domaine du calcul précédent. Le premier calcul porte, le plus souvent, le nom d'*analyse ordinaire*, ou d'*algèbre* proprement dite ; le second constitue ce qu'on appelle l'*analyse transcendante*, qui a été désignée par les diverses dénominations de *calcul infinitésimal*, *calcul des fluxions et des fluentes*, *calcul des évanouissans*, etc., selon le point de vue sous lequel on l'a conçue. Pour écarter toute considération étrangère, je proposerai de la nommer *calcul des fonctions indirectes*, en donnant à l'analyse ordinaire le titre de *calcul des fonctions directes*. Ces expressions, que je forme essentiellement en généralisant et en précisant les idées de Lagrange, sont destinées à indiquer simplement avec exactitude le véritable caractère général propre à chacune des deux analyses.

Ayant établi la division fondamentale de l'analyse mathématique, je dois maintenant considérer séparément l'ensemble de chacune de ses deux parties, en commençant par le *calcul des fonctions directes*, et réservant ensuite des développemens plus étendus aux diverses branches du *calcul des fonctions indirectes*.

CINQUIÈME LEÇON.

Sommaire. Considérations générales sur le calcul des fonctions directes.

D'après l'explication générale qui termine la leçon précédente, le *calcul des fonctions directes*, ou l'*algèbre* proprement dite, suffit entièrement à la solution des questions mathématiques, quand elles sont assez simples pour qu'on puisse former immédiatement les équations entre les grandeurs mêmes que l'on considère, sans qu'il soit nécessaire d'introduire à leur place ou conjointement avec elles aucun système de quantités auxiliaires *dérivées* des premières. A la vérité, dans le plus grand nombre des cas importans, son emploi a besoin d'être précédé et préparé par celui du *calcul des fonctions indirectes*, destiné à faciliter l'établissement des équations. Mais quoique le rôle de l'algèbre ne soit alors que secondaire, elle n'en a pas moins toujours une part nécessaire dans la solution complète de la question, en sorte que le *calcul des fonctions directes* doit continuer à être, par sa nature, la base fondamentale de toute l'analyse mathématique. Nous devons donc, avant d'aller plus loin, considérer, d'une manière générale, la composition rationnelle de ce calcul, et le degré de développement auquel il est parvenu aujourd'hui.

L'objet définitif de ce calcul étant la *résolution* proprement dite des *équations*, c'est-à-dire, la découverte du mode de formation des quantités inconnues par les quantités connues d'après les *équations* qui existent entre elles; il présente naturellement autant de parties différentes que l'on peut concevoir de classes d'équations vraiment distinctes; et par conséquent, son étendue propre est rigoureusement indéfinie, le nombre des fonctions analytiques susceptibles d'entrer dans les équations, étant par lui-même tout-à-fait illimité, bien qu'elles ne soient composées que d'un très-petit nombre d'élémens primitifs.

La classification rationnelle des équations, doit être évidemment déterminée par la nature des élémens analytiques dont se composent leurs membres; toute autre classification serait essentiellement arbitraire. Sous ce rapport, les analystes divisent d'abord les équations à une ou à plusieurs variables en deux classes principales,

selon qu'elles ne contiennent que des fonctions des trois premiers couples (*voy.* le tableau, 4e. leçon, page 173), ou qu'elles renferment aussi des fonctions, soit exponentielles, soit circulaires. Les dénominations de fonctions *algébriques* et fonctions *transcendantes*, données communément à ces deux groupes principaux d'élémens analytiques, sont, sans doute, fort peu convenables. Mais la division universellement établie entre les équations correspondantes, n'en est pas moins très-réelle, en ce sens que la résolution des équations contenant les fonctions dites *transcendantes*, présente nécessairement plus de difficultés que celles des équations dites *algébriques*. Aussi l'étude des premières est-elle jusqu'ici excessivement imparfaite, à tel point que souvent la résolution des plus simples d'entre elles, nous est encore inconnue (1); c'est sur l'élaboration des secondes que portent presqu'exclusivement nos méthodes analytiques.

Ne considérant maintenant que ces équations *algébriques*, il faut observer d'abord que, quoiqu'elles puissent souvent contenir des fonctions *irrationnelles* des inconnues aussi bien que des

(1) Quelque simple que puisse paraître, par exemple, l'équation

$$a^x + b^x = c^x,$$

on ne sait point encore la *résoudre*; ce qui peut donner une idée de l'extrême imperfection de cette partie de l'algèbre.

fonctions *rationnelles*; on peut toujours, par des transformations plus ou moins faciles, faire rentrer le premier cas dans le second; en sorte que c'est de ce dernier que les analystes ont dû s'occuper uniquement, pour résoudre toutes les équations *algébriques*.

