différentielles, on peut isoler toutes les fonctions; et, en multipliant artificiellement le nombre des fonctions, on peut ramener toutes les équations au premier ordre. Il n'y a, par conséquent, dans l'un et l'autre cas, qu'une même difficulté, envisagée sous deux points de vue différens. Mais, de quelque manière qu'on la conçoive, cette nouvelle difficulté commune n'en est pas moins réelle, et n'en constitue pas moins, par sa nature, une séparation tranchée entre l'intégration des équations du premier ordre et celle des équations d'un ordre supérieur. Je préfère indiquer la distinction sous cette dernière forme, comme plus simple, plus générale et plus rationnelle.

D'après les diverses considérations indiquées ci-dessus sur l'enchaînement rationnel des différentes parties principales du calcul intégral, on voit que l'intégration des formules différentielles explicites du premier ordre à une seule variable est la base nécessaire de toutes les autres intégrations, qu'on ne parvient jamais à effectuer qu'autant qu'on peut les faire rentrer dans ce cas élémentaire, le seul évidemment qui, par sa nature, soit susceptible d'être traité directement. Cette intégration simple et fondamentale est souvent désignée par l'expression commode de *quadratures*, attendu que toute intégrale de ce genre $Sf(x)dx$, peut, en effet, être envisagée comme

représentant l'aire d'une courbe dont l'équation en coordonnées rectilignes serait $y=f(x)$. Une telle classe de questions correspond, dans le calcul différentiel, au cas élémentaire de la différentiation des fonctions explicites à une seule variable. Mais la question intégrale est, par sa nature, bien autrement compliquée, et surtout beaucoup plus étendue que la question différentielle. Celle-ci se réduit nécessairement, en effet, comme nous l'avons vu, à la différentiation des dix fonctions simples, élémens de toutes celles que l'analyse considère. Au contraire, l'intégration des fonctions composées ne se déduit point nécessairement de celle des fonctions simples, dont chaque nouvelle combinaison doit présenter, sous le rapport du calcul intégral, des difficultés spéciales. De là, l'étendue naturellement indéfinie, et la complication si variée de la question des quadratures, sur laquelle, malgré tous les efforts des analystes, on possède encore si peu de connaissances complètes.

En décomposant cette question, comme il est naturel de le faire, suivant les diverses formes que peut affecter la fonction dérivée, on distingue d'abord le cas des fonctions algébriques, et ensuite celui des fonctions transcendantes. L'intégration vraiment analytique de ce dernier ordre d'expressions est jusqu'ici fort peu avancée, soit pour les fonctions exponentielles, soit pour les fonctions logarithmiques, soit pour les fonctions circulaires. On n'a traité encore qu'un très-petit nombre de cas de ces trois divers genres, en les choisissant parmi les plus simples, qui conduisent même ordinairement à des calculs extrêmement pénibles. Ce que nous devons surtout remarquer à ce sujet sous le rapport philosophique, c'est que les divers procédés de quadrature ne tiennent à aucune vue générale sur l'intégration, et consistent en de simples artifices de calcul fort incohérens entre eux, et dont le nombre est très-multiplié, à cause de l'étendue très-bornée de chacun d'eux. Je dois cependant signaler ici un de ces artifices qui, sans être réellement une méthode d'intégration, est néanmoins remarquable par sa généralité : c'est le procédé inventé par Jean Bernouilli, et connu sous le nom de l'*intégration par parties*, d'après lequel toute intégrale peut être ramenée à une autre, qui se trouve quelquefois être plus facile à obtenir. Cette ingénieuse relation mérite d'être notée sous un autre rapport, comme ayant offert la première idée de cette transformation les unes dans les autres des intégrales encore inconnues, qui a reçu dans ces derniers temps une plus grande extension, et dont M. Fourier surtout a fait un usage si nouveau et si important pour

les questions analytiques engendrées par la théorie de la chaleur.

Quant à l'intégration des fonctions *algébriques*, elle est plus avancée. Cependant, on ne sait encore presque rien relativement aux fonctions irrationnelles, dont les intégrales n'ont été obtenues que dans des cas extrêmement bornés, et surtout en les rendant rationnelles. L'intégration des fonctions rationnelles est jusqu'ici la seule théorie de calcul intégral qui ait pu être traitée d'une manière vraiment complète : sous le rapport logique, elle en constitue donc la partie la plus satisfaisante, mais peut-être aussi la moins importante. Il est même essentiel de remarquer, pour avoir une juste idée de l'extrême imperfection du calcul intégral, que ce cas si peu étendu n'est entièrement résolu que pour ce qui concerne proprement l'intégration, envisagée d'une manière abstraite; car, dans l'exécution, la théorie se trouve le plus souvent, indépendamment de la complication des calculs, tout-à-fait arrêtée par l'imperfection de l'analyse ordinaire, attendu qu'elle fait dépendre finalement l'intégration de la résolution algébrique des équations, ce qui en limite singulièrement l'usage.

Pour saisir, d'une manière générale, l'esprit des divers procédés d'après lesquels on procède aux quadratures, nous devons reconnaître d'ailleurs que, par leur nature, ils ne peuvent être fondés primitivement que sur la différentiation des dix fonctions simples, dont les résultats, considérés sous le point de vue inverse, établissent autant de théorèmes immédiats de calcul intégral, les seuls qui puissent être connus directement, tout l'art de l'intégration consistant ensuite, comme je l'ai exprimé en commençant cette leçon, à faire rentrer, autant que possible, toutes les autres quadratures dans ce petit nombre de quadratures élémentaires, ce qui malheureusement nous est encore le plus souvent inconnu.

Dans cette énumération raisonnée des diverses parties essentielles de calcul intégral suivant leurs relations logiques, j'ai négligé à dessein, pour ne pas interrompre l'enchaînement, de considérer distinctement une théorie fort importante, qui forme implicitement une portion de la théorie générale de l'intégration des équations différentielles, mais que je dois ici signaler séparément, comme étant, pour ainsi dire, en dehors du calcul intégral, et offrant néanmoins le plus grand intérêt, soit par sa perfection rationnelle, soit par l'étende due ses applications. Je veux parler de ce qu'on appelle les solutions *singulières* des équations différentielles, dites quelquefois, mais à tort, solutions *particulières*, qui ont été le sujet de travaux très-remarquables de la part d'Euler

et de Laplace, et dont Lagrange surtout a présenté une si belle et si simple théorie générale. On sait que Clairaut, qui le premier, eut occasion d'en remarquer l'existence, y vit un paradoxe de calcul intégral, puisque ces solutions ont pour caractère propre de satisfaire aux équations différentielles sans être néanmoins comprises dans les intégrales générales correspondantes. Lagrange a, depuis, expliqué ce paradoxe de la manière la plus ingénieuse et la plus satisfaisante, en montrant comment de telles solutions dérivent toujours de l'intégrale générale par la variation des constantes arbitraires. Il a aussi, le premier, convenablement apprécié l'importance de cette théorie, et c'est avec raison qu'il lui a consacré, dans ses *leçons sur le calcul des fonctions*, un si grand développement. Sous le point de vue rationnel, cette théorie mérite en effet toute notre attention, par le caractère de parfaite généralité qu'elle comporte, puisque Lagrange a exposé des procédés invariables et fort simples pour trouver la solution *singulière* de toute équation différentielle quelconque qui en est susceptible; et, ce qui n'est pas moins remarquable, ces procédés n'exigent aucune intégration, consistant seulement dans des différentiations, et par là même toujours applicables. La différentiation est ainsi devenue, par un heureux artifice, un moyen de suppléer dans certaines circonstances à l'imperfection du calcul intégral. En effet, certains problèmes exigent surtout, par leur nature, la connaissance de ces solutions *singulières*. Telles sont, par exemple, en géométrie, toutes les questions où il s'agit de déterminer une courbe d'après une propriété quelconque de sa tangente ou de son cercle osculateur. Dans tous les cas de ce genre, après avoir exprimé cette propriété par une équation différentielle, ce sera, sous le rapport analytique, l'équation *singulière* qui constituera l'objet le plus important de la recherche, puisqu'elle seule représentera la courbe demandée, l'intégrale générale, qui devient dès lors inutile à connaître, ne devant désigner autre chose que le système des tangentes ou des cercles osculateurs de cette courbe. On conçoit aisément, d'après cela, toute l'importance de cette théorie, qui me semble n'être pas encore suffisamment appréciée par la plupart des géomètres.

