en thermologie, etc. L'explication philosophique de ce double fait général résulte de l'importance et de la portée nécessairement prépondérantes des connaissances abstraites, dont la moindre se trouve naturellement correspondre à une foule de recherches concrètes, l'homme n'ayant d'autre ressource pour l'extension successive de ses moyens intellectuels, que dans la considération d'idées de plus en plus abstraites et néanmoins positives.

Pour achever de faire connaître, dans toute son étendue, le caractère philosophique de l'analyse transcendante, il me reste à considérer une dernière conception par laquelle l'immortel Lagrange, que nous retrouvons sur toutes les grandes voies de la science mathématique, a rendu cette analyse encore plus propre à faciliter l'établissement des équations dans les problèmes les plus difficiles, en considérant une classe d'équations encore plus *indirectes* que les équations différentielles proprement dites. C'est le *calcul* ou plutôt la *méthode des variations*, dont l'appréciation générale sera l'objet de la leçon suivante.

HUITIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations générales sur le calcul des variations.

Afin de saisir avec plus de facilité le caractère philosophique de la méthode des variations, il convient d'abord de considérer sommairement la nature spéciale des problèmes dont la résolution générale a nécessité la formation de cette analyse hyper-transcendante. Ce calcul est encore trop près de son origine, les applications en ont été jusqu'ici trop peu variées, pour qu'on pût en concevoir une idée générale suffisamment claire, si je me bornais à une exposition purement abstraite de sa théorie fondamentale, bien qu'une telle exposition doive être ensuite, sans aucun doute, l'objet principal et définitif de cette leçon.

Les questions mathématiques qui ont donné naissance au *calcul des variations* consistent, en général, dans la recherche des *maxima* et des *minima* de certaines formules intégrales indéterminées, qui expriment la loi analytique de tel ou tel phénomène géométrique ou mécanique, considéré indépendamment d'aucun sujet particulier. Les géomètres ont désigné pendant long-temps toutes les questions de ce genre par le nom commun de *problèmes des isopérimètres*, qui ne convient cependant qu'au plus petit nombre d'entre elles.

Dans la théorie ordinaire des *maxima* et *minima*, on se propose de découvrir, relativement à une fonction donnée d'une seule ou de plusieurs variables, quelles valeurs particulières il faut assigner à ces variables pour que la valeur correspondante de la fonction proposée soit un *maximum* ou un *minimum*, par rapport à celles qui précèdent et qui suivent immédiatement, c'est-à-dire qu'on cherche, à proprement parler, à quel instant la fonction cesse de croître pour commencer à décroître, ou réciproquement. Le calcul différentiel suffit pleinement, comme on sait, à la résolution générale de cette classe de questions, en montrant que les valeurs des diverses variables qui conviennent, soit au *maximum*, soit au *minimum*, doivent toujours rendre nulles les différentes dérivées du premier ordre de la fonction donnée, prises séparément par rapport à chaque variable indépendante; et en indiquant de plus un caractère propre à distinguer le *maximum* du *minimum*, qui consiste, dans le cas d'une fonction d'une seule variable, par exemple, en ce que

la fonction dérivée du second ordre doit prendre une valeur négative pour le *maximum*, et positive pour le *minimum*. Telles sont, du moins, les conditions fondamentales qui se rapportent au plus grand nombre des cas; les modifications qu'elles doivent subir pour que la théorie soit complétement applicable à certaines questions, sont d'ailleurs également assujetties à des règles abstraites aussi invariables, quoique plus compliquées.

La construction de cette théorie générale ayant fait disparaître nécessairement le principal intérêt que les questions de ce genre pouvaient inspirer aux géomètres, ils se sont élevés presque aussitôt à la considération d'un nouvel ordre de problèmes, à la fois beaucoup plus importans et d'une difficulté bien supérieure, ceux des *isopérimètres*. Ce ne sont plus alors les valeurs des variables propres au *maximum* ou au *minimum* d'une fonction donnée, qu'il s'agit de déterminer. C'est la forme de la fonction elle-même qu'on se propose de découvrir, d'après la condition du *maximum* ou du *minimum* d'une certaine intégrale définie, seulement indiquée, qui dépend de cette fonction.

La plus ancienne question de cette nature est celle du solide de moindre résistance, traitée par Newton, dans le second livre des *Principes*, où il détermine quelle doit être la courbe méridienne d'un solide de révolution, pour que la résistance éprouvée par ce corps dans le sens de son axe, en traversant avec une vitesse quelconque un fluide immobile, soit la plus petite possible. Mais la marche suivie par Newton n'avait point un caractère assez simple, assez général et surtout assez analytique, par la nature de sa méthode spéciale d'analyse transcendante, pour qu'une telle solution pût suffire à entraîner les géomètres vers ce nouvel ordre de problèmes. L'impulsion vraiment décisive à cet égard ne pouvait guère partir que de l'un des géomètres occupés sur le continent à élaborer et à appliquer la méthode infinitésimale proprement dite. C'est ce que fit, en 1695, Jean Bernouilli, en proposant le problème célèbre de la brachystochrone, qui suggéra depuis une si longue suite de questions analogues. Il consiste à déterminer la courbe qu'un corps pesant doit suivre pour descendre d'un point à un autre dans le temps le plus court. En se bornant à la simple chute dans le vide, seul cas qu'on ait d'abord considéré, on trouve assez facilement que la courbe cherchée doit être une cycloïde renversée, à base horizontale, ayant son origine au point le plus élevé. Mais la question peut être singulièrement compliquée, soit en ayant égard à la résistance du milieu, soit en tenant compte du changement d'intensité de la pesanteur.

Quoique cette nouvelle classe de problèmes ait été primitivement fournie par la mécanique, c'est néanmoins dans la géométrie qu'on a puisé plus tard les sujets des principales recherches. Ainsi, on s'est proposé de découvrir, parmi toutes les courbes de même contour tracées entre deux points donnés, quelle est celle dont l'aire est un *maximum* ou un *minimum*, d'où est venu proprement le nom de *problème des ipérimètres*; ou bien on a demandé que le *maximum* et le *minimum* eussent lieu pour la surface engendrée par la révolution de la courbe cherchée autour d'un axe, ou pour le volume correspondant; dans d'autres cas, c'était la hauteur verticale du centre de gravité de la courbe inconnue, ou de la surface et du volume qu'elle pouvait engendrer, qui devait devenir un *maximum* ou un *minimum*, etc. Enfin, ces problèmes ont été successivement variés et compliqués, pour ainsi dire à l'infini, par les Bernouilli, par Taylor, et surtout par Euler, avant que Lagrange en eût assujetti la solution à une méthode abstraite et entièrement générale, dont la découverte a fait cesser l'empressement des géomètres pour un tel ordre de recherches. Il ne s'agit point ici de tracer, même sommairement, l'histoire de cette partie supérieure des mathématiques, quelque intéressante qu'elle fût. Je n'ai fait l'énumération de certaines questions principales choisies parmi les plus simples, qu'afin de rendre sensible la destination générale qu'avait essentiellement, à son origine, la méthode des variations.

On voit que, considérés sous le point de vue analytique, tous ces problèmes consistent, par leur nature, à déterminer quelle forme doit avoir une certaine fonction inconnue d'une ou de plusieurs variables, pour que telle ou telle intégrale dépendante de cette fonction se trouve avoir, entre des limites assignées, une valeur qui soit un *maximum* ou un *minimum*, relativement à toutes celles qu'elle prendrait si la fonction cherchée avait une autre forme quelconque. Ainsi, par exemple, dans le problème de la brachystochrone, on sait que si $y=f(z)$, $x=\varphi(z)$, sont les équations rectilignes de la courbe cherchée, en supposant les axes des x et des y horizontaux, et l'axe z des vertical, le temps de la chute d'un corps pesant le long de cette courbe, depuis le point dont l'ordonnée est z_1 jusqu'à celui dont l'ordonnée est z_2 est généralement exprimé par l'intégrale définie (1).

$$\int_{z_2}^{z_1} \sqrt{\frac{1+(f'(z))^2+(\varphi'(z))^2}{2gz}}\, dz$$

(1) J'emploie la notation simple et lumineuse proposée par M. Fourier, pour désigner les intégrales définies, en mentionnant distinctement leurs limites.

Il faut donc trouver quelles doivent être les deux fonctions inconnues f et φ pour que cette intégrale soit un minimum. De même, demander quelle est, parmi toutes les courbes planes isopérimètres, celle qui renferme la plus grande aire, c'est proposer de trouver, parmi toutes les fonctions $f(x)$ qui peuvent donner à l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

une certaine valeur constante, celle qui rend un maximum l'intégrale $\int f(x)\, dx$, prise entre les mêmes limites. Il en est évidemment toujours ainsi dans toutes les autres questions de ce genre.

Dans les solutions que les géomètres donnaient de ces problèmes avant Lagrange, on se proposait essentiellement de les ramener à la théorie ordinaire des maxima et minima. Mais les moyens employés pour effectuer cette transformation consistaient en de simples artifices particuliers, propres à chaque cas, et dont la découverte ne comportait point de régles invariables et certaines, en sorte que toute question vraiment nouvelle reproduisait constamment des difficultés analogues, sans que les solutions déjà obtenues pussent être réellement d'aucun secours essentiel, autrement que par les habitudes qu'elles avaient fait contracter à l'intelligence. En un mot, cette branche des mathématiques présentait alors l'imperfection nécessaire qui existe constamment tant qu'on n'est point parvenu a saisir distinctement, pour la traiter d'une manière abstraite et dès-lors générale, la partie commune à toutes les questions d'une même classe.

En cherchant à réduire tous les divers problèmes des isopérimètres à dépendre d'une analyse commune, organisée abstraitement en un calcul distinct, Lagrange a été conduit à concevoir une nouvelle nature de différentiations, auxquelles il a appliqué la caractéristique δ, en réservant la caractéristique d pour les simples différentielles ordinaires. Ces différentielles d'une espèce nouvelle, qu'il a désignées sous le nom de *variations*, consistent dans les accroissemens infiniment petits que reçoivent les intégrales, non en vertu d'accroissemens analogues de la part des variables correspondantes, comme pour l'analyse transcendante ordinaire, mais en supposant que la forme de la fonction placée sous le signe d'intégration vienne à changer infiniment peu. Cette distinction se conçoit, par exemple, avec facilité, relativement aux courbes, où l'on voit l'ordonnée ou toute autre variable de la courbe, comporter deux sortes de différentielles évidemment très-différentes, suivant que l'on passe d'un point à un autre infiniment voisin sur la même courbe, ou bien au point correspondant de la courbe infiniment voisine produite par une certaine modification déterminée de la première (1). Il est clair, du reste, que, par leur nature, les *variations* relatives de diverses grandeurs liées entre elles par des lois quelconques, se calculent, à la caractéristique près, exactement de la même manière que les différentielles. Enfin, on déduit également de la notion générale des *variations* les principes fondamentaux de l'algorithme propre à cette méthode et qui consistent simplement dans la faculté évidente de pouvoir transposer à volonté les caractéristiques spécialement affectées aux variations avant ou après celles qui correspondent aux différentielles ordinaires.

Cette conception abstraite une fois formée, Lagrange a pu réduire aisément, de la manière la plus générale, tous les problèmes des isopérimètres à la simple théorie ordinaire des *maxima* et des *minima*. Pour se faire une idée nette de cette grande et heureuse transformation, il faut

(1) Leïbnitz avait déjà considéré la comparaison d'une courbe à une autre infiniment voisine ; c'est ce qu'il appelait *differentiatio de curvâ in curvam*. Mais cette comparaison n'avait aucune analogie avec la conception de Lagrange, les courbes de Leïbnitz étant renfermées dans une même équation générale, d'où elles se déduisent par le simple changement d'une constante arbitraire.

préalablement considérer une distinction essentielle à laquelle donnent lieu les diverses questions des isopérimètres.

On doit, en effet, partager ces recherches en deux classes générales, selon que les *maxima* et *minima* demandés sont *absolus* ou *relatifs*, pour employer les expressions abrégées des géomètres. Le premier cas est celui où les intégrales définies indéterminées dont on cherche le *maximum* ou le *minimum*, ne sont assujetties, par la nature du problème, à aucune condition; comme il arrive, par exemple, dans le problème de la brachystochrone, où il s'agit de choisir entre toutes les courbes imaginables. Le second cas a lieu, quand, au contraire, les intégrales variables ne peuvent changer que suivant certaines conditions, consistant ordinairement en ce que d'autres intégrales définies, dépendant également des fonctions cherchées, conservent constamment une même valeur donnée; comme, par exemple, dans toutes les questions géométriques concernant les figures *isopérimètres* proprement dites, et où, par la nature du problème, l'intégrale relative à la longueur de la courbe ou à l'aire de la surface, doit rester constante pendant le changement de celle qui est l'objet de la recherche proposée.

Le calcul des variations donne immédiatement la solution générale des questions de la première

espèce. Car, il suit évidemment de la théorie ordinaire des *maxima* et *minima*, que la relation cherchée doit rendre nulle la *variation* de l'intégrale proposée par rapport à chaque variable indépendante, ce qui donne la condition commune au maximum et au minimum; et, comme caractère propre à distinguer l'un de l'autre, que la variation du second ordre de la même intégrale doit être négative pour le maximum et positive pour le minimum. Ainsi, par exemple, dans le problème de la brachystochrone, on aura, pour déterminer la nature de la courbe cherchée, l'équation de condition,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\frac{1+(f'(z))^2+(\varphi'(z))^2}{2gz}}\, dz = 0$$

qui, se décomposant en deux, par rapport aux deux fonctions inconnues f et φ qui sont indépendantes l'une de l'autre, exprimera complètement la définition analytique de la courbe demandée. La seule difficulté propre à cette nouvelle analyse consiste dans l'élimination de la caractéristique δ, pour laquelle le calcul des variations fournit des règles invariables et complètes, fondées, en général, sur le procédé de l'intégration par parties, dont Lagrange a su tirer ainsi un parti immense. Le but constant de cette première élaboration analytique, dans l'exposition de laquelle je ne dois nullement entrer ici, est de faire parvenir aux équations différentielles proprement dