes.

D'après l'explication générale qui termine la leçon précédente, le *calcul des fonctions directes*, ou l'*algèbre* proprement dite, suffit entièrement à la solution des questions mathématiques, quand elles sont assez simples pour qu'on puisse former immédiatement les équations entre les grandeurs mêmes que l'on considère, sans qu'il soit nécessaire d'introduire à leur place ou conjointement avec elles aucun système de quantités auxiliaires *dérivées* des premières. A la vérité, dans le plus grand nombre des cas importans, son emploi a besoin d'être précédé et préparé par celui du *calcul des fonctions indirectes*, destiné à faciliter l'établissement des équations. Mais quoique le rôle de l'algèbre ne soit alors que secondaire, elle n'en a pas moins toujours une part nécessaire