SEPTIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Tableau général du calcul des fonctions indirectes.

Par suite des considérations exposées dans la leçon précédente, on conçoit que le calcul des fonctions indirectes se divise nécessairement en deux parties, ou, pour mieux dire, se décompose en deux calculs tout-à-fait distincts, quoique, par leur nature, intimement liés; suivant qu'on se propose de trouver les relations entre les grandeurs auxiliaires, dont l'introduction constitue l'esprit général de ce calcul, d'après les relations entre les grandeurs primitives correspondantes; ou qu'on cherche, en sens inverse, à découvrir ces équations directes d'après les équations indirectes établies immédiatement. Tel est, en effet, le double objet qu'on a continuellement en vue dans l'analyse transcendante.

Ces deux calculs ont reçu différens noms, selon le point de vue sous lequel a été envisagé l'ensemble de cette analyse. La méthode infinitésimale proprement dite étant jusqu'ici la plus usitée, par les raisons que j'ai discutées, presque tous les géomètres du continent emploient habituellement, pour désigner ces deux calculs, les dénominations de *calcul différentiel* et de *calcul intégral*, établies par Leïbnitz, et qui sont, en effet, des conséquences très-rationnelles de sa conception. Newton, d'après sa méthode, a nommé le premier, le *calcul des fluxions*, et le second le *calcul des fluentes*, expressions communément adoptées en Angleterre. Enfin, en suivant la théorie éminemment philosophique fondée par Lagrange, on appellerait l'un, le *calcul des fonctions dérivées* et l'autre *le calcul des fonctions primitives*. Je continuerai à me servir des termes de Leïbnitz, comme plus propres, dans notre langue, à la formation des expressions secondaires, quoique je doive, d'après les explications contenues dans la leçon précédente, employer concurremment toutes les diverses conceptions, en me rapprochant, autant que possible, de celle de Lagrange.

Le calcul différentiel est évidemment la base rationnelle du calcul intégral. Car nous ne savons et ne pouvons savoir intégrer immédiatement que les expressions différentielles produites par la différentiation des diverses fonctions simples qui constituent les élémens généraux de notre analyse.

L'art de l'intégration consiste ensuite essentiellement à ramener, autant que possible, tous les autres cas à ne dépendre finalement que de ce petit nombre d'intégrations fondamentales.

En considérant l'ensemble de l'analyse transcendante, tel que je l'ai caractérisé dans la leçon précédente, on ne voit pas d'abord quelle peut être l'utilité propre du calcul différentiel, indépendamment de cette relation nécessaire avec le calcul intégral, qui semble devoir être, par lui-même, le seul directement indispensable. En effet, l'élimination des infinitésimales ou des dérivées, introduites comme auxiliaires pour faciliter l'établissement des équations, constituant, d'après ce que nous avons vu, l'objet définitif et invariable du calcul des fonctions indirectes; il est naturel de penser que le calcul qui enseigne à déduire des équations entre ces grandeurs auxiliaires, celles qui ont lieu entre les grandeurs primitives elles-mêmes, doit strictement suffire aux besoins généraux de l'analyse transcendante, sans qu'on aperçoive, au premier coup-d'œil, quelle part spéciale et constante peut avoir, dans une telle analyse, la solution de la question inverse. Ce serait abusivement que, suivant l'usage ordinaire, pour expliquer l'influence directe et nécessaire propre au calcul différentiel, on lui assignerait la destination de former les équations différentielles, d'où le calcul intégral fait parvenir ensuite aux équations finies. Car la formation primitive des équations différentielles n'est, et ne peut être, à proprement parler, l'objet d'aucun calcul, puisqu'elle constitue, au contraire, par sa nature, le point de départ indispensable de tout calcul quelconque. Comment, en particulier, le calcul différentiel qui, par lui-même, se réduit à enseigner les moyens de *différentier* les diverses équations, pourrait-il être un procédé général pour en établir? Ce qui, dans toute application de l'analyse transcendante, facilite en effet la formation des équations, c'est la *méthode* infinitésimale, et non le *calcul* infinitésimal, qui en est parfaitement distinct, quoiqu'en étant le complément indispensable. Une telle considération donnerait donc une fausse idée de la destination spéciale qui caractérise le calcul différentiel dans le système général de l'analyse transcendante.