Dans l'enfance de l'algèbre, ces équations avaient été classées d'après le nombre de leurs termes. Mais cette classification était évidemment vicieuse; comme séparant des cas réellement semblables, et en réunissant d'autres qui n'avaient rien de commun qu'un caractère sans aucune importance véritable (1). Elle n'a été maintenue que pour les équations à deux termes, susceptibles, en effet, d'une résolution commune qui leur est propre.

La classification des équations, d'après ce qu'on appelle leurs *degrés*, universellement admise depuis long-temps par les analystes, est, au contraire, éminemment naturelle, et mérite d'être signalée ici. Car, en ne comparant, dans chaque *degré*, que les équations qui se correspondent, quant à leur complication relative, on peut dire que cette distinction détermine rigoureusement la difficulté plus ou moins grande de leur *résolution*. Cette gradation est sensible effectivement,

(1) On a commis plus tard la même erreur momentanée dans les premiers temps du calcul infinitésimal, pour l'intégration des équations différentielles.

pour toutes les équations que l'on fait résoudre. Mais on peut s'en rendre compte d'une manière générale, indépendamment du fait de la résolution. Il suffit, pour cela, de considérer que l'équation la plus générale de chaque degré comprend nécessairement toutes celles des divers degrés inférieurs, en sorte qu'il en doit être ainsi de la formule qui détermine l'inconnue. En conséquence, quelque faible qu'on pût supposer *à priori* la difficulté propre au *degré* que l'on considère, comme elle se complique inévitablement, dans l'exécution, de celles que présentent tous les *degrés* précédens, la résolution offre donc réellement plus d'obstacles à mesure que le degré de l'équation s'élève.

Cet accroissement de difficulté est tel, que jusqu'ici la résolution des équations algébriques ne nous est connue que dans les quatre premiers degrés seulement. A cet égard, l'algèbre n'a pas fait de progrès considérables depuis les travaux de Descartes, et des analystes italiens du seizième siècle, quoique, dans les deux derniers siècles, il n'ait peut-être pas existé un seul géomètre qui ne se soit occupé de pousser plus avant la résolution des équations. L'équation générale du cinquième degré elle-même, a jusqu'ici résisté à toutes les tentatives.

La complication toujours croissante que doivent nécessairement présenter les formules pour résoudre les équations à mesure que le degré augmente, l'extrême embarras qu'occasione déjà l'usage de la formule du quatrième degré, et qui le rend presqu'inapplicable, ont déterminé les analystes à renoncer, par un accord tacite, à poursuivre de semblables recherches, quoiqu'ils soient loin de regarder comme impossible d'obtenir jamais la résolution des équations du cinquième degré, et de plusieurs autres degrés supérieurs. La seule question de ce genre, qui offrirait vraiment une grande importance, du moins sous le rapport logique, ce serait la résolution générale des équations algébriques d'un degré quelconque. Or, plus on médite sur ce sujet, plus on est conduit à penser, avec Lagrange, qu'il surpasse réellement la portée effective de notre intelligence. Il faut d'ailleurs observer que la formule qui exprimerait la *racine* d'une équation du degré m devrait nécessairement renfermer des radicaux de l'ordre m (ou des fonctions d'une multiplicité équivalente), à cause des m déterminations quelle doit comporter. Puisque nous avons vu, de plus, qu'elle doit aussi embrasser, comme cas particulier, celle qui correspond à tout autre degré inférieur, il s'ensuit qu'elle contiendrait, en outre, inévitablement, des radicaux de l'ordre $m-1$, d'autres de l'ordre

$m-2$, etc., de telle manière que, s'il était possible de la découvrir, elle offrirait presque toujours une trop grande complication pour pouvoir être utilement employée, à moins qu'on ne parvînt à la simplifier, en lui conservant cependant toute la généralité convenable, par l'introduction d'un nouveau genre d'élémens analytiques, dont nous n'avons encore aucune idée. Il y a donc lieu de croire que, sans avoir déjà atteint sous ce rapport les bornes imposées par la faible portée de notre intelligence, nous ne tarderions pas à les rencontrer en prolongeant avec une activité forte et soutenue cette série de recherches.