Enfin, pour achever de signaler le vaste ensemble de recherches analytiques dont se compose le calcul intégral proprement dit, il me reste à mentionner une théorie fort importante dans toutes les applications de l'analyse transcendante, que j'ai dû laisser en dehors du système comme n'étant pas réellement destinée à une véritable intégration, et se proposant au contraire de remplacer la connaissance des intégrales vraiment analytiques, qui sont le plus souvent ignorées. On voit qu'il s'agit de la détermination des *intégrales définies*.

L'expression, toujours possible, des intégrales en séries indéfinies, peut d'abord être envisagée comme un heureux moyen général de compenser souvent l'extrême imperfection du calcul intégral. Mais l'emploi de telles séries, à cause de leur complication et de la difficulté de découvrir la loi de leurs termes, est ordinairement d'une médiocre utilité sous le rapport algébrique, bien qu'on en ait déduit quelquefois des relations fort essentielles. C'est surtout sous le rapport arithmétique que ce procédé acquiert une grande importance, comme moyen de calculer ce qu'on appelle les intégrales *définies*, c'est-à-dire, les valeurs des fonctions cherchées pour certaines valeurs déterminées des variables correspondantes.

Une recherche de cette nature correspond exactement, dans l'analyse transcendante, à la résolution numérique des équations dans l'analyse ordinaire. Ne pouvant obtenir le plus souvent la véritable intégrale, celle qu'on nomme par opposition, l'intégrale *générale* ou *indéfinie*, c'est-à-dire, la fonction qui, différentiée, a produit la formule différentielle proposée, les analystes ont dû s'attacher à déterminer, du moins, sans connaître une telle fonction, les valeurs numériques particulières qu'elle prendrait en assignant aux variables des valeurs désignées. C'est évidemment résoudre la question arithmétique, sans avoir préalablement résolu la question algébrique correspondante, qui, le plus souvent, est précisément la plus importante. Une telle analyse est donc par sa nature, aussi imparfaite que nous avons vu l'être la résolution numérique des équations. Elle présente, comme celle-ci, une confusion vicieuse du point de vue arithmétique avec le point de vue algébrique; d'où résultent, soit sous la rapport purement logique, soit relativement aux applications, des inconvéniens analogues. Je puis donc me dispenser de reproduire ici les considérations indiquées dans la cinquième leçon au sujet de l'algèbre. On conçoit néanmoins que, dans l'impossibilité où nous sommes presque toujours de connaître les véritables intégrales, il est de la plus haute importance d'avoir pu obtenir au moins cette solution incomplète et nécessairement insuffisante. Or, c'est à quoi on est heureusement parvenu aujourd'hui pour tous les cas, l'évaluation des intégrales définies ayant été ramenée à des méthodes entièrement générales, qui ne laissent à désirer, dans un grand nombre d'occasions, qu'une moindre complication des calculs, but vers lequel se dirigent aujourd'hui

toutes les transformations spéciales des analystes. Regardant maintenant comme parfaite cette sorte d'*arithmétique transcendante*, la difficulté, dans les applications, se réduit essentiellement à ne faire dépendre finalement la recherche proposée que d'une simple détermination d'intégrales définies, ce qui, évidemment, ne saurait être toujours possible, quelque habileté analytique qu'on puisse employer à effectuer une transformation aussi forcée.

Par l'ensemble des considérations indiquées dans cette leçon, on voit que, si le calcul différentiel constitue, de sa nature, un système limité et parfait auquel il ne reste plus à ajouter rien d'essentiel, le calcul intégral proprement dit, ou le simple traité de l'intégration, présente nécessairement un champ inépuisable à l'activité de l'esprit humain, indépendamment des applications indéfinies dont l'analyse transcendante est évidemment susceptible. Les motifs généraux par lesquels j'ai tâché de faire sentir, dans la cinquième leçon, l'impossibilité de découvrir jamais la résolution algébrique des équations d'un degré et d'une forme quelconques, ont sans aucun doute, infiniment plus de force encore relativement à la recherche d'un procédé unique d'intégration, invariablement applicable à tous les cas. *C'est*, dit Lagrange, *un de ces problèmes dont on ne* *saurait espérer de solution générale.* Plus on méditera sur ce sujet, plus on sera convaincu, je ne crains pas de l'affirmer, qu'une telle recherche est totalement chimérique, comme étant beaucoup trop supérieure à la faible portée de notre intelligence, bien que les travaux des géomètres doivent certainement augmenter dans la suite l'ensemble de nos connaissances acquises sur l'intégration, et créer aussi des procédés d'une plus grande généralité. L'analyse transcendante est encore trop près de sa naissance, il y a surtout trop peu de temps qu'elle est conçue d'une manière vraiment rationelle, pour que nous puissions nous faire une juste idée de ce qu'elle pourra devenir un jour. Mais, quelles que doivent être nos légitimes espérances, n'oublions pas de considérer avant tout les limites imposées par notre constitution intellectuelle, et qui, pour n'être pas susceptibles d'une détermination précise, n'en ont pas moins une réalité incontestable.