Mais ce serait, néanmoins, concevoir bien imparfaitement la véritable importance propre de cette première branche du calcul des fonctions indirectes, que d'y voir seulement un simple travail préliminaire, n'ayant d'autre objet général et essentiel que de préparer au calcul intégral des fondemens indispensables. Comme les idées sont ordinairement confuses à cet égard, je crois devoir expliquer sommairement ici cette importante

relation, telle que je la conçois, et montrer que, dans chaque application quelconque de l'analyse transcendante, une première part directe et nécessaire est constamment assignée au calcul différentiel.

En formant les équations différentielles d'un phénomène quelconque, il est bien rare qu'on se borne à introduire différentiellement les seules grandeurs dont on cherche les relations. S'imposer cette condition, ce serait diminuer inutilement les ressources que présente l'analyse transcendante pour l'expression des lois mathématiques des phénomènes. Le plus souvent on fait entrer aussi par leurs différentielles, dans ces équations premières, d'autres grandeurs, dont la relation est déjà connue ou supposée l'être, et sans la considération desquelles il serait fréquemment impossible d'établir les équations. C'est ainsi, par exemple, que dans le problème général de la rectification des courbes, l'équation différentielle,

$$ds^2 = dy^2 + dx^2, \text{ ou } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

n'est pas seulement établie entre la fonction cherchée s et la variable indépendante x à laquelle on veut la rapporter; mais on a introduit en même temps, comme intermédiaires indispensables, les différentielles d'une ou deux autres fonctions y et z, qui sont au nombre des données du problème ; il n'eût pas été possible de former immédiatement l'équation entre *ds* et *dx*, qui serait d'ailleurs particulière à chaque courbe considérée. Il en est de même pour la plupart des questions. Or, dans ces cas, il est évident que l'équation différentielle n'est pas immédiatement propre à l'intégration. Il faut, auparavant, que les différentielles des fonctions supposées connues, qui ont été employées comme intermédiaires, soient entièrement éliminées, afin que les équations se trouvent établies entre les différentielles des seules fonctions cherchées et celles des variables réellement indépendantes, après quoi la question ne dépend plus effectivement que du calcul intégral. Or, cette élimination préparatoire de certaines différentielles, afin de réduire les infinitésimales au plus petit nombre possible, est simplement du ressort du calcul différentiel. Car elle doit se faire, évidemment, en déterminant, d'après les équations entre les fonctions supposées connues prises pour intermédiaires, les relations de leurs différentielles, ce qui n'est qu'une question de différentiation. Ainsi, par exemple, dans le cas des rectifications, il faudra d'abord calculer *dy* ou *dy* et *dz*, en différentiant, l'équation ou les équations de chaque courbe proposée; et, d'après ces expressions, la formule différentielle générale énoncée ci-dessus ne contiendra plus que *ds* et *dx*; parvenue à ce point, l'élimination des infinitésimales ne peut plus être achevée que par le calcul intégral.

Tel est donc l'office général nécessairement propre au calcul différentiel dans la solution totale des questions qui exigent l'emploi de l'analyse transcendante : préparer, autant que possible, l'élimination des infinitésimales, c'est-à-dire réduire, dans chaque cas, les équations différentielles primitives à ne plus contenir que les différentielles des variables réellement indépendantes et celles des fonctions cherchées, en faisant disparaître, par la différentiation, les différentielles de toutes les autres fonctions connues qui ont pu être prises pour intermédiaires lors de la formation des équations différentielles du problème.

Pour certaines questions, qui, quoiqu'en petit nombre, n'en ont pas moins, ainsi que nous le verrons plus tard, une très-grande importance, les grandeurs cherchées se trouvent même entrer directement, et non par leurs différentielles, dans les équations différentielles primitives, qui ne contiennent alors différentiellement que les diverses fonctions connues, employées comme intermédiaires d'après l'explication précédente. Ces cas sont, de tous, les plus favorables, car, il est évident que le calcul différentiel suffit alors entièrement à l'élimination complète des infinitésimales, sans que la question puisse donner lieu à aucune intégration. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le problème des tangentes, en géométrie; dans celui des vitesses, en mécanique, etc.

Enfin, plusieurs autres questions, dont le nombre est aussi fort petit, mais dont l'importance n'est pas moins grande, présentent un second cas d'exception, qui est, par sa nature, exactement l'inverse du précédent. Ce sont celles où les équations différentielles se trouvent être immédiatement propres à l'intégration, parce qu'elles ne contiennent, dès leur première formation, que les infinitésimales relatives aux fonctions cherchées ou aux variables réellement indépendantes, sans qu'on ait été obligé d'introduire différentiellement d'autres fonctions comme intermédiaires. Si, dans ces nouveaux cas, on a effectivement employé ces dernières fonctions, comme, par hypothèse, elles entreront directement et non par leurs différentielles, l'algèbre ordinaire suffira pour les éliminer, et réduire la question à ne plus dépendre que du calcul intégral. Le calcul différentiel n'aura donc alors aucune part spéciale à la solution complète du problème, qui sera tout entière du ressort du calcul intégral. La question générale des quadratures en offre un exemple important, car l'équation différentielle étant alors, $dA=ydx$, deviendra immédiatement propre à l'intégration aussitôt qu'on aura éliminé, d'après l'équation de la courbe proposée, la fonction intermédiaire y, qui n'y entre point différentiellement : la même circonstance a lieu pour le problème des cubatures, et pour quelques autres aussi essentiels.

En résultat général des considérations précédentes, il faut donc partager en trois classes les questions mathématiques qui exigent l'emploi de l'analyse transcendante: la première classe comprend les problèmes susceptibles d'être entièrement résolus au moyen du seul calcul différentiel, sans aucun besoin du calcul intégral; la seconde, ceux qui sont, au contraire, entièrement du ressort du calcul intégral, sans que le calcul différentiel ait aucune part à leur solution; enfin, dans la troisième et la plus étendue, qui constitue le cas normal, les deux autres n'étant que d'exception, les deux calculs ont successivement une part distincte et nécessaire à la solution complète du problème, le calcul différentiel faisant subir aux équations différentielles primitives, une préparation indispensable à l'application du calcul intégral. Telles sont exactement les relations générales de ces deux calculs, dont on se forme communément des idées trop peu précises.

Jetons maintenant un coup-d'œil général sur la composition rationelle de chacun d'eux, en commençant, comme il convient évidemment, par le calcul différentiel.

Dans l'exposition de l'analyse transcendante, on a l'habitude de mêler à la partie purement analytique, qui se réduit au traité abstrait de la différentiation et de l'intégration, l'étude de ses diverses applications principales, surtout de celles qui concernent la géométrie. Cette confusion d'idées, qui est une suite du mode effectif suivant lequel la science s'est développée, présente, sous le rapport dogmatique, de graves inconvéniens en ce qu'elle empêche de concevoir convenablement, soit l'analyse, soit la géométrie. Devant considérer ici la coordination la plus rationnelle possible, je ne comprendrai, dans le tableau suivant, que le calcul des fonctions indirectes proprement dit, réservant, pour la portion de ce volume relative à l'étude philosophique de la mathématique concrète, l'examen général de ses grandes applications géométriques et mécaniques (1).

La division fondamentale du calcul différentiel pur, ou du traité général de la différentiation, consiste à distinguer deux cas, suivant que les

(1) J'ai établi depuis long-temps, dans mon enseignement ordinaire de l'analyse transcendante, l'ordre que je vais exposer. Un nouveau professeur d'analyse transcendante à l'École Polytechnique, avec lequel je me félicite de m'être rencontré, M. Mathieu a adopté, dans son cours de cette année, une marche essentiellement semblable.

fonctions analytiques qu'il s'agit de différentier sont *explicites* ou *implicites*; d'où deux parties ordinairement désignées par les noms de différentiation *des formules* et différentiation *des équations*. Il est aisé de concevoir *à priori* l'importance de cette classification. En effet, une telle distinction serait illusoire si l'analyse ordinaire était parfaite, c'est-à-dire, si l'on savait résoudre algébriquement toutes les équations; car alors il serait possible de rendre *explicite* toute fonction *implicite*; et, en ne la différentiant que dans cet état, la seconde partie du calcul différentiel rentrerait immédiatement dans la première, sans donner lieu à aucune nouvelle difficulté. Mais la résolution algébrique des équations étant, comme nous l'avons vu, encore presque dans l'enfance, et ignorée jusqu'à présent pour le plus grand nombre des cas, on comprend qu'il en doit être tout autrement; puisqu'il s'agit dès lors, à proprement parler, de différentier une fonction sans la connaître, bien qu'elle soit déterminée. La différentiation des fonctions implicites constitue donc, par sa nature, une question vraiment distincte de celle que présentent les fonctions explicites, et nécessairement plus compliquée. Ainsi c'est évidemment par la différentiation des formules qu'il faut commencer, et on parvient ensuite à ramener généralement à ce premier cas la différentiation des équations, par certaines considérations analytiques invariables, que je ne dois pas mentionner ici.

Ces deux cas généraux de la différentiation sont encore distincts sous un autre rapport également nécessaire, et trop important pour que je néglige de le signaler. La relation obtenue entre les différentielles est constamment plus indirecte, par rapport à celle des quantités finies, dans la différentiation des fonctions implicites que dans celle des fonctions explicites. On sait, en effet, d'après les considérations présentées par Lagrange sur la formation générale des équations différentielles, que, d'une part, la même équation primitive peut donner lieu à un plus ou moins grand nombre d'équations dérivées de formes très-diverses, quoique, au fond, équivalentes, suivant celles des constantes arbitraires que l'on élimine, ce qui n'a pas lieu dans la différentiation des formules explicites; et que, d'une autre part, le système infini d'équations primitives différentes qui correspondent à une même équation dérivée, présente une variété analytique bien plus profonde que celle des diverses fonctions susceptibles d'une même différentielle explicite, et qui ne se distinguent les unes des autres que par un terme constant. Les fonctions implicites doivent donc être envisagées comme étant réellement encore

plus modifiées par la différentiation que les fonctions explicites. Nous retrouverons tout à l'heure cette considération relativement au calcul intégral, où elle acquiert une importance prépondérante.

Chacune des deux parties fondamentales du calcul différentiel se subdivise elle-même en deux théories très-distinctes, suivant qu'il s'agit de différentier des fonctions à une seule variable, ou des fonctions à plusieurs variables indépendantes. Ce second cas est, par sa nature, tout-à-fait distinct du premier, et présente évidemment plus de complication, même en ne considérant que les fonctions explicites, et à plus forte raison pour les fontions implicites. Du reste, l'un se déduit généralement de l'autre, à l'aide d'un principe invariable fort simple, qui consiste à regarder la différentielle totale d'une fonction en vertu des accroissemens simultanés des diverses variables indépendantes qu'elles contient, comme la somme des différentielles partielles que produirait l'accroissement séparé de chaque variable successivement, si toutes les autres étaient constantes. Il faut, d'ailleurs, soigneusement remarquer à ce sujet une notion nouvelle qu'introduit, dans le système de l'analyse transcendante, la distinction des fonctions à une seule variable et à plusieurs: c'est la considération de ces diverses fonctions dérivées spéciales, relatives à chaque variable isolément, et dont le nombre croît de plus en plus à mesure que l'ordre de la dérivation s'élève, et aussi quand les variables sont plus multipliées. Il en résulte que les relations différentielles propres aux fonctions de plusieurs variables, sont, par leur nature, et bien plus indirectes, et surtout beaucoup plus indéterminées que celles relatives aux fonctions d'une seule variable. Cela est principalement sensible pour les fonctions implicites où, au lieu des simples constantes arbitraires que l'élimination fait disparaître quand on forme les équations différentielles propres aux fonctions d'une seule variable, ce sont des fonctions arbitraires des variables proposées qui se trouvent éliminées, d'où doivent résulter, lors des intégrations, des difficultés spéciales.

Enfin, pour compléter ce tableau sommaire des diverses parties essentielles du calcul différentiel proprement dit, je dois ajouter que, dans la différentiation des fonctions implicites, soit à une seule variable, soit à plusieurs, il faut encore distinguer le cas où il s'agit de différentier à la fois diverses fonctions de ce genre, mêlées dans certaines équations primitives, de celui où toutes ces fonctions sont séparées.

Les fonctions sont évidemment, en effet, encore plus implicites dans le premier cas que dans le

second, si l'on considère que la même imperfection de l'analyse ordinaire, qui empêche de convertir toute fonction implicite en une fonction explicite équivalente, ne permet pas davantage de séparer les fonctions qui entrent simultanément dans un système quelconque d'équations. Il s'agit alors de différentier, non-seulement sans savoir résoudre les équations primitives, mais même sans pouvoir effectuer entr'elles les éliminations convenables, ce qui constitue une nouvelle difficulté.

