fication que l'homogénéité existera dans les équations, où l'on devra alors, si elles sont *algébriques*, estimer le degré de chaque terme, en doublant les exposans des facteurs qui correspondent à des aires, et triplant ceux des facteurs relatifs à des volumes (1).

Telles sont les principales considérations générales, très-insuffisantes sans doute, mais auxquelles je suis contraint de me réduire par les limites naturelles de ce cours, relativement au calcul des fonctions directes. Nous devons passer maintenant à l'examen philosophique du calcul des fonctions indirectes, dont l'importance et l'étendue bien supérieures réclament un plus grand développement.

(1) J'ai été conduit, il y a douze ans, par mon enseignement journalier de la science mathématique, à construire cette théorie générale de l'homogénéité. J'ai trouvé depuis que M. Fourier, dans son grand ouvrage sur la chaleur, publié en 1822, avait suivi, de son côté, une marche essentiellement semblable. Malgré cette heureuse coïncidence, qu'a dû naturellement déterminer la considération directe d'un sujet aussi simple, je n'ai pas cru devoir ici renvoyer à sa démonstration; celle que je viens d'exposer ayant pour principal objet d'embrasser l'ensemble de la question, sans égard à aucune application spéciale.

SIXIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Exposition comparative des divers points de vue généraux sous lesquels on peut envisager le calcul des fonctions indirectes.

Nous avons déterminé, dans la quatrième leçon, le caractère philosophique propre à l'analyse transcendante, de quelque manière qu'on puisse la concevoir, en considérant seulement la nature générale de sa destination effective dans l'ensemble de la science mathématique. Cette analyse a été, comme on sait, présentée par les géomètres sous plusieurs points de vue réellement distincts, quoique nécessairement équivalens, et conduisant toujours à des résultats identiques. On peut les réduire à trois principaux, ceux de Leibnitz, de Newton et de Lagrange, dont tous les autres ne sont que des modifications secondaires. Dans l'état présent de la science, chacune de ces trois conceptions générales offre des avantages essentiels qui lui appartiennent exclusivement, sans qu'on soit encore parvenu à construire une méthode unique réunissant toutes ces diverses qualités caractéristiques. En méditant sur l'ensemble de cette grande question, on est convaincu, je crois, que c'est dans la conception de Lagrange, que s'opérera un jour cette combinaison. Quand cet important travail philosophique, qui exige une profonde élaboration de toutes les idées mathématiques fondamentales, sera convenablement exécuté; on pourra se borner alors, pour connaître l'analyse transcendante, à la seule étude de cette conception définitive; les autres ne présentant plus essentiellement qu'un intérêt historique. Mais jusqu'à cette époque, la science devra être considérée, sous ce rapport, comme étant dans un véritable état provisoire, qui exige absolument, même pour l'exposition dogmatique de cette analyse, la considération simultanée des divers modes généraux propres au calcul des fonctions indirectes. Quelque peu satisfaisante que puisse paraître, sous le rapport logique, cette multiplicité de conceptions d'un sujet toujours identique, il est certain que, sans cette indispensable condition, on ne pourrait se former aujourd'hui qu'une notion très-insuffisante de cette analyse, soit en elle-même, soit surtout relativement à ses applications, quelque fût le mode unique que l'on aurait cru devoir choisir. Ce défaut de sys-

tématisation dans la partie la plus importante de l'analyse mathématique, ne paraîtra nullement étrange, si l'on considère, d'une part, son extrême étendue, sa difficulté supérieure, et, d'une autre part, sa formation presque récente. La génération des géomètres est à peine renouvelée depuis la production primitive de la conception destinée sans doute à coordonner la science, de manière à lui imprimer un caractère fixe et uniforme; ainsi, les habitudes intellectuelles n'ont pu encore, sous ce rapport, être suffisamment formées.

S'il s'agissait ici de tracer l'histoire raisonnée de la formation successive de l'analyse transcendante, il faudrait préalablement distinguer avec soin du calcul des fonctions indirectes proprement dit, l'idée mère de la méthode infinitésimale, laquelle peut être conçue par elle-même, indépendamment de tout calcul. Nous verrions, dès-lors, que le premier germe de cette idée, se trouve déjà dans le procédé constant, employé par les géomètres grecs, sous le nom de *méthode d'exhaustion*, pour passer de ce qui est relatif aux lignes droites à ce qui concerne les lignes courbes, et qui consistait essentiellement à substituer à la courbe la considération auxiliaire d'un polygone inscrit ou circonscrit, d'après lequel on s'élevait à la courbe elle-même, en prenant convenablement les limites des relations primitives. Quelqu'incontestable que soit cette filiation des idées, on lui donnerait une importance fort exagérée, en voyant dans cette méthode d'exhaustion, l'équivalent réel de nos méthodes modernes, comme l'ont fait plusieurs géomètres. Car, les anciens n'avaient aucun moyen rationnel et général pour la détermination de ces limites, qui constituait ordinairement la plus grande difficulté de la question; en sorte que leurs solutions n'étaient point soumises à des règles abstraites et invariables, dont l'application uniforme dût conduire avec certitude à la connaissance cherchée, ce qui est le principal caractère de notre analyse transcendante. En un mot, il restait à généraliser la conception employée par les anciens, et surtout, en la considérant d'une manière purement abstraite, à la réduire en calcul, ce qui leur était impossible. La première idée qui ait été produite dans cette nouvelle direction, remonte véritablement à notre grand géomètre Fermat, que Lagrange a justement présenté comme ayant ébauché la formation directe de l'analyse transcendante, par sa méthode pour la détermination des *maxima* et *minima*, et pour la recherche des tangentes, qui consistait essentiellement, en effet, à introduire la considération auxiliaire des accroissemens corélatifs des variables proposées, accrois-

semens supprimés ensuite comme nuls, après que les équations avaient subi certaines transformations convenables. Mais, quoique Fermat eût le premier conçu cette analyse d'une manière vraiment abstraite, elle était encore loin d'être régulièrement formée en un calcul général et distinct, ayant sa notation propre, et surtout dégagé de la considération superflue des termes, qui finissaient par n'être plus comptés dans l'analyse de Fermat, après avoir néanmoins singulièrement compliqué par leur présence toutes les opérations. C'est ce qu'a si heureusement exécuté Leïbnitz un demi-siècle plus tard, après quelques modifications intermédiaires apportées par Wallis, et surtout par Barrow, aux idées de Fermat; et par là il a été le véritable créateur de l'analyse transcendante, telle que nous l'employons aujourd'hui. Cette découverte capitale était tellement mûre, comme toutes les grandes conceptions de l'esprit humain au moment de leur manifestation, que Newton, de son côté, était parvenu en même temps, ou un peu auparavant, à une méthode exactement équivalente, en considérant cette analyse sous un point de vue très-différent, et qui, bien que plus rationnel en lui-même, est réellement moins convenable pour donner à la méthode fondamentale commune toute l'étendue et la facilité que lui ont imprimées les idées de Leïbnitz. Enfin, Lagrange, écartant les considérations hétérogènes qui avaient guidé Leïbnitz et Newton, est parvenu plus tard à réduire l'analyse transcendante, dans sa plus grande perfection, à un système purement algébrique, auquel il ne manque encore que plus d'aptitude aux applications.

Après ce coup-d'œil sommaire sur l'histoire générale de l'analyse transcendante, procédons à l'exposition dogmatique des trois conceptions principales, afin d'apprécier exactement leurs propriétés caractéristiques, et de constater l'identité nécessaire des méthodes qui en dérivent. Commençons par celle de Leïbnitz.

Elle consiste, comme on sait, à introduire dans le calcul, pour faciliter l'établissement des équations, les élémens infiniment petits dont on considère comme composées les quantités entre lesquelles on cherche des relations. Ces élémens ou *différentielles* auront entre eux des relations constamment et nécessairement plus simples et plus faciles à découvrir que celles des quantités primitives, et d'après lesquelles on pourrait ensuite, par un calcul spécial ayant pour destination propre l'élimination de ces infinitésimales auxiliaires, remonter aux équations cherchées, qu'il eût été le plus souvent impossible d'obtenir directement. Cette analyse indirecte

pourra l'être à des degrés divers; car, si on trouve quelquefois trop de difficulté à former immédiatement l'équation entre les différentielles mêmes des grandeurs que l'on considère, il faudra, par un emploi redoublé du même artifice général, traiter, à leur tour, ces différentielles comme de nouvelles quantités primitives, et chercher la relation entre leurs élémens infiniment petits, qui, par rapport aux objets définitifs de la question, seront les *différentielles secondes;* et ainsi de suite, la même transformation pouvant être répétée un nombre quelconque de fois, à la condition toujours d'éliminer finalement le nombre de plus en plus grand des quantités infinitésimales introduites comme auxiliaires.

Un esprit encore étranger à ces considérations n'aperçoit pas sur-le-champ comment l'emploi de ces quantités auxiliaires peut faciliter la découverte des lois analytiques des phénomènes; car les accroissemens infiniment petits des grandeurs proposées étant de même espèce qu'elles, leurs relations ne paraissent pas devoir s'obtenir plus aisément, la valeur plus ou moins petite d'une quantité ne pouvant, en effet, exercer aucune influence sur une recherche nécessairement indépendante, par sa nature, de toute idée de valeur. Mais il est aisé, néanmoins, de s'expliquer très-nettement, et d'une manière tout-à-fait générale, à quel point, par un tel artifice, la question doit se trouver simplifiée. Il faut, pour cela, commencer par distinguer les différens ordres d'infiniment petits, dont on peut se faire une idée fort précise, en considérant que ce sont ou les puissances successives d'un même infiniment petit primitif, ou des quantités qu'on peut présenter comme ayant avec ces puissances des rapports finis, en sorte que, par exemple, les différentielles seconde, troisième, etc., d'une même variable, sont classées comme infiniment petits du second ordre, du troisième, etc., parce qu'il est aisé de montrer en elles des multiples finis des puissances seconde, troisième, etc., d'une certaine différentielle première. Ces notions préliminaires étant posées, l'esprit de l'analyse infinitésimale consiste à négliger constamment les quantités infiniment petites à l'égard des quantités finies, et, généralement, les infiniment petits d'un ordre quelconque vis-à-vis tous ceux d'un ordre inférieur. On conçoit immédiatement combien une telle faculté doit faciliter la formation des équations entre les différentielles des quantités, puisque, au lieu de ces différentielles, on pourra substituer tels autres élémens qu'on voudra, et qui seraient plus simples à considérer, en se conformant à cette seule condition, que les nouveaux élémens ne diffèrent des précédens que de quantités infiniment petites par rapport à eux. C'est ainsi qu'il sera possible, en géométrie, de traiter les lignes courbes comme composées d'une infinité d'élémens rectilignes, les surfaces courbes comme formées d'élémens plans; et, en mécanique, les mouvemens variés comme une suite infinie de mouvemens uniformes, se succédant à des intervalles de temps infiniment petits. Vu l'importance de cette conception admirable, je crois devoir ici, par l'indication sommaire de quelques exemples principaux, achever d'éclaircir son caractère fondamental.

Qu'il s'agisse de déterminer, en chaque point d'une courbe plane dont l'équation est donnée, la direction de sa tangente, question dont la solution générale a été l'objet primitif qu'avaient en vue les inventeurs de l'analyse transcendante. On considérera la tangente comme une sécante qui joindrait deux points infiniment voisins; et alors, en nommant dy et dx les différences infiniment petites des coordonnées de ces deux points, les premiers élémens de la géométrie fourniront immédiatement l'équation $t=\frac{dy}{dx}$, pour la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente cherchée, ce qui, dans un système de coordonnées rectilignes, est la manière la plus simple d'en fixer la position. Cette équation, commune à toutes les courbes, étant posée, la question est réduite à un simple problème analytique, qui consistera à éliminer les infinitésimales dx et dy, introduites comme auxiliaires, en déterminant, dans chaque cas particulier, d'après l'équation de la courbe proposée, le rapport de dy à dx, ce qui se fera constamment par des procédés uniformes et très-simples.

En second lieu, qu'on veuille connaître la longueur de l'arc d'une courbe quelconque, considéré comme une fonction des coordonnées de ses extrémités. Il serait impossible d'établir immédiatement l'équation entre cet arc s et ces coordonnées, tandis qu'il est aisé de trouver la relation correspondante entre les différentielles de ces diverses grandeurs. Les plus simples théorèmes de la géométrie élémentaire donneront, en effet, sur-le-champ, en considérant l'arc infiniment petit ds comme une ligne droite, les équations

$$ds^2 = dy^2 + dx^2, \text{ ou } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

suivant que la courbe sera plane ou à double courbure. Dans l'un et l'autre cas, la question est maintenant tout entière du domaine de l'analyse, qui fera remonter, d'après cette relation, à celle qui existe entre les quantités finies elles-mêmes que l'on considère, par l'élimination des différentielles, qui est l'objet propre du calcul des fonctions indirectes.