Au lieu de tendre à imprimer au calcul des fonctions indirectes, tel que nous le concevons aujourd'hui, une perfection chimérique, je suis porté à penser que lorsque les géomètres auront épuisé les applications les plus importantes de notre analyse transcendante actuelle, ils se créeront plutôt de nouvelles ressources, en changeant le mode de dérivation des quantitées auxiliaires

introduites pour faciliter l'établissement des équations, et dont la formation pourrait suivre une infinité d'autres lois que la relation très-simple qui a été choisie, d'après une conception que j'ai déjà indiquée dans la quatrième leçon. Les moyens de cette nature me paraissent susceptibles, en eux-mêmes, d'une plus grande fécondité que ceux qui consisteraient seulement à pousser plus loin notre calcul actuel des fonctions indirectes. C'est une pensée que je soumets aux géomètres dont les méditations se sont tournées vers la philosophie générale de l'analyse.

Du reste, quoique j'aie dû, dans l'exposition sommaire qui était l'objet propre de cette leçon, rendre sensible l'état d'extrême imperfection où se trouve encore le calcul intégral, on aurait une fausse idée des ressources générales de l'analyse transcendante, si on accordait à cette considération une trop grande importance. Il en est ici, en effet, comme dans l'analyse ordinaire, où l'on est parvenu à utiliser, à un degré immense, un très-petit nombre de connaissances fondamentales sur la résolution des équations. Quelque peu avancés qu'ils soient réellement jusqu'ici dans la science des intégrations, les géomètres n'en ont pas moins tiré, de notions abstraites aussi peu multipliées, la solution d'une multitude de questions de première importance en géométrie, en mécanique, en thermologie, etc. L'explication philosophique de ce double fait général résulte de l'importance et de la portée nécessairement prépondérantes des connaissances abstraites, dont la moindre se trouve naturellement correspondre à une foule de recherches concrètes, l'homme n'ayant d'autre ressource pour l'extension successive de ses moyens intellectuels, que dans la considération d'idées de plus en plus abstraites et néanmoins positives.

Pour achever de faire connaître, dans toute son étendue, le caractère philosophique de l'analyse transcendante, il me reste à considérer une dernière conception par laquelle l'immortel Lagrange, que nous retrouvons sur toutes les grandes voies de la science mathématique, a rendu cette analyse encore plus propre à faciliter l'établissement des équations dans les problèmes les plus difficiles, en considérant une classe d'équations encore plus *indirectes* que les équations différentielles proprement dites. C'est le *calcul* ou plutôt la *méthode des variations*, dont l'appréciation générale sera l'objet de la leçon suivante.

HUITIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations générales sur le calcul des variations.

Afin de saisir avec plus de facilité le caractère philosophique de la méthode des variations, il convient d'abord de considérer sommairement la nature spéciale des problèmes dont la résolution générale a nécessité la formation de cette analyse hyper-transcendante. Ce calcul est encore trop près de son origine, les applications en ont été jusqu'ici trop peu variées, pour qu'on pût en concevoir une idée générale suffisamment claire, si je me bornais à une exposition purement abstraite de sa théorie fondamentale, bien qu'une telle exposition doive être ensuite, sans aucun doute, l'objet principal et définitif de cette leçon.

Les questions mathématiques qui ont donné naissance au *calcul des variations* consistent, en général, dans la recherche des *maxima* et des *minima* de certaines formules intégrales indéterminées, qui expriment la loi analytique de tel ou