particulière, passer de cette équation à celle entre l'arc et l'abcisse, ce qui dépend du calcul transcendant proprement dit.

On reprendrait avec la même facilité, d'après la méthode des limites, toutes les autres questions générales, dont la solution a été indiquée ci-dessus, suivant la méthode infinitésimale.

Telle est, essentiellement, la conception que Newton s'était formée, pour l'analyse transcendante, ou, plus exactement, celle que Maclaurin et d'Alembert ont présentée comme la base la plus rationnelle de cette analyse, en cherchant à fixer et à coordonner les idées de Newton à ce sujet.

Je dois, néanmoins, avant de procéder à l'exposition de la conception de Lagrange, signaler ici une autre forme distincte sous laquelle Newton a présenté cette même méthode, et qui mérite de fixer particulièrement notre attention, tant par son ingénieuse clarté dans quelques cas, que comme ayant fourni la notation la mieux appropriée à cette manière d'envisager l'analyse transcendante, et enfin, comme étant encore aujourd'hui la forme spéciale du calcul des fonctions indirectes communément adoptée par les géomètres anglais. Je veux parler du calcul des *fluxions* et des *fluentes*, fondé sur la notion générale des *vitesses*.

Pour en faire concevoir l'idée-mère avec plus de facilité, considérons toute courbe comme engendrée par un point animé d'un mouvement varié suivant une loi quelconque. Les diverses quantités que la courbe peut offrir, l'abcisse, l'ordonnée, l'arc, l'aire, etc., seront envisagées comme simultanément produites par degrés successifs pendant ce mouvement. La *vitesse* avec laquelle chacune aura été décrite sera dite la *fluxion* de cette quantité, qui, en sens inverse, en serait nommée la *fluente*. Dès lors, l'analyse transcendante consistera, dans cette conception, à former immédiatement les équations entre les fluxions des quantités proposées pour en déduire ensuite, par un calcul spécial, les équations entre les fluentes elles-mêmes. Ce que je viens d'énoncer relativement aux courbes peut d'ailleurs évidemment se transporter à des grandeurs quelconques, envisagées, à l'aide d'une image convenable, comme produites par le mouvement les unes des autres.

Il est aisé de comprendre l'identité générale et nécessaire de cette méthode avec celle des limites, compliquée de l'idée étrangère du mouvement. En effet, reprenant le cas de la courbe, si l'on suppose, comme on peut évidemment toujours le faire, que le mouvement du point décrivant est uniforme suivant une certaine direction, par exemple, dans le sens de l'abcisse, alors la fluxion de l'abcisse sera constante, comme l'élément du temps. Pour toutes les autres quantités engendrées, le mouvement ne pourrait être conçu comme uniforme que pendant un temps infiniment petit. Cela posé, la vitesse étant généralement, d'après sa notion mécanique, le rapport de chaque espace au temps employé à le parcourir, et ce temps étant ici proportionnel à l'accroissement de l'abcisse, il s'ensuit que la fluxion de l'ordonnée, de l'arc, de l'aire, etc., ne sont véritablement autre chose, en faisant disparaître la considération intermédiaire du temps, que les dernières raisons des accroissemens de ces diverses quantités comparés à celui de l'abcisse. Cette méthode des fluxions et des fluentes n'est donc en réalité qu'une manière de se représenter, d'après une comparaison mécanique, la méthode des premières et dernières raisons, qui seule est réductible en calcul. Elle comporte donc nécessairement les mêmes avantages généraux dans les diverses applications principales de l'analyse transcendante, sans que nous ayons besoin de le constater spécialement.

Je considère enfin la conception de Lagrange.

Elle consiste, dans son admirable simplicité, à se représenter l'analyse transcendante comme un grand artifice algébrique, d'après lequel, pour

faciliter l'établissement des équations, on introduit, au lieu de fonctions primitives ou avec elles, leurs fonctions *dérivées*, c'est-à-dire, suivant la définition de Lagrange, le coëfficient du premier terme de l'accroissement de chaque fonction, ordonné selon les puissances ascendantes de l'accroissement de sa variable. Le calcul des fonctions indirectes proprement dit, est toujours destiné, ainsi que dans les conceptions de Leïbnitz et de Newton, à éliminer ces *dérivées* employées comme auxiliaires, pour déduire de leurs relations les équations correspondantes entre les grandeurs primitives.