Tels sont donc l'enchaînement naturel et la distribution rationnelle des diverses théories principales dont se compose le traité général de la différentiation. On voit que, la différentiation des fonctions implicites se déduisant de celle des fonctions explicites par un seul principe constant, et la différentiation des fonctions à plusieurs variables se ramenant, par un autre principe fixe, à celle des fonctions à une seule variable, tout le calcul différentiel se trouve reposer, en dernière analyse, sur la différentiation des fonctions explicites à une seule variable, la seule qui s'exécute jamais directement. Or, il est aisé de concevoir que cette première théorie, base nécessaire du système entier, consiste simplement dans la différentiation des dix fonctions simples, qui sont les élémens uniformes de toutes nos combinaisons analytiques, et dont j'ai présenté le tableau (4ᵉ leçon, page 173). Car la différentiation des fonctions composées se déduit évidemment, d'une manière immédiate et nécessaire, de celle des fonctions simples qui les constituent. C'est donc à la connaissance de ces dix différentielles fondamentales, et à celle des deux principes généraux, ci-dessus mentionnés, qui y ramènent tous les autres cas possibles, que se réduit, à proprement parler, tout le traité de la différentiation. On voit, par la combinaison de ces diverses considérations, combien est à la fois simple et parfait le système entier du calcul différentiel proprement dit. Il constitue certainement, sous le rapport logique, le spectacle le plus intéressant que l'analyse mathématique puisse présenter à notre intelligence.

Le tableau général que je viens d'esquisser sommairement offrirait, néanmoins, une lacune essentielle, si je n'indiquais ici distinctement une dernière théorie, qui forme, par sa nature, le complément indispensable du traité de la différentiation. C'est celle qui a pour objet la transformation constante des fonctions dérivées, en résultat des changemens déterminés de variables indépendantes, d'où résulte la possibilité de rapporter à de nouvelles variables toutes les formules différentielles générales établies primitivement

pour d'autres. Cette question est maintenant résolue de la manière la plus complète et la plus simple, comme toutes celles dont se compose le calcul différentiel. On conçoit aisément l'importance générale qu'elle doit avoir dans les applications quelconques de l'analyse transcendante, dont elle peut être considérée comme augmentant les ressources fondamentales, en permettant de choisir, pour former d'abord plus aisément les équations différentielles, le système de variables indépendantes qui paraîtra le plus avantageux, bien qu'il ne doive pas être maintenu plus tard. C'est ainsi, par exemple, que la plupart des questions principales de la géométrie se résolvent beaucoup plus aisément en rapportant les lignes et les surfaces à des coordonnées rectilignes, et qu'on peut néanmoins être conduit à les appliquer à des formes exprimées analytiquement, à l'aide de coordonnées *polaires*, ou de toute autre manière. On pourra commencer alors la solution différentielle du problème en employant toujours le système rectiligne, mais seulement comme un intermédiaire, d'après lequel, par la théorie générale que nous avons en vue ici, on passera au système définitif, qu'il eût été quelquefois impossible de considérer directement.

Dans la classification rationnelle que je viens d'exposer pour l'ensemble du calcul différentiel, on serait naturellement tenté de signaler une omission grave, puisque je n'ai pas sous-divisé chacune des quatre parties essentielles d'après une autre considération générale, qui semble d'abord fort importante en elle-même, celle de l'ordre plus ou moins élevé de la différentiation. Mais il est aisé de comprendre que cette distinction n'a aucune influence réelle dans le calcul différentiel, en ce qu'elle n'y donne lieu à aucune difficulté nouvelle. En effet, si le calcul différentiel n'était pas rigoureusement complet, c'est-à-dire, si on ne savait point différentier indistinctement toute fonction quelconque, la différentiation au second ordre, ou à un ordre supérieur, de chaque fonction déterminée, pourrait engendrer des difficultés spéciales. Mais la parfaite universalité du calcul différentiel donne évidemment l'assurance de pouvoir différentier à un ordre quelconque toutes les fonctions analytiques connues, la question se réduisant sans cesse à une différentiation au premier ordre, successivement redoublée. Ainsi, la considération des divers ordres de différentielles peut bien donner naissance à de nouvelles remarques plus ou moins importantes, surtout en ce qui concerne la formation des équations différentielles, et les dérivées partielles successives des fonctions à plusieurs variables. Mais elle ne saurait, évidemment, constituer aucun nouveau pro-

blème général dans le traité de la différentiation. Nous verrons tout à l'heure que cette distinction, qui n'a, pour ainsi dire, aucune importance dans le calcul différentiel, en acquiert, au contraire, une très-grande dans le calcul intégral, en vertu de l'extrême imperfection de ce dernier calcul.