Il importe d'ailleurs d'observer que, même en supposant obtenue la résolution des équations *algébriques* d'un degré quelconque, on n'aurait encore traité qu'une très-petite partie de l'*algèbre* proprement dite, c'est-à-dire, du calcul des fonctions directes, embrassant la résolution de toutes les équations que peuvent former les fonctions analytiques aujourd'hui connues. Enfin, pour achever d'éclaircir la considération philosophique de ce sujet, il faut reconnaître que, par une loi irrécusable de la nature humaine, nos moyens pour concevoir de nouvelles questions étant beaucoup plus puissans que nos ressources pour les résoudre, ou, en d'autres termes, l'esprit humain étant bien plus apte à imaginer qu'à raisonner, nous resterons nécessairement toujours au-dessous de la difficulté, à quelque degré de développement que parviennent jamais nos travaux intellectuels. Ainsi, quand même on découvrirait un jour la résolution complète de toutes les équations analytiques actuellement connues, ce qui, à l'examen, doit être jugé tout-à-fait chimérique, il n'est pas douteux qu'avant d'atteindre à ce but, et probablement même comme moyen subsidiaire, on aurait déjà surmonté la difficulté bien moindre, quoique très-grande cependant, de concevoir de nouveaux élémens analytiques, dont l'introduction donnerait lieu à des classes d'équations que nous ignorons complétement aujourd'hui; en sorte qu'une pareille imperfection relative de la science algébrique se reproduirait encore, malgré l'accroissement réel, très-important d'ailleurs, de la masse absolue de nos connaissances.

Dans l'état présent de l'algèbre, la résolution complète des équations des quatre premiers degrés, des équations binomes quelconques, de certaines équations spéciales des degrés supérieurs, et d'un très-petit nombre d'équations exponentielles, logarithmiques, ou circulaires, constituent donc les méthodes fondamentales que présente le calcul des fonctions directes pour la solution des problèmes mathématiques. Mais, avec des élémens aussi bornés, les géomètres n'en sont

pas moins parvenus à traiter, d'une manière vraiment admirable, un très-grand nombre de questions importantes, comme nous le reconnaîtrons successivement dans la suite de ce volume. Les perfectionnemens généraux introduits depuis un siècle dans le système total de l'analyse mathématique ont eu pour caractère principal d'utiliser à un degré immense ce peu de connaissances acquises sur le calcul des fonctions directes, au lieu de tendre à les augmenter. Ce résultat a été obtenu à un tel point, que le plus souvent ce calcul n'a de rôle effectif dans la solution complète des diverses questions que par ses parties les plus simples, celles qui se rapportent aux équations des deux premiers degrés, à une seule ou à plusieurs variables.

L'extrême imperfection de l'algèbre, relativement à la résolution des équations, a déterminé les analystes à s'occuper d'une nouvelle classe de questions, dont il importe de marquer ici le véritable caractère. Quand ils ont cru devoir renoncer à poursuivre plus long-temps la résolution des équations algébriques des degrés supérieurs au quatrième, ils se sont occupés de suppléer, autant que possible, à cette immense lacune, par ce qu'ils ont nommé la *résolution numérique* des équations. Ne pouvant obtenir, dans la plupart des cas, la *formule* qui exprime qu'elle fonction explicite l'inconnue est des données, on a cherché, à défaut de cette résolution, la seule réellement *algébrique*, à déterminer, du moins, indépendamment de cette formule, la *valeur* de chaque inconnue pour tel ou tel système désigné de valeurs particulières attribuées aux données. Par les travaux successifs des analystes, cette opération incomplète et bâtarde, qui présente un mélange intime des questions vraiment algébriques avec des questions purement arithmétiques, a pu, du moins, être entièrement effectuée dans tous les cas, pour des équations d'un degré et même d'une forme quelconques. Sous ce rapport, les méthodes qu'on possède aujourd'hui sont suffisamment générales, quoique les calculs auxquels elles conduisent soient souvent presque inexécutables, à cause de leur complication. Il ne reste donc plus, à cet égard, qu'à simplifier assez les procédés pour qu'ils deviennent régulièrement applicables, ce qu'on peut espérer d'obtenir dans la suite. D'après cet état du calcul des fonctions directes, on s'efforce ensuite, dans l'application de ce calcul, de disposer, autant que possible, les questions proposées de façon à n'exiger finalement que cette résolution *numérique* des équations.

Quelque précieuse que soit évidemment une telle ressource, à défaut de la véritable solution, il est essentiel de ne pas méconnaître le vrai carac-

tère de ces procédés, que les analystes regardent avec raison comme une algèbre fort imparfaite. En effet, il s'en faut de beaucoup que nous puissions toujours réduire nos questions mathématiques à ne dépendre, en dernière analyse, que de la résolution *numérique* des équations. Cela ne se peut que pour les questions tout-à-fait isolées, ou vraiment finales, c'est-à-dire, pour le plus petit nombre. La plupart des questions ne sont, en effet, que préparatoires, et destinées à servir de préliminaire indispensable à la solution d'autres questions. Or, pour un tel but, il est évident que ce n'est pas la *valeur* effective de l'inconnue qu'il importe de découvrir, mais la *formule* qui montre comment elle dérive des autres quantités considérées. C'est ce qui arrive, par exemple, dans un cas très-étendu, toutes les fois qu'une question déterminée renferme simultanément plusieurs inconnues. Il s'agit alors, comme on sait, d'en faire, avant tout, la séparation. En employant convenablement, à cet effet, le procédé simple et général heureusement imaginé par les analystes, et qui consiste à rapporter l'une des inconnues à toutes les autres, la difficulté disparaîtrait constamment, si l'on savait toujours résoudre algébriquement les équations considérées, sans que la résolution *numérique* puisse être alors d'aucune utilité. C'est uniquement faute de connaître la résolution *algébrique* des équations à une seule inconnue, qu'on est obligé de traiter l'*élimination* comme une question distincte, qui forme une des plus grandes difficultés spéciales de l'algèbre ordinaire. Quelque pénibles que soient les méthodes à l'aide desquelles on surmonte cette difficulté, elles ne sont pas même applicables d'une manière entièrement générale, à l'élimination d'une inconnue entre deux équations de forme quelconque.

Dans les questions les plus simples, et lorsqu'on n'a véritablement à résoudre qu'une seule équation à une seule inconnue, cette résolution *numérique* n'en est pas moins un procédé très-imparfait, même quand elle est strictement suffisante. Elle présente, en effet, ce grave inconvénient d'obliger à refaire toute la suite des opérations pour le plus léger changement qui peut survenir dans une seule des quantités considérées, quoique leur relation reste toujours la même, sans que les calculs faits pour un cas puissent dispenser en aucune manière de ceux qui concernent un autre cas très-peu différent, faute d'avoir pu abstraire et traiter distinctement cette partie purement algébrique de la question qui est commune à tous les cas résultant de la simple variation des nombres donnés.

D'après les considérations précédentes, le calcul des fonctions directes, envisagé dans son état actuel, se divise donc naturellement en deux parties fort distinctes, suivant qu'on traite de la résolution *algébrique* des équations ou de leur résolution *numérique*. La première partie, la seule vraiment satisfaisante, est malheureusement fort peu étendue, et restera vraisemblablement toujours très-bornée; la seconde, le plus souvent insuffisante, a du moins l'avantage d'une généralité beaucoup plus grande. La nécessité de distinguer nettement ces deux parties est évidente, à cause du but essentiellement différent qu'on se propose dans chacune, et par suite, du point de vue propre sous lequel on y considère les quantités. De plus, si on les envisage relativement aux diverses méthodes dont chacune est composée, on trouve dans leur distribution rationnelle une marche toute différente. En effet, la première partie doit se diviser d'après la nature des équations que l'on sait résoudre, et indépendamment de toute considération relative aux *valeurs* des inconnues. Dans la seconde partie, au contraire, ce n'est pas suivant les *degrés* des équations que les procédés se distinguent naturellement, puisqu'ils sont applicables à des équations d'un degré quelconque; c'est selon l'espèce numérique des *valeurs* des inconnues. Car, pour calculer directement ces nombres sans les déduire des formules qui en feraient connaître les expressions, le moyen ne saurait évidemment être le même, quand les nombres ne sont susceptibles d'être évalués que par une suite d'approximations toujours incomplète, que lorsqu'on peut les obtenir exactement. Cette distinction si importante, dans la résolution numérique des équations, des racines incommensurables, et des racines commensurables, qui exigent des principes tout-à-fait différens pour leur détermination, est entièrement insignifiante dans la résolution algébrique, où la nature *rationnelle* ou *irrationnelle* des nombres obtenus est un simple accident du calcul, qui ne peut exercer aucune influence sur les procédés employés. C'est, en un mot, une simple considération arithmétique. On en peut dire autant, quoique à un moindre degré, de la distinction des racines commensurables elles-mêmes en entières et fractionnaires. Enfin, il en est aussi de même, à plus forte raison, pour la classification la plus générale des racines, en *réelles* et *imaginaires*. Toutes ces diverses considérations, qui sont prépondérantes quant à la résolution numérique des équations, et qui n'ont aucune importance dans la résolution algébrique, rendent de plus en plus sensible la nature essentiellement distincte de ces deux parties principales de l'algèbre proprement dite.

Ces deux parties, qui constituent l'objet immédiat du calcul des fonctions directes, sont dominées par une troisième purement spéculative, à laquelle l'une et l'autre empruntent leurs ressources les plus puissantes, et qui a été très-exactement désignée par le nom général de *théorie des équations*, quoique cependant elle ne porte encore que sur les équations dites *algébriques*. La résolution numérique des équations, à cause de sa généralité, exige spécialement cette base rationnelle.

Cette dernière branche si importante de l'algèbre se divise naturellement en deux ordres de questions, d'abord celles qui se rapportent à la composition des équations, et ensuite celles qui concernent leur transformation ; ces dernières ayant pour objet de modifier les racines d'une équation sans les connaître, suivant une loi quelconque donnée, pourvu que cette loi soit uniforme relativement à toutes ces racines (1).

(1) Je crois devoir, au sujet de la théorie des équations, signaler ici une lacune de quelque importance. Le principe fondamental sur lequel elle repose, et qui est si fréquemment appliqué dans toute l'analyse mathématique, la décomposition des fonctions algébriques, rationnelles, et entières, d'un degré quelconque, en facteurs du premier degré, n'est jamais employé que pour les fonctions d'une seule variable, sans que personne ait examiné si on doit l'étendre aux fonctions de plusieurs variables, ce que néanmoins on ne devrait pas laisser incertain.

Pour compléter cette rapide énumération générale des diverses parties essentielles du calcul des fonctions directes, je dois enfin mentionner expressément une des théories les plus fécondes et les plus importantes de l'algèbre proprement

Quant aux fonctions de deux ou de trois variables, les considérations géométriques décident clairement, quoique d'une manière indirecte, que leur décomposition en facteurs est ordinairement impossible; car il en résulterait que chaque classe correspondante d'équations ne pourrait représenter une ligne ou une surface *sui generis*, et que son lieu géométrique rentrerait toujours dans le système de ceux appartenant à des équations de degré inférieur, de telle sorte que, de proche en proche, toute équation ne produirait jamais que des lignes droites ou des plans. Mais, précisément à cause de cette interprétation concrète, ce théorème, quoique purement négatif, me semble avoir une si grande importance pour la géométrie analytique, que je m'étonne qu'on n'ait pas cherché à établir directement une différence aussi caractéristique entre les fonctions à une seule variable et celles à plusieurs variables. Je vais rapporter ici sommairement la démonstration abstraite et générale que j'en ai trouvée, quoiqu'elle fût plus convenablement placée dans un traité spécial.

1° Si $f(x,y)$ pouvait se décomposer en facteurs du premier degré, on les obtiendrait en résolvant l'équation $f(x,y)=o$. Or, d'après les considérations indiquées dans le texte, cette équation, résolue par rapport à x, fournirait des formules qui contiendraient nécessairement divers radicaux, dans lesquels entrerait y. Les fonctions de y, renfermées sous chaque radical, ne sauraient évidemment être en général des puissances parfaites. Or, il faudrait qu'elles le devinssent pour que les facteurs élémentaires correspondans de $f(x,y)$, et qui sont déjà du premier degré en x, fussent aussi du premier degré, ou même simplement rationnels, relativement à y. Cela ne pourra donc avoir lieu que dans certains cas particuliers, lorsque les coefficiens

dite, celle relative à la transformation des fonctions en séries à l'aide de ce qu'on appelle la méthode des coefficiens indéterminés. Cette méthode, si éminemment analytique, et qui doit être regardée comme une des découvertes les plus re-

rempliront les conditions plus ou moins nombreuses, mais constamment déterminées, qu'exige la disparition des radicaux. Le même raisonnement s'appliquerait évidemment, à bien plus forte raison, aux fonctions de trois, quatre, etc. variables.

2° Une autre démonstration, de nature très-différente, se tire de la mesure du degré de généralité des fonctions à plusieurs variables, lequel s'estime par le nombre de constantes arbitraires entrant dans leur expression la plus complète et la plus simple. Je me bornerai à l'indiquer pour les fonctions de deux variables; il serait aisé de l'étendre à celles qui en contiennent davantage.

On sait que le nombre de constantes arbitraires contenues dans la formule générale d'une fonction du degré m à deux variables, est $\frac{m(m+3)}{2}$. Or, si une telle fonction pouvait seulement se décomposer en deux facteurs, l'un du degré n, et l'autre du degré $m-n$, le produit renfermerait un nombre de constantes arbitraires égal à

$$\frac{n(n+3)}{2}+\frac{(m-n)(m-n+3)}{2}.$$

Ce nombre étant, comme il est aisé de le voir, inférieur au précédent de $n(m-n)$, il en résulte qu'un tel produit, ayant moins de généralité que la fonction primitive, ne peut la représenter constamment. On voit même qu'une telle comparaison exigerait $n(m-n)$ relations spéciales entre les coefficiens de cette fonction, qu'on trouverait aisément en développant l'identité.

Ce nouveau genre de démonstration, fondé sur une considération ordinairement négligée, pourrait probablement être employé avec avantage dans plusieurs autres circonstances.

marquables de Descartes, a sans doute perdu de son importance depuis l'invention et le développement du calcul infinitésimal, dont elle pouvait tenir lieu si heureusement sous quelques rapports particuliers. Mais l'extension croissante de l'analyse transcendante, quoique ayant rendu cette méthode bien moins nécessaire, en a, d'un autre côté, multiplié les applications et agrandi les ressources; en sorte que par l'utile combinaison qui s'est finalement opérée entre les deux théories, l'usage de la méthode des coefficiens indéterminés est devenu aujourd'hui beaucoup plus étendu qu'il ne l'était même avant la formation du calcul des fonctions indirectes.