L'analyse transcendante n'est alors autre chose qu'une simple extension très-considérable de l'analyse ordinaire. C'était déjà depuis long-temps un procédé familier aux géomètres, que d'introduire, dans les considérations analytiques, au lieu des grandeurs mêmes qu'ils avaient à étudier, leurs diverses puissances, ou leurs logarithmes, ou leurs sinus, etc., afin de simplifier les équations, et même de les obtenir plus aisément. La *dérivation* successive est un artifice général de la même nature, qui présente seulement beaucoup plus d'étendue, et procure, en conséquence, pour ce but commun, des ressources bien plus importantes.

Mais, quoiqu'on conçoive sans doute *à priori* que la considération auxiliaire de ces dérivées, *peut* faciliter l'établissement des équations, il n'est pas aisé d'expliquer pourquoi cela *doit* être nécessairement d'après le mode de dérivation adopté plutôt que suivant toute autre transformation. Tel est le côté faible de la grande pensée de Lagrange. On n'est point, en effet, réellement parvenu jusqu'ici à saisir en général d'une manière abstraite, et sans rentrer dans les autres conceptions de l'analyse transcendante, les avantages précis que doit constamment présenter, par sa nature, cette analyse ainsi conçue, pour la recherche des lois mathématiques des phénomènes. Il est seulement possible de les constater, en considérant séparément chaque question principale, et cette vérification devient même pénible, quand on choisit une question compliquée.

Pour indiquer sommairement comment cette manière de concevoir l'analyse transcendante peut s'adapter effectivement à la solution des problèmes mathématiques, je me bornerai à reprendre sous ce point de vue le problème le plus simple de tous ceux ci-dessus examinés, celui des tangentes.

Au lieu de concevoir la tangente comme le prolongement de l'élément infiniment petit de la courbe, suivant la notion de Leïbnitz; ou comme la limite des sécantes, suivant les idées de Newton; Lagrange la considère d'après ce sim-

ple caractère géométrique, analogue aux définitions des anciens, d'être une droite telle qu'entre elle et la courbe il ne peut passer, par le point de contact, aucune autre droite. Dès lors, pour en déterminer la direction, il faut chercher l'expression générale de sa distance à la courbe, dans un sens quelconque, dans celui de l'ordonnée, par exemple, en un second point distinct du premier, et disposer de la constante arbitraire relative à l'inclinaison de la droite, qui entrera nécessairement dans cette expression, de manière à diminuer cet écartement le plus possible. Or, cette distance étant évidemment égale à la différence des deux ordonnées de la courbe et de la droite qui correspondent à une même nouvelle abcisse $x+h$, sera représentée par la formule

$$(f'(x)-t)\,h+qh^2+rh^3+\text{etc.},$$

où t désigne, comme ci-dessus, la tangente trigonométrique inconnue de l'angle que fait avec l'axe des (x), la droite cherchée, et $f'(x)$, la fonction dérivée de l'ordonnée $f(x)$. Cela posé, il est aisé de voir qu'en disposant de t de façon à annuler le premier terme de la formule précédente, on aura rendu l'intervalle des deux lignes le plus petit possible, tellement que toute autre droite pour laquelle t n'aurait point la valeur ainsi déterminée, s'écarterait nécessairement davantage de la courbe proposée. On a donc, pour la direction de la tangente cherchée, l'expression générale $t=f'(x)$; résultat exactement équivalent à ceux que fournissent la méthode infinitésimale, et la méthode des limites. Il restera maintenant, dans chaque courbe particulière, à trouver $f'(x)$, ce qui est une pure question d'analyse, tout-à-fait identique avec celles que prescrivent alors les autres méthodes.

Après avoir suffisamment considéré dans leur ensemble les principales conceptions générales successivement produites jusqu'ici pour l'analyse transcendante, je ne dois pas m'arrêter à l'examen de quelques autres théories proposées, telles que le *calcul des évanouissans* d'Euler, qui ne sont réellement que des modifications plus ou moins importantes, et d'ailleurs inusitées, des méthodes précédentes. Il me reste maintenant, afin de compléter cet ensemble de considérations, à établir la comparaison et l'appréciation de ces trois méthodes fondamentales. Je dois préalablement constater d'une manière générale, leur conformité parfaite et nécessaire.

Il est d'abord évident, par ce qui précède, qu'à considérer ces trois méthodes quant à leur destination effective, indépendamment des idées préliminaires, elles consistent toutes en un même

artifice logique général, que j'ai caractérisé dans la quatrième leçon, savoir : l'introduction d'un certain système des grandeurs auxiliaires, uniformément corrélatives à celles qui sont l'objet propre de la question, et qu'on leur substitue expressément pour faciliter l'expression analytique des lois mathématiques des phénomènes, quoiqu'elles doivent finalement être éliminées, à l'aide d'un calcul spécial. C'est ce qui m'a déterminé à définir régulièrement l'analyse transcendante *le calcul des fonctions indirectes*, afin de marquer son vrai caractère philosophique, en écartant toute discussion sur la manière la plus convenable de la concevoir et de l'appliquer. L'effet général de cette analyse, quelle que soit la méthode employée, est donc de faire rentrer beaucoup plus promptement chaque question mathématique dans le domaine du *calcul*, et de diminuer ainsi considérablement la difficulté capitale que présente ordinairement le passage du concret à l'abstrait. Quoiqu'on fasse, on ne peut espérer que le calcul s'empare jamais de chaque question de philosophie naturelle, géométrique, ou mécanique, ou thermologique, etc., immédiatement à sa naissance, ce qui serait évidemment contradictoire. Il y aura constamment dans tout problème, un certain travail préliminaire à effectuer sans que le calcul puisse être d'aucun secours, et qui ne saurait être, par sa nature, assujéti à des règles abstraites et invariables; c'est celui qui a pour objet propre l'établissement des *équations*, qui sont le point de départ indispensable de toutes les recherches analytiques. Mais cette élaboration préalable a été singulièrement simplifiée par la création de l'analyse transcendante, qui a ainsi hâté l'époque où la solution comporte l'application uniforme et précise de procédés généraux et abstraits; en réduisant, dans chaque cas, ce travail spécial à la recherche des équations entre les grandeurs auxiliaires, d'où le calcul conduit ensuite aux équations directement relatives aux grandeurs proposées, qu'il fallait, avant cette admirable conception, établir immédiatement. Que ces équations indirectes soient des équations *différentielles*, suivant la pensée de Leïbnitz; ou des équations *aux limites*, conformément aux idées de Newton; ou enfin des équations *dérivées*, d'après la théorie de Lagrange; le procédé général est évidemment toujours le même.

Mais la coïncidence de ces trois méthodes principales ne se borne pas à l'effet commun qu'elles produisent; elle existe, en outre, dans la manière même de l'obtenir. En effet, non-seulement toutes trois considèrent, à la place des grandeurs primitives, certaines grandeurs auxiliaires; de plus, les quantités ainsi introduites subsidiairement, sont exactement identiques dans les trois méthodes, qui ne diffèrent, par conséquent, que par la manière de les envisager. C'est ce qu'on peut aisément constater, en prenant pour terme général de comparaison une quelconque des trois conceptions, celle de Lagrange surtout, la plus propre à servir de type, comme étant la plus dégagée de considérations étrangères. N'est-il pas évident, par la seule définition des *fonctions dérivées*, qu'elles ne sont autre chose que ce que Leïbnitz appelle les *coëfficiens différentiels*, ou les rapports de la différentielle de chaque fonction à celle de la variable correspondante, puisque, en déterminant la première différentielle, on devra, par la nature même de la méthode infinitésimale, se borner à prendre le seul terme de l'accroissement de la fonction qui contient la première puissance de l'accroissement infiniment petit de la variable? De même, la fonction dérivée n'est-elle pas aussi par sa nature, la *limite* nécessaire vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de la fonction primitive et celui de sa variable, à mesure que ce dernier diminue indéfiniment, puisqu'elle exprime évidemment ce que devient ce rapport, en supposant nul l'accroissement de la variable. Ce qu'on désigne par $\frac{dy}{dx}$ dans la méthode de Leïbnitz, ce qu'on devrait noter $L\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dans celle de Newton, et ce que Lagrange a indiqué par $f'(x)$, est toujours une même fonction, envisagée sous trois points de vue différens; les considérations de Leïbnitz et de Newton, consistant proprement à faire connaître deux propriétés générales nécessaires de la fonction dérivée. L'analyse transcendante, examinée abstraitement, et dans son principe, est donc toujours la même, quelle que soit la conception qu'on adopte: les procédés du calcul des fonctions indirectes sont nécessairement identiques dans ces diverses méthodes, qui, pareillement, doivent, pour une application quelconque, conduire constamment à des résultats rigoureusement conformes.

Si maintenant nous cherchons à apprécier la valeur relative de ces trois conceptions équivalentes, nous trouverons dans chacune des avantages et des inconvéniens qui lui sont propres, et qui empêchent encore les géomètres de s'en tenir strictement à une seule d'entr'elles, considérée comme définitive.

La conception de Leïbnitz présente, incontestablement, dans l'ensemble des applications, une supériorité très-prononcée, en conduisant d'une manière beaucoup plus rapide, et avec bien moins d'efforts intellectuels, à la formation des

équations entre les grandeurs auxiliaires. C'est à son usage que nous devons la haute perfection qu'ont enfin acquise toutes les théories générales de la géométrie et de la mécanique. Quelles que soient les diverses opinions spéculatives des géomètres sur la méthode infinitésimale, envisagée abstraitement, tous s'accordent tacitement à l'employer de préférence, aussitôt qu'ils ont à traiter une question nouvelle, afin de ne point compliquer la difficulté nécessaire par cet obstacle purement artificiel, provenant d'une obstination déplacée à vouloir suivre une marche moins expéditive. Lagrange lui-même, après avoir reconstruit sur de nouvelles bases l'analyse transcendante, a rendu, avec cette haute franchise qui convenait si bien à son génie, un hommage éclatant et décisif aux propriétés caractéristiques de la conception de Leïbnitz, en la suivant exclusivement dans le système entier de la *mécanique analytique*. Un tel fait nous dispense, à ce sujet, de toute autre réflexion.

Mais quand on considère en elle-même, et sous le rapport logique, la conception de Leïbnitz, on ne peut s'empêcher de reconnaître avec Lagrange qu'elle est radicalement vicieuse, en ce que, suivant ses propres expressions, la notion des infiniment petits est une *idée fausse*, qu'il est impossible, en effet, de se représenter nettement, quoiqu'on se fasse quelquefois illusion à cet égard. L'analyse transcendante, ainsi conçue, présente, à mes yeux, cette grande imperfection philosophique, de se trouver encore essentiellement fondée sur ces principes métaphysiques, dont l'esprit humain a eu tant de peine à dégager toutes ses théories positives. Sous ce rapport, on peut dire que la méthode infinitésimale porte vraiment l'empreinte caractéristique de l'époque de sa fondation, et du génie propre de son fondateur. On peut bien, il est vrai, par l'ingénieuse idée de la compensation des erreurs, s'expliquer d'une manière générale, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'exactitude nécessaire des procédés généraux qui composent la méthode infinitésimale. Mais cela seul n'est-il pas un inconvénient radical, que d'être obligé de distinguer, en mathématique, deux classes de raisonnemens, ceux qui sont parfaitement rigoureux, et ceux dans lesquels on commet à dessein des erreurs qui devront se compenser plus tard? Une conception qui conduit à des conséquences aussi étranges, est, sans doute, rationnellement, bien peu satisfaisante.

Ce serait évidemment éluder la difficulté sans la résoudre, que de dire, comme on l'a fait quelquefois, qu'il est possible, par rapport à chaque question, de faire rentrer la méthode infinitésimale

proprement dite dans celle des limites, dont le caractère logique est irréprochable. D'ailleurs, une telle transformation enlève presqu'entièrement à la conception de Leïbnitz les avantages essentiels qui la recommandent si éminemment, quant à la facilité et à la rapidité des opérations intellectuelles.

Enfin n'eût-on même aucun égard aux importantes considérations qui précèdent, la méthode infinitésimale n'en présenterait pas moins évidemment, par sa nature, ce défaut capital de rompre l'unité de la mathématique abstraite, en créant un calcul transcendant fondé sur des principes si différens de ceux qui servent de base à l'analyse ordinaire. Ce partage de l'analyse en deux mondes presque indépendans, tend à empêcher la formation de conceptions analytiques véritablement générales. Pour en bien apprécier les conséquences, il faudrait se reporter, par la pensée, à l'état dans lequel se trouvait la science, avant que Lagrange eût établi entre ces deux grandes sections une harmonie générale et définitive.

Passant à la conception de Newton, il est évident que, par sa nature, elle se trouve à l'abri des objections logiques fondamentales que provoque la méthode de Leïbnitz. La notion des *limites* est, en effet, remarquable par sa netteté et par sa justesse. Dans l'analyse transcendante présentée de cette manière, les équations sont envisagées comme exactes dès l'origine, et les règles générales du raisonnement sont aussi constamment observées que dans l'analyse ordinaire. Mais, d'un autre côté, elle est bien loin d'offrir, pour la solution des problèmes, d'aussi puissantes ressources que la méthode infinitésimale. Cette obligation qu'elle impose de ne considérer jamais les accroissemens des grandeurs séparément et en eux-mêmes, ni seulement dans leurs rapports, mais uniquement dans les limites de ces rapports ralentit considérablement la marche de l'intelligence pour la formation des équations auxiliaires. On peut même dire qu'elle gêne beaucoup les transformations purement analytiques. Aussi le calcul transcendant, considéré séparément de ses applications, est-il loin d'offrir dans cette méthode l'étendue et la généralité que lui a imprimées la conception de Leïbnitz. C'est très-péniblement, par exemple, qu'on parvient à étendre la théorie de Newton aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Quoi qu'il en soit, c'est surtout par rapport aux applications, que l'infériorité relative de cette théorie se trouve marquée.

Je ne dois pas négliger à ce sujet de faire observer que plusieurs géomètres du continent, en

adoptant, comme plus rationnelle, la méthode de Newton, pour servir de base à l'analyse transcendante, ont déguisé en partie cette infériorité, par une grave inconséquence, qui consiste à appliquer à cette méthode la notation imaginée par Leïbnitz pour la méthode infinitésimale, et qui n'est réellement propre qu'à elle. En désignant par $\frac{dy}{dx}$ ce que, rationnellement, il faudrait, dans la théorie des limites, noter $L\frac{\Delta y}{\Delta x}$, et en étendant à toutes les autres notions analytiques ce déplacement de signes, on se propose sans doute de combiner les avantages spéciaux des deux méthodes; mais on ne parvient, en réalité, qu'à établir entr'elles une confusion vicieuse, dont l'habitude tend à empêcher de se former des idées nettes et exactes de l'une ou de l'autre. Il serait sans doute étrange, à considérer cet usage en lui-même, que, par le seul moyen des signes, on pût effectuer une véritable combinaison entre deux théories générales aussi distinctes.

Enfin la méthode des limites, présente aussi, quoiqu'à un moindre degré, l'inconvénient majeur que j'ai signalé ci-dessus, dans la méthode infinitésimale, d'établir une séparation totale entre l'analyse ordinaire et l'analyse transcendante. Car l'idée des *limites*, quoique nette et rigoureuse, n'en est pas moins, par elle-même, comme

Lagrange l'a remarqué, une idée étrangère, dont les théories analytiques ne devraient pas se trouver dépendantes.