Enfin, quoique j'aie cru, en thèse générale, ne devoir nullement envisager en ce moment les diverses applications principales du calcul différentiel, il convient néanmoins de faire une exception pour celles qui consistent dans la solution de questions purement analytiques, qui doivent, en effet, être rationnellement placées à la suite du traité de la différentiation proprement dite, à cause de l'homogénéité évidente des considérations. Ces questions peuvent se réduire à trois essentielles: 1° le développement en séries des fonctions à une seule ou à plusieurs variables, ou, plus généralement, la transformation des fonctions, qui constitue la plus belle et la plus importante application du calcul différentiel à l'analyse générale, et qui comprend, outre la série fondamentale découverte par Taylor, les séries si remarquables trouvées par Maclaurin, par Jean Bernouilli, par Lagrange, etc.; 2° la théorie générale des valeurs maxima et minima pour les fonctions quelconques à une seule ou à plusieurs variables, un des plus intéressans problèmes que puisse présenter l'analyse, quelque élémentaire qu'il soit devenu aujourd'hui, et à la solution complète duquel le calcul différentiel s'applique très-naturellement; 3° enfin, la détermination générale de la vraie valeur des fonctions qui se présentent sous une apparence indéterminée pour certaines hypothèses faites sur les valeurs des variables correspondantes, ce qui est le problème le moins étendu et le moins important des trois, quoiqu'il mérite d'être noté ici. La première question est, sans contredit, la principale sous tous les rapports: elle est aussi la plus susceptible d'acquérir dans la suite une extension nouvelle, surtout en concevant, d'une manière plus large qu'on ne l'a fait jusqu'ici, l'emploi du calcul différentiel pour la transformation des fonctions, au sujet de laquelle Lagrange a laissé quelques indications précieuses, qui n'ont encore été ni généralisées ni suivies.

Je regrette beaucoup d'être obligé, par les limites nécessaires de cet ouvrage, de me borner à des considérations sommaires aussi insuffisantes sur tous les divers sujets que je viens de passer en revue, et qui comporteraient, par leur nature, des développemens beaucoup plus étendus, en continuant toujours néanmoins à rester dans les généralités qui sont le sujet propre de ce cours. Je passe maintenant à l'exposition également rapide du tableau systématique du calcul intégral proprement dit, c'est-à-dire du traité abstrait de l'intégration.

La division fondamentale du calcul intégral est fondée sur le même principe que celle ci-dessus exposée pour le calcul différentiel, en distinguant l'intégration des formules différentielles explicites, et l'intégration des différentielles implicites, ou des équations différentielles. La séparation de ces deux cas est même bien plus profonde relativement à l'intégration, que sous le simple rapport de la différentiation. Dans le calcul différentiel, en effet, cette distinction ne repose, comme nous l'avons vu, que sur l'extrême imperfection de l'analyse ordinaire. Mais, au contraire, il est aisé de voir que, quand même toutes les équations seraient résolues algébriquement, les équations différentielles n'en constitueraient pas moins un cas d'intégration tout-à-fait distinct de celui que présentent les formules différentielles explicites. Car, en se bornant, par exemple, au premier ordre et à une fonction unique y d'une seule variable x, pour plus de simplicité, si l'on suppose résolue, par rapport à $\frac{dy}{dx}$, une équation différentielle quelconque entre x, y, et $\frac{dy}{dx}$, l'expression de la fonction dérivée se trouvant alors contenir généralement la fonction primitive elle-même qui est l'objet de la recherche, la question d'intégration n'aurait nullement changé de nature, et la solution n'aurait fait réellement d'autre progrès que d'avoir amené l'équation différentielle, proposée à ne plus être que du premier degré relativement à la fonction dérivée, ce qui est, en soi, de peu d'importance. La différentielle n'en serait donc pas moins déterminée d'une manière à peu près aussi *implicite* qu'auparavant, sous le rapport de l'intégration, qui continuerait à présenter essentiellement la même difficulté caractéristique. La résolution algébrique des équations ne pourrait faire rentrer le cas que nous considérons dans la simple intégration des différentielles explicites, que dans les occasions très-particulières où l'équation différentielle proposée ne contiendrait point la fonction primitive elle-même, ce qui permettrait, par conséquent, en la résolvant, de trouver $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x seulement, et de réduire ainsi la question aux quadratures.