Après avoir esquissé le tableau général de l'algèbre proprement dite, il me reste maintenant à présenter quelques considérations sur divers points principaux du calcul des fonctions directes, dont les notions peuvent être utilement éclaircies par un examen philosophique.

Les difficultés relatives à plusieurs symboles singuliers auxquels conduisent les calculs algébriques et notamment aux expressions dites *imaginaires*, ont été, ce me semble, beaucoup exagérées par suite des considérations purement méthaphysiques qu'on s'est efforcé d'y introduire, au lieu d'envisager ces résultats anormaux sous leur vrai point de vue, comme de simples faits

analytiques. En les concevant ainsi, il est aisé de reconnaître, en thèse générale, que l'esprit de l'analyse mathématique consistant à considérer les grandeurs sous le seul point de vue de leurs relations, et indépendamment de toute idée de valeur déterminée, il en résulte nécessairement pour les analystes l'obligation constante d'admettre indifféremment toutes les sortes d'expressions quelconques que pourront engendrer les combinaisons algébriques. S'ils voulaient s'en interdire une seule, à raison de sa singularité apparente, comme elle est toujours susceptible de se présenter d'après certaines suppositions particulières sur les valeurs des quantités considérées, ils seraient contraints d'altérer la généralité de leurs conceptions, et en introduisant ainsi, dans chaque raisonnement, une suite de distinctions vraiment étrangères, ils feraient perdre à l'analyse mathématique, son principal avantage caractéristique, la simplicité et l'uniformité des idées qu'elle combine. L'embarras que l'intelligence éprouve ordinairement au sujet de ces expressions singulières, me paraît provenir essentiellement de la confusion vicieuse qu'elle fait à son insçu entre l'idée de *fonction* et l'idée de *valeur*, ou, ce qui revient au même, entre le point de vue *algébrique*, et le point de vue *arithmétique*. Si la nature de cet ouvrage me permettait de présenter à cet égard les développemens suffisans, il me serait, je crois, facile, par un usage convenable des considérations indiquées dans cette leçon et dans les deux précédentes, de dissiper les nuages dont une fausse manière de voir entoure habituellement ces diverses notions. Le résultat de cet examen démontrerait expressément que l'analyse mathématique est, par sa nature, beaucoup plus claire, sous les différens rapports dont je viens de parler, que ne le croient communément les géomètres eux-mêmes, égarés par les objections vicieuses des métaphysiciens.

Relativement aux quantités négatives, qui, par suite du même esprit métaphysique, ont donné lieu à tant de discussions déplacées, aussi dépourvues de tout fondement rationnel que dénuées de toute véritable utilité scientifique, il faut distinguer, en considérant toujours le simple fait analytique, entre leur signification abstraite et leur interprétation concrète, qu'on a presque toujours confondues jusqu'à présent. Sous le premier rapport, la théorie des quantités négatives peut être établie d'une manière complète par une seule vue algébrique. Quant à la nécessité d'admettre ce genre de résultats concurremment avec tout autre, elle dérive de la considération générale que je viens de présenter: et quant à leur emploi comme artifice analytique pour rendre le

formules plus étendues, ce mécanisme de calcul ne peut réellement donner lieu à aucune difficulté sérieuse. Ainsi, on peut envisager la théorie abstraite des quantités négatives comme ne laissant rien d'essentiel à désirer : elle ne présente vraiment d'obstacles que ceux qu'on y introduit mal à propos par des considérations sophistiques. Mais, il n'en est nullement de même pour leur théorie concrète.