Il en serait de même pour la quadrature des

aires curvilignes. Si la courbe est plane et rapportée à des coordonnées rectilignes, on concevra l'aire A comprise entre elle, l'axe des x, et deux coordonnées extrêmes, comme augmentant d'une quantité infiniment petite dA, en résultat d'un accroissement analogue de l'abcisse. Alors la relation entre ces deux différentielles pourra s'obtenir immédiatement avec la plus grande facilité, en substituant à l'élément curviligne de l'aire proposée le rectangle formé par l'ordonnée extrême et l'élément de l'abcisse, dont il ne diffère évidemment que d'une quantité infiniment petite du second ordre, ce qui fournira aussitôt, quelle que soit la courbe, l'équation différentielle très-simple

$$dA = ydx,$$

d'où le calcul des fonctions indirectes, quand la courbe sera définie, apprendra à déduire l'équation finie, objet immédiat du problème.

Pareillement, en dynamique, quand on voudra connaître l'expression de la vitesse acquise à chaque instant par un corps animé d'un mouvement varié suivant une loi quelconque, on considérera le mouvement comme uniforme pendant la durée d'un élément infiniment petit du temps t, et on formera ainsi immédiatement l'équation différentielle $de = v\,dt$, v désignant la vitesse acquise quand le corps a parcouru l'espace e, et de là il sera facile de conclure, par de simples procédés analytiques invariables, la formule qui donnerait la vitesse dans chaque mouvement particulier, d'après la relation correspondante entre le temps et l'espace; ou, réciproquement, quelle serait cette relation si le mode de variation de la vitesse était supposé connu, soit par rapport à l'espace, soit par rapport au temps.

Enfin, pour indiquer une autre nature de questions, c'est par une marche semblable que, dans l'étude des phénomènes thermologiques, comme l'a si heureusement conçue M. Fournier, on peut former très-simplement, ainsi que nous le verrons plus tard, l'équation différentielle générale qui exprime la répartition variable de la chaleur dans un corps quelconque à quelques influences qu'on le suppose soumis, d'après la seule relation, fort aisée à obtenir, qui représente la distribution uniforme de la chaleur dans un parallélipipède rectangle, en considérant géométriquement tout autre corps comme décomposé en élémens infiniment petits d'une telle forme, et thermologiquement le flux de chaleur comme constant pendant un temps infiniment petit. Dès-lors, toutes les questions que peut présenter la thermologie abstraite se trouveront réduites, comme pour la géométrie et la mécanique, à de pures difficultés d'analyse, qui consisteront

toujours dans l'élimination des différentielles introduites comme auxiliaires pour faciliter l'établissement des équations.

Des exemples de nature aussi diverse sont plus que suffisans pour faire nettement comprendre en général l'immense portée de la conception fondamentale de l'analyse transcendante, telle que Leïbnitz l'a formée, et qui constitue sans aucun doute la plus haute pensée à laquelle l'esprit humain se soit jamais élevé jusqu'à présent.

On voit que cette conception était indispensable pour achever de fonder la science mathématique, en permettant d'établir d'une manière large et féconde, la relation du concret à l'abstrait. Sous ce rapport, elle doit être envisagée comme le complément nécessaire de la grande idée-mère de Descartes, sur la représentation analytique générale des phénomènes naturels, idée qui n'a commencé à être dignement appréciée et convenablement exploitée que depuis la formation de l'analyse infinitésimale, sans laquelle elle ne pouvait encore produire, même en géométrie, de résultats très-importans (1).

Quoique j'aie cru devoir, dans les considérations précédentes, insister particulièrement sur