La considération que je viens d'indiquer pour les équations différentielles les plus simples aurait évidemment encore plus d'importance pour celles des ordres supérieurs ou qui contiendraient simultanément diverses fonctions de plusieurs variables indépendantes. Ainsi, l'intégration des différentielles qui ne sont déterminées qu'implicitement constitue par sa nature, et, sans aucun égard à l'état de l'al-

gèbre, un cas entièrement distinct de celui relatif aux différentielles explicitement exprimées en fonction des variables indépendantes. L'intégration des équations différentielles est donc nécessairement plus compliquée que celle des différentielles explicites, par l'élaboration desquelles le calcul intégral a pris naissance, et dont ensuite on s'est efforcé de faire, autant que possible, dépendre les autres. Tous les divers procédés analytiques proposés jusqu'ici pour intégrer les équations différentielles, soit la séparation des variables, soit la méthode des multiplicateurs, etc, ont en effet pour but de ramener ces intégrations à celles des formules différentielles, la seule qui, par sa nature, puisse être entreprise directement. Malheureusement, quelqu'imparfaite que soit jusqu'ici cette base nécessaire de tout le calcul intégral, l'art d'y réduire l'intégration des équations différentielles est encore bien moins avancé.

Chacune de ces deux branches fondamentales du calcul intégral se sous-divise ensuite en deux autres, comme dans le calcul différentiel, et par des motifs exactement analogues (que je me dispenserai, par conséquent, de reproduire), suivant que l'on considère des fonctions à une seule variable ou des fonctions à plusieurs variables indépendantes. Je ferai seulement observer que cette distinction est, comme la précédente, encore plus importante pour l'intégration que pour la différentiation. Cela est surtout remarquable, relativement aux équations différentielles. En effet, celles qui se rapportent à plusieurs variables indépendantes peuvent évidemment présenter cette difficulté caractéristique, et d'un ordre bien plus élevé, que la fonction cherchée soit définie différentiellement par une simple relation entre ses diverses dérivées spéciales relatives aux différentes variables prises séparément. De là résulte la branche la plus difficile, et aussi la plus étendue du calcul intégral, ce qu'on nomme ordinairement le *calcul intégral aux différences partielles*, créé par d'Alembert, et dans lequel, suivant la juste appréciation de Lagrange, les géomètres auraient dû voir réellement un calcul nouveau, dont le caractère philosophique n'est pas assez exactement jugé. Une différence très-saillante entre ce cas et celui des équations à une seule variable indépendante consiste, comme je l'ai observé ci-dessus, dans les fonctions arbitraires qui remplacent les simples constantes arbitraires pour donner aux intégrales correspondantes toute la généralité convenable.

A peine ai-je besoin de dire que cette branche supérieure de l'analyse transcendante est encore entièrement dans l'enfance, puisque, seulement dans le cas le plus simple, celui d'une équation du premier ordre entre les dérivées partielles d'une seule fonction à deux variables indépendantes, on ne sait point même jusqu'ici complétement ramener l'intégration à celle des équations différentielles ordinaires. L'intégration relative aux fonctions de plusieurs variables est beaucoup plus avancée, dans le cas, infiniment plus simple, à la vérité, où il ne s'agit que des formules différentielles explicites. On sait alors en effet, quand ces formules remplissent les conditions convenables d'intégrabilité, réduire constamment leur intégration aux quadratures.

Une nouvelle distinction générale, applicable, comme sous-division, à l'intégration des différentielles explicites ou implicites, à une seule variable ou à plusieurs, se tire de l'ordre plus ou moins élevé des différentiations, qui ne donne lieu à aucune question spéciale dans le calcul différentiel, ainsi que nous l'avons remarqué.

Relativement aux différentielles explicites, soit à une variable, soit à plusieurs, la nécessité de distinguer leurs divers ordres ne tient qu'à l'extrême imperfection du calcul intégral. En effet, si l'on savait constamment intégrer toute formule différentielle du premier ordre, l'intégration d'une formule du second ordre ou de tout autre ne constituerait point, évidemment, une question nouvelle, puisqu'en l'intégrant d'abord au premier ordre, on parviendrait à l'expression différentielle de l'ordre immédiatement précédent, d'où, par une suite convenable d'intégrations analogues, on serait certain de remonter finalement à la fonction primitive, objet propre d'un tel travail. Mais le peu de connaissances que nous possédons sur les intégrations premières fait qu'il n'en est point ainsi, et que l'ordre plus ou moins élevé des différentielles engendre des difficultés nouvelles. Car, ayant des formules différentielles d'un ordre quelconque supérieur au premier, il peut arriver qu'on sache les intégrer une première fois ou plusieurs fois de suite, et que, néanmoins, on ne puisse re monter ainsi aux fonctions primitives, si ces travaux préliminaires ont produit, pour les différentielles d'un ordre inférieur, des expressions dont les intégrales ne sont pas connues. Cette circonstance doit se présenter d'autant plus fréquemment, le nombre des intégrales connues étant encore fort petit, que ces intégrales successives sont généralement, comme on sait, des fonctions très-différentes des dérivées qui les ont engendrées.