Sous ce point de vue, elle consiste essentiellement dans cette admirable propriété des signes + et — de représenter analytiquement les oppositions de sens dont sont susceptibles certaines grandeurs. Ce théorême général sur les relations du concret à l'asbtrait en mathématique, est une des plus belles découvertes que nous devions au génie de Descartes, qui l'a obtenue comme un simple résultat de l'observation philosophique convenablement dirigée. Un grand nombre de géomètres ont tenté depuis d'en établir directement la démonstration générale. Mais jusqu'ici leurs efforts ont été illusoires, soit qu'ils aient essayé de trancher la difficulté par de vaines considérations métaphysiques, ou par des comparaisons très-hasardées, soit qu'ils aient pris de simples vérifications dans quelque cas particulier plus ou moins borné pour de véritables démonstrations. Ces diverses tentatives vicieuses, et le mélange hétérogène du point de vue abstrait avec le point de vue concret, ont même introduit communément à cet égard une telle confusion, qu'il devient nécessaire d'énoncer ici distinctement le fait général, soit qu'on veuille se contenter d'en faire usage, soit qu'on se propose de l'expliquer. Il consiste, indépendamment de toute explication, en ce que : si dans une équation quel-conque exprimant la relation de certaines quantités susceptibles d'opposition de sens, une ou plusieurs de ces quantités viennent à être comptées dans un sens contraire à celui qu'elles affectaient quand l'équation a été primitivement établie ; il ne sera pas nécessaire de former directement une nouvelle équation pour ce second état du phénomène ; il suffira de changer, dans la première équation, le signe de chacune des quantités qui auront changé de sens, et l'équation ainsi modifiée coïncidera toujours rigoureusement avec celle qu'on aurait trouvée en recommençant à chercher pour ce nouveau cas la loi analytique du phénomène. C'est dans cette coïncidence constante et nécessaire que consiste le théorême général. Or, jusqu'ici on n'est point parvenu réellement à s'en rendre compte directement ; on ne s'en est assuré que par un grand nombre de vérifications géométriques et mécaniques, qui sont, il est vrai, assez multipliées et

surtout assez variées pour qu'il ne puisse rester dans aucun esprit juste le moindre doute sur l'exactitude et la généralité de cette propriété essentielle, mais qui, sous le rapport philosophique, ne dispensent nullement de chercher une explication aussi importante. L'extrême étendue du théorême doit faire comprendre à la fois et la difficulté capitale de cette recherche si souvent reprise infructueusement, et la haute utilité dont serait sans doute, pour le perfectionnement de la science mathématique, la conception générale de cette grande vérité, l'esprit ne pouvant évidemment s'y élever qu'en se plaçant à un point de vue d'où il découvrirait inévitablement de nouvelles idées, par la considération directe et approfondie de la relation du concret à l'abstrait. Quoi qu'il en soit, l'imperfection que présente encore la science sous ce rapport, n'a point empêché les géomètres de faire l'usage le plus étendu et le plus important de cette propriété dans toutes les parties de la mathématique concrète, où l'on en éprouve un besoin presque continuel. On peut même retirer une certaine utilité logique de la simple considération nette de ce fait général, tel que je l'ai décrit ci-dessus ; il en résulte, par exemple, indépendamment de toute démonstration, que la propriété dont nous parlons ne doit jamais être appliquée aux grandeurs qui affectent des directions continuellement variables, sans donner lieu à une simple opposition de sens: dans ce cas, le signe dont se trouve nécessairement affecté tout résultat de calcul n'est susceptible d'aucune interprétation concrète, et c'est à tort qu'on s'efforce quelquefois d'en établir; cette circonstance a lieu, entre autres occasions, pour les rayons vecteurs en géométrie, et pour les forces divergentes en mécanique.

Un second théorême général sur la relation du concret à l'abstrait en mathématique, que je crois devoir considérer expressément ici, est celui qu'on désigne ordinairement sous le nom de principe de l'*homogénéité*. Il est sans doute bien moins important dans ses applications que le précédent. Mais il mérite particulièrement notre attention, comme ayant, par sa nature, une étendue encore plus grande, puisqu'il s'applique indistinctement à tous les phénomènes, et à cause de l'utilité réelle qu'on en retire souvent pour la vérification de leurs lois analytiques. Je puis d'ailleurs en exposer une démonstration directe et générale, qui me semble fort simple. Elle est fondée sur cette seule observation, évidente par elle-même: l'exactitude de toute relation entre des grandeurs concrètes quelconques est indépendante de la valeur des *unités* auxquelles on les rapporte pour les exprimer en nombres. Par exemple, la relation qui

existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle, a lieu soit qu'on les évalue en mètres, ou en lieues, ou en pouces, etc.

Il suit de cette considération générale, que toute équation qui exprime la loi analytique d'un phénomène quelconque, doit jouir de cette propriété de n'être nullement altérée, quand on fait subir simultanément à toutes les quantités qui s'y trouvent, le changement correspondant à celui qu'éprouveraient leurs unités respectives. Or, ce changement consiste évidemment en ce que toutes les quantités de chaque espèce deviendraient à la fois m fois plus petites, si l'unité qui leur correspond devient m fois plus grande, ou réciproquement. Ainsi, toute équation qui représente une relation concrète quelconque, doit offrir ce caractère de demeurer la même, quand on y rend m fois plus grandes toutes les quantités qu'elle contient, et qui expriment les grandeurs entre lesquelles existe la relation, en exceptant toutefois les nombres qui désignent simplement les *rapports* mutuels de ces diverses grandeurs, lesquels restent invariables dans le changement des unités. C'est dans cette propriété que consiste la loi de l'homogénéité, suivant son acception la plus étendue, c'est-à-dire, de quelques fonctions analytiques que les équations soient composées.