Cette unité parfaite de l'analyse, ce caractère purement abstrait de ses notions fondamentales, se trouvent au plus haut degré dans la conception de Lagrange, et ne se trouvent que là. Elle est, pour cette raison, la plus rationnelle et la plus philosophique de toutes. Ecartant avec soin toute considération hétérogène, Lagrange a réduit l'analyse transcendante à son véritable caractère propre, celui d'offrir une classe très-étendue de transformations analytiques, à l'aide desquelles on facilite singulièrement l'expression des conditions des divers problèmes. En même temps, cette analyse s'est nécessairement présentée par là comme une simple extension de l'analyse ordinaire; elle n'a plus été qu'une algèbre supérieure. Toutes les diverses parties, jusqu'alors si incohérentes, de la mathématique abstraite, ont pu être conçues, dès ce moment, comme formant un système unique.

Malheureusement, une conception douée, indépendamment de la notation si simple et si lucide qui lui correspond, de propriétés aussi fondamentales, et qui est, sans doute, destinée à devenir la théorie définitive de l'analyse transcendante, à cause de sa haute supériorité philo-

sophique sur toutes les autres méthodes proposées, présente dans son état actuel, trop de difficultés, quant aux applications, lorsqu'on la compare à la conception de Newton, et surtout à celle de Leïbnitz, pour pouvoir être encore exclusivement adoptée. Lagrange lui-même, n'est parvenu que très-péniblement à retrouver, d'après sa méthode, les résultats principaux déjà obtenus par la méthode infinitésimale pour la solution des questions générales de géométrie et de mécanique; on peut juger par là combien on trouverait d'obstacles à traiter, de la même manière, des questions vraiment nouvelles et de quelque importance. Il est vrai que Lagrange, en plusieurs occasions, a montré que les difficultés, même articielles, déterminent, dans les hommes de génie, des efforts supérieurs, susceptibles de conduire à des résultats plus étendus. C'est ainsi qu'en tentant d'adapter sa méthode à l'étude de la courbure des lignes, qui paraissait si peu pouvoir en comporter l'application, il s'est élevé à cette belle théorie des contacts, qui a tant perfectionné cette partie importante de la géométrie. Mais, malgré ces heureuses exceptions, la conception de Lagrange n'en est pas moins jusqu'ici demeurée, dans son ensemble, essentiellement impropre aux applications.

Le résultat final de la comparaison générale que je viens d'esquisser, et qui exigerait de plus amples développemens, est donc, comme je l'avais avancé en commençant cette leçon, que, pour connaître réellement l'analyse transcendante, il faut non-seulement la considérer, dans son principe, d'après les trois conceptions fondamentales distinctes, produites par Leïbnitz, par Newton, et par Lagrange, mais, en outre, s'habituer à suivre presqu'indifféremment d'après ces trois méthodes principales, et surtout d'après les deux extrêmes, la solution de toutes les questions importantes, soit du calcul des fonctions indirectes en lui-même, soit de ses applications. C'est une marche que je ne saurais trop fortement recommander à tous ceux qui désirent juger philosophiquement cette admirable création de l'esprit humain, comme à ceux qui veulent essentiellement apprendre à se servir avec succès et avec facilité de ce puissant instrument. Dans toutes les autres parties de la science mathématique, la considération de diverses méthodes pour une seule classe de questions peut être utile, même indépendamment de l'intérêt historique qu'elle présente; mais elle n'est point indispensable: ici, au contraire, elle est strictement nécessaire.

Ayant déterminé avec précision, dans cette leçon, le caractère philosophique du calcul des

fonctions indirectes, d'après les principales conceptions fondamentales dont il est susceptible, il me reste maintenant à considérer, dans la leçon suivante, la division rationnelle et la composition générale de ce calcul.