Par rapport aux différentielles implicites, la distinction des ordres est encore plus importante; car, outre le motif précédent, dont l'influence est évidemment ici analogue, et même à un plus haut degré, il est aisé de sentir que l'ordre supérieur des équations différentielles donne lieu nécessairement à des questions d'une nature nouvelle. En effet, sût-on même intégrer indistinctement toute équation du premier ordre rela-

tive à une fonction unique, cela ne suffirait point pour faire obtenir l'intégrale définitive d'une équation d'un ordre quelconque, toute équation différentielle n'étant pas réductible à celle d'un ordre immédiatement inférieur. Si l'on a par exemple, pour déterminer une fonction y de la variable x, une relation quelconque entre x, y, $\frac{dy}{dx}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on n'en pourra point déduire immédiatement, en effectuant une première intégration, la relation différentielle correspondante entre x, y, et $\frac{dy}{dx}$, d'où, par une seconde intégration on remonterait à l'équation primitive. Cela n'aurait lieu nécessairement, du moins sans introduire de nouvelles fonctions auxiliaires, que si l'équation du second ordre proposée ne contenait point la fonction cherchée y, concourremment avec ses dérivées. En thèse générale, les équations différentielles devront donc réellement être envisagées comme présentant des cas d'autant plus *implicites* que leur ordre est plus élevé, et qui ne pourront rentrer les uns dans les autres que par des méthodes spéciales, dont la recherche constitue, par conséquent, une nouvelle classe de questions, à l'égard desquelles on ne sait jusqu'ici presque rien, même pour les fonctions d'une seule variable (1).

(1) Le seul cas important de ce genre qui ait été complétement traité jusqu'ici, est l'intégration générale des équations *linéaires* d'un ordre quelconque, à coefficiens constans. Encore se trouve-

Au reste, quand on examine, d'une manière très-approfondie, cette distinction des divers ordres d'équations différentielles, on trouve qu'elle pourrait rentrer constamment dans une dernière distinction générale, relative aux équations différentielles, que j'ai encore à signaler. En effet, les équations différentielles à une seule ou à plusieurs variables indépendantes peuvent ne contenir simplement qu'une seule fonction, ou bien, dans un cas évidemment plus compliqué et plus implicite, qui correspond à la différentiation des fonctions implicites simultanées, on peut avoir à déterminer en même temps plusieurs fonctions d'après des équations différentielles où elles se trouvent mêlées, concurremment avec leurs diverses dérivées. Il est clair qu'un tel état de la question présente nécessairement une nouvelle difficulté spéciale, celle d'établir la séparation des différentes fonctions cherchées, en formant pour chacune, d'après les équations différentielles proposées, une équation différentielle isolée, qui ne contienne plus les autres fonctions ni leurs dérivées. Ce travail préliminaire, qui est l'analogue de l'élimination en algèbre, est évidemment indispensable avant de tenter aucune intégration directe, puisqu'on ne peut entreprendre généralement, à moins d'artifices spéciaux

t-elle dépendre finalement de la résolution algébrique des équations d'un degré égal à l'ordre de la différentiation.

très-rarement applicables, de déterminer immédiatement à la fois plusieurs fonctions distinctes. Or, il est aisé d'établir la coïncidence exacte et nécessaire de cette nouvelle distinction avec la précédente, relative à l'ordre des équations différentielles. On sait, en effet, que la méthode générale pour isoler les fonctions dans les équations différentielles simultanées, consiste essentiellement à former des équations différentielles, séparément relatives à chaque fonction, et dont l'ordre est égal à la somme de tous ceux des diverses équations proposées. Cette transformation peut s'effectuer constamment. D'un autre côté, toute équation différentielle d'un ordre quelconque relative à une seule fonction pourrait évidemment se ramener toujours au premier ordre, en introduisant un nombre convenable d'équations différentielles auxiliaires, contenant simultanément les diverses dérivées antérieures considérées comme nouvelles fonctions à déterminer. Ce procédé a même été quelquefois employé avec succès, quoique, en général, il ne soit pas normal. Ce sont donc deux genres de conditions nécessairement équivalens, dans la théorie générale des équations différentielles, que la simultanéité d'un plus ou moins grand nombre de fonctions, et l'ordre de différentiation plus ou moins élevé d'une fonction unique. En augmentant l'ordre des équations