(1) Il est bien remarquable, en effet, que des hommes tels que Pascal, aient fait aussi peu d'attention à la conception fondamentale de Descartes, sans pressentir nullement la révolution générale qu'elle était nécessairement destinée à produire dans le système entier de la science mathématique. Cela est venu de ce

l'admirable facilité que présente par sa nature l'analyse transcendante pour la recherche des lois mathématiques de tous les phénomènes, je ne dois pas négliger de faire ressortir une seconde propriété fondamentale, peut-être aussi importante que la première, et qui ne lui est pas moins inhérente : je veux parler de l'extrême généralité des formules différentielles, qui expriment en une seule équation chaque phénomène déterminé, quelque variés que puissent être les sujets dans lesquels on le considère. Ainsi, sous le point de vue de l'analyse infinitésimale, on voit, dans les exemples qui précèdent, une seule équation différentielle donner les tangentes à toutes les courbes, une autre leurs rectifications, une troisième leurs quadratures; et de même, une formule invariable exprimer la loi mathématique de tout mouvement varié; enfin une équation unique représenter constamment la répartition de la chaleur dans un corps et pour un cas quelconques. Cette généralité si éminemment remarquable, et qui est pour les géomètres la base des considérations les plus

que, sans le secours de l'analyse transcendante, cette admirable méthode ne pouvait réellement encore conduire à des résultats essentiels, qui ne pussent être obtenus presqu'aussi bien par la méthode géométrique des anciens. Les esprits mêmes les plus éminens ont toujours bien moins apprécié jusqu'ici les méthodes générales par leur simple caractère philosophique, que par les connaissances effectives qu'elles pouvaient procurer immédiatement.

élevées, est une heureuse conséquence nécessaire et presqu'immédiate de l'esprit même de l'analyse transcendante, surtout dans la conception de Leïbnitz. Elle résulte de ce que, en substituant aux élémens infiniment petits des grandeurs considérées, d'autres infinitésimales plus simples, qui seules entrent dans les équations différentielles, ces infinitésimales se trouvent, par leur nature, être constamment les mêmes pour chaque classe totale de questions, quels que soient les objets divers du phénomène étudié. Ainsi, par exemple, toute courbe, quelle qu'elle soit, étant toujours décomposée en élémens rectilignes, on conçoit *à priori* que la relation entre ces élémens uniformes doit nécessairement être la même pour un même phénomène géométrique quelconque, quoique l'équation finie correspondante à cette loi différentielle doive varier d'une courbe à une autre. Il en est évidemment de même dans tout autre cas quelconque. L'analyse infinitésimale n'a donc pas seulement fourni un procédé général pour former indirectement des équations qu'il eût été impossible de découvrir d'une manière directe; elle a permis en outre de considérer, pour l'étude mathématique des phénomènes naturels, un ordre nouveau de lois plus générales et néanmoins offrant une signification claire et précise à tout esprit habitué à leur interprétation. Ces lois sont constamment les mêmes pour chaque phénomène, dans quelques objets qu'on l'étudie, et ne changent qu'en passant d'un phénomène à un autre; d'où l'on a pu d'ailleurs, en comparant ces variations, s'élever quelquefois, par une vue encore plus générale, à des rapprochemens positifs entre diverses classes de phénomènes tout-à-fait divers, d'après les analogies présentées par les expressions différentielles de leurs lois mathématiques. Dans l'étude philosophique de la mathématique concrète, je m'attacherai à faire exactement apprécier cette seconde propriété caractéristique de l'analyse transcendante, non moins admirable que la première, et en vertu de laquelle le système entier d'une science immense, comme la géométrie ou la mécanique, a pu se trouver condensé en un petit nombre de formules analytiques, d'où l'esprit humain peut déduire, par des règles certaines et invariables, la solution de tous les problèmes particuliers.

Pour terminer l'exposition générale de la conception de Leïbnitz, il me reste maintenant à considérer en elle-même la démonstration du procédé logique auquel elle conduit, ce qui constitue malheureusement la partie la plus imparfaite de cette belle méthode.

Dans les premiers temps de l'analyse infinitésimale, les géomètres les plus célèbres, tels que les

deux illustres frères Jean et Jacques Bernouilli attachèrent, avec raison, bien plus d'importance à étendre, en la développant, l'immortelle découverte de Leïbnitz, et à en multiplier les applications, qu'à établir rigoureusement les bases logiques sur lesquelles reposaient les procédés de ce nouveau calcul (1). Ils se contentèrent pendant long-temps de répondre par la solution inespérée des problèmes les plus difficiles à l'opposition prononcée de la plupart des géomètres du second ordre contre les principes de la nouvelle analyse, persuadés sans doute, contrairement aux habitudes ordinaires, que, dans la science mathématique bien plus que dans aucune autre, on peut accueillir avec hardiesse les nouveaux moyens, même quand leur rationnalité est imparfaite, pourvu qu'ils soient féconds, puisque, les vérifications étant bien plus faciles et plus multipliées, l'erreur ne saurait demeurer long-temps inaperçue. Néanmoins, après le premier élan, il était impossible d'en rester là; et il

(1) On ne peut contempler, sans un profond intérêt, le naïf enthousiasme de l'illustre Huyghens, au sujet de cette admirable création, quoique son âge avancé ne lui permît point d'en faire lui-même aucun usage important, et qu'il se fût déjà élevé sans ce puissant secours à des découvertes capitales. *Je vois avec surprise et avec admiration*, écrivait-il, en 1692, au marquis de L'Hôpital, *l'étendue et la fécondité de cet art; de quelque côté que je tourne la vue, j'en aperçois de nouveaux usages; enfin, j'y conçois un progrès et une spéculation infinis.*

fallait revenir nécessairement sur les fondemens mêmes de l'analyse leïbnitzienne pour constater généralement l'exactitude rigoureuse des procédés employés, malgré les infractions apparentes qu'on s'y permettait aux règles ordinaires du raisonnement. Leïbnitz, pressé de répondre, avait lui-même présenté une explication tout-à-fait erronée, en disant qu'il traitait les infiniment petits comme des *incomparables*, et qu'il les négligeait vis-à-vis des quantités finies *comme des grains de sable par rapport à la mer*, considération qui eût complétement dénaturé son analyse, en la réduisant à n'être plus qu'un simple calcul d'approximation, qui, sous ce rapport, serait radicalement vicieux, puisqu'il serait impossible de prévoir, en thèse générale, à quel point les opérations successives peuvent grossir ces erreurs premières, dont l'accroissement pourrait même évidemment devenir ainsi quelconque. Leïbnitz n'avait donc entrevu que d'une manière extrêmement confuse les véritables fondemens rationnels de l'analyse qu'il avait créée. Ses premiers successeurs se bornèrent d'abord à en vérifier l'exactitude par la conformité de ses résultats, dans certains usages particuliers, avec ceux que fournissait l'algèbre ordinaire ou la géométrie des anciens, en reproduisant, autant qu'ils le pouvaient, d'après les anciennes méthodes, les solu-

tions de quelques problèmes, une fois qu'elles avaient été obtenues par la méthode nouvelle, seule capable primitivement de les faire découvrir. Quand cette grande question a été considérée d'une manière plus générale, les géomètres, au lieu d'aborder directement la difficulté, ont préféré l'éluder en quelque sorte, comme l'ont fait Euler et d'Alembert, par exemple, en démontrant abstraitement la conformité nécessaire et constante de la conception de Leïbnitz, envisagée dans tous ses usages quelconques, avec d'autres conceptions fondamentales de l'analyse transcendante, celle de Newton surtout, dont l'exactitude était à l'abri de toute objection. Une telle vérification générale est sans doute strictement suffisante pour dissiper toute incertitude sur l'emploi légitime de l'analyse leïbnitzienne. Mais la méthode infinitésimale est tellement importante, elle présente encore, dans presque toutes les applications, une telle supériorité effective sur les autres conceptions générales successivement proposées, qu'il y aurait véritablement imperfection dans le caractère philosophique de la science à ne pouvoir la justifier en elle-même, et à la fonder logiquement sur des considérations d'un autre ordre, qu'on cesserait ensuite d'employer efficacement. Il était donc d'une importance réelle d'établir directement et d'une manière générale la rationnalité nécessaire de la méthode infinitésimale. Après diverses tentatives plus ou moins imparfaites pour y parvenir, les travaux philosophiques de Lagrange ayant fortement reporté, vers la fin du siècle dernier, l'attention des géomètres sur la théorie générale de l'analyse infinitésimale, un géomètre très-recommandable, Carnot, présenta enfin la véritable explication logique directe de la méthode de Leïbnitz, en la montrant comme fondée sur le principe de la compensation nécessaire des erreurs, ce qui est vaisemblablement, en effet, la manifestation précise et lumineuse de ce que Leïbnitz avait vaguement et confusément aperçu, en concevant les bases rationnelles de son analyse. Carnot a rendu ainsi à la science un service essentiel (1), et dont l'importance me semble n'être pas encore suffisamment appréciée, quoique, comme nous le verrons à la fin de cette leçon, tout cet échafaudage logique de la méthode infinitésimale proprement dite ne soit susceptible très-vraisemblablement que d'une existence provisoire, en

(1) Voyez l'ouvrage remarquable qu'il a publié sous le titre de *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, et dans lequel on trouve d'ailleurs une exposition claire et utile, quoique trop peu approfondie, de tous les divers points de vue sous lesquels a été conçu le système général du calcul des fonctions indirectes.

tant que radicalement vicieux par sa nature. Je n'en crois pas moins, cependant, devoir considérer ici, afin de compléter cette importante exposition, le raisonnement général proposé par Carnot, pour légitimer directement l'analyse de Leïbnitz. Voici en quoi il consiste essentiellement.

Lorsqu'on établit l'équation différentielle d'un phénomène, on substitue aux élémens immédiats des diverses quantités considérées, d'autres infinitésimales plus simples qui en diffèrent infiniment peu par rapport à eux, et cette substitution constitue le principal artifice de la méthode de Leïbnitz, qui, sans cela, n'offrirait aucune facilité réelle pour la formation des équations. Carnot regarde une telle hypothèse comme produisant véritablement une erreur dans l'équation ainsi obtenue, et que, pour cette raison, il appelle *imparfaite;* seulement, il est clair que cette erreur ne peut être qu'infiniment petite. Or, d'un autre côté, tous les procédés analytiques, soit de différentiation, soit d'intégration, qu'on applique à ces équations différentielles pour s'élever aux équations finies en éliminant toutes les infinitésimales introduites comme auxiliaires, produisent aussi constamment, par leur nature, ainsi qu'il est aisé de le voir, d'autres erreurs analogues, en sorte qu'il a pu s'opérer une exacte compensation, et que les équations définitives peuvent, suivant l'expression de Carnot, être devenues *parfaites*. Carnot considère comme un symptôme certain et invariable de l'établissement effectif de cette compensation nécessaire, l'élimination complète des diverses quantités infiniment petites, qui est constamment, en effet, le but définitif de toutes les opérations de l'analyse transcendante. Car, si on n'a jamais commis d'autres infractions aux règles générales du raisonnement que celles ainsi exigées par la nature même de la méthode infinitésimale, les erreurs infiniment petites produites de cette manière n'ayant jamais pu engendrer que des erreurs infiniment petites dans toutes les équations, les relations sont nécessairement d'une exactitude rigoureuse aussitôt qu'elles n'ont plus lieu qu'entre des quantités finies, puisqu'il ne saurait évidemment exister alors que des erreurs finies, tandis qu'il n'a pu en survenir aucune de ce genre. Tout ce raisonnement général est fondé sur la notion des quantités infinitésimales, conçues comme indéfiniment décroissantes, lorsque celles dont elles dérivent sont envisagées comme fixes.

Ainsi, pour éclaircir cette exposition abstraite par un seul exemple, reprenons la question des tangentes, qui est la plus facile à analyser complétement. On regardera l'équation $t = \frac{dy}{dx}$ obtenue ci-dessus comme affectée d'une erreur infiniment petite, puisqu'elle ne serait tout-à-fait rigoureuse que pour la sécante. Maintenant, on achèvera la solution en cherchant, d'après l'équation de chaque courbe, le rapport entre les différentielles des coordonnées. Si cette équation est, je suppose, $y = ax^2$, on aura évidemment

$$dy = 2\,ax\,dx + dx^2$$

Dans cette formule, on devra négliger le terme dx^2 comme infiniment petit du second ordre. Dès lors la combinaison des deux équations *imparfaites*

$$t = \frac{dy}{dx},\ dy = 2\,a\,x\,dx,$$

suffisant pour éliminer entièrement les infinitésimales, le résultat fini $t = 2\,a\,x$ sera nécessairement rigoureux par l'effet de la compensation exacte des deux erreurs commises puisqu'il ne pourrait, par sa nature, être affecté d'une erreur infiniment petite, la seule néanmoins qu'il pût y avoir, d'après l'esprit des procédés qui ont été suivis.

Il serait aisé de reproduire uniformément le même raisonnement par rapport à toutes les autres applications générales de l'analyse de Leïbnitz.

Cette ingénieuse théorie est sans doute plus subtile que solide, quand on cherche à l'approfondir. Mais elle n'a cependant en réalité d'autre vice logique radical que celui de la méthode infinitésimale elle-même, dont elle est, ce me semble, le développement naturel et l'explication générale, en sorte qu'elle doit être adoptée aussi long-temps qu'on jugera convenable d'employer directement cette méthode.

Je passe maintenant à l'exposition générale des deux autres conceptions fondamentales de l'analyse transcendante, en me bornant pour chacune à l'idée principale, le caractère philosophique de cette analyse ayant été, du reste, suffisamment déterminé ci-dessus, d'après la conception de Leïbnitz, à laquelle j'ai dû spécialement m'attacher, parce qu'elle permet de le saisir plus aisément dans son ensemble, et de le décrire avec plus de rapidité.

Newton a présenté successivement, sous plusieurs formes différentes, sa manière propre de concevoir l'analyse transcendante. Celle qui est aujourd'hui le plus communément adoptée, du moins parmi les géomètres du continent, a été désignée par Newton, tantôt sous le nom de *méthode des premières et dernières raisons*, tantôt sous celui de *méthode des limites*, qu'on emploie plus ou moins fréquemment.

Sous ce point de vue, l'esprit général de l'analyse transcendante consiste à introduire comme

auxiliaires, à la place des quantités primitives ou concurremment avec elles, pour faciliter l'établissement des équations, les limites des rapports des accroissemens simultanés de ces quantités, ou, en d'autres termes, les dernières raisons de ces accroissemens, limites ou dernières raisons qu'on peut aisément montrer comme ayant une valeur déterminée et finie. Un calcul spécial, qui est l'équivalent du calcul infinitésimal, est ensuite destiné à s'élever de ces équations entre ces limites aux équations correspondantes entre les quantités primitives elles-mêmes.

La faculté que présente une telle analyse pour exprimer plus aisément les lois mathématiques des phénomènes tient, en général, à ce que le calcul portant, non sur les accroissemens mêmes des quantités proposées, mais sur les limites des rapports de ces accroissemens, on pourra toujours substituer à chaque accroissement toute autre grandeur plus simple à considérer, pourvu que leur dernière raison soit la raison d'égalité, ou, en d'autres termes, que la limite de leur rapport soit l'unité. Il est clair, en effet, que le calcul des limites ne saurait être nullement affecté de cette substitution. En partant de ce principe, on retrouve à peu près l'équivalent des facilités offertes par l'analyse de Leïbnitz, qui sont seulement conçues alors sous un autre point de vue.

Ainsi, les courbes seront envisagées comme les limites d'une suite de polygones rectilignes, les mouvemens variés comme les limites d'un ensemble de mouvemens uniformes de plus en plus rapprochés, etc.

Qu'on veuille, par exemple, déterminer la direction de la tangente à une courbe; on la regardera comme la limite vers laquelle tendrait une sécante, qui tournerait autour du point donné, de manière que son second point d'intersection se rapprochât indéfiniment du premier. En nommant Δy et Δx les différences des coordonnées des deux points, on aurait, à chaque instant, pour la tangente trigonométrique de l'angle que fait la sécante avec l'axe des abcisses, $t = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; d'où, en prenant les limites, on déduira, relativement à la tangente elle-même, cette formule générale d'analyse transcendante

$$t = L\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,;\ (1)$$

d'après laquelle le calcul des fonctions indirectes enseignera, dans chaque cas particulier, quand l'équation de la courbe sera donnée, à déduire la relation entre t et x, en éliminant les quantités auxiliaires introduites. Si, pour achever la solu-

(1) J'emploie la caractéristique L pour désigner la limite.

tion, on suppose que $y = a\,x^2$ soit l'équation de la courbe proposée, on aura évidemment,

$$\Delta y = 2\,a\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2;$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,a\,x + \Delta x.$$

Or, il est clair que la limite vers laquelle tend le second membre, à mesure que Δx diminue, est $2\,a\,x$. On trouvera donc par cette méthode, $t = 2\,a\,x$, comme nous l'avions obtenu ci-dessus pour le même cas, d'après l'analyse de Leïbnitz.

Pareillement, quand on cherche la rectification d'une courbe, il faut substituer à l'accroissement de l'arc s, la corde de cet accroissement, qui est évidemment avec lui dans une relation telle, que la limite de leur rapport est l'unité, et alors on trouve, en suivant d'ailleurs la même marche qu'avec la méthode de Leïbnitz, cette équation générale des rectifications

$$\left(L\,\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(L\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

ou

$$\left(L\,\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(L\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(L\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2,$$

selon que la courbe est plane ou à double courbure. Il faudra maintenant, pour chaque courbe