Mais, le plus souvent, on ne considère que les cas où ces fonctions sont de celles qu'on appelle particulièrement *algébriques*, et auxquelles la notion de *dégré* est applicable. Dans ce cas, on peut préciser davantage la proposition générale, en déterminant le caractère analytique que doit présenter nécessairement l'équation pour que cette propriété soit vérifiée. Il est aisé de voir alors, en effet, que, par la modification ci-dessus exposée, tous les *termes* du premier degré, quelle que soit leur forme, rationnelle ou irrationnelle, entière ou fractionnaire, deviendront m fois plus grands; tous ceux du second degré, m^2 fois; ceux du troisième, m^3 fois, etc. Ainsi, les termes du même degré, quelque diverse que puisse être leur composition, variant de la même manière, et les termes de degrés différens variant dans une proportion inégale, quelque similitude que puisse offrir leur composition, il faudra nécessairement, pour que l'équation ne soit pas troublée, que tous les termes qu'elle contient soient d'un même degré. C'est en cela que consiste proprement le théorême ordinaire de l'*homogénéité*; et c'est de cette circonstance que la loi générale a tiré son nom, qui cependant cesse d'être exactement convenable pour toute autre espèce de fonctions.

Afin de traiter ce sujet dans toute son étendue,

il importe d'observer une condition essentielle, à laquelle on devra avoir égard en appliquant cette propriété, lorsque le phénomène exprimé par l'équation présentera des grandeurs de natures diverses. En effet, il pourra arriver que les unités respectives soient complétement indépendantes les unes des autres, et alors le théorême de l'homogénéité aura lieu, soit par rapport à toutes les classes correspondantes de quantités, soit qu'on ne veuille considérer qu'une seule ou plusieurs d'entre elles. Mais, il arrivera, dans d'autres occasions, que les diverses unités auront entre elles des relations obligées, déterminées par la nature de la question. Alors, il faudra avoir égard à cette subordination des unités dans la vérification de l'homogénéité, qui n'existera plus en un sens purement algébrique, et dont le mode précis variera suivant le genre des phénomènes. Ainsi, par exemple, pour fixer les idées, quand on considérera dans l'expression analytique des phénomènes géométriques, à la fois des lignes, des aires, et des volumes, il faudra observer que les trois unités correspondantes, sont nécessairement liées entre elles, de telle sorte que, suivant la subordination généralement établie à cet égard, lorsque la première devient m fois plus grande, la seconde le devient m^2 fois, et la troisième m^3 fois. C'est avec une telle modification que l'homogénéité existera dans les équations, où l'on devra alors, si elles sont *algébriques*, estimer le degré de chaque terme, en doublant les exposans des facteurs qui correspondent à des aires, et triplant ceux des facteurs relatifs à des volumes (1).

Telles sont les principales considérations générales, très-insuffisantes sans doute, mais auxquelles je suis contraint de me réduire par les limites naturelles de ce cours, relativement au calcul des fonctions directes. Nous devons passer maintenant à l'examen philosophique du calcul des fonctions indirectes, dont l'importance et l'étendue bien supérieures réclament un plus grand développement.

(1) J'ai été conduit, il y a douze ans, par mon enseignement journalier de la science mathématique, à construire cette théorie générale de l'homogénéité. J'ai trouvé depuis que M. Fourier, dans son grand ouvrage sur la chaleur, publié en 1822, avait suivi, de son côté, une marche essentiellement semblable. Malgré cette heureuse coïncidence, qu'a dû naturellement déterminer la considération directe d'un sujet aussi simple, je n'ai pas cru devoir ici renvoyer à sa démonstration; celle que je viens d'exposer ayant pour principal objet d'embrasser l'ensemble de la question, sans égard à aucune application spéciale.

SIXIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Exposition comparative des divers points de vue généraux sous lesquels on peut envisager le calcul des fonctions indirectes.

Nous avons déterminé, dans la quatrième leçon, le caractère philosophique propre à l'analyse transcendante, de quelque manière qu'on puisse la concevoir, en considérant seulement la nature générale de sa destination effective dans l'ensemble de la science mathématique. Cette analyse a été, comme on sait, présentée par les géomètres sous plusieurs points de vue réellement distincts, quoique nécessairement équivalens, et conduisant toujours à des résultats identiques. On peut les réduire à trois principaux, ceux de Leïbnitz, de Newton et de Lagrange, dont tous les autres ne sont que des modifications secondaires. Dans l'état présent de la science, chacune de ces trois conceptions générales offre des avantages essentiels qui lui appartiennent exclusivement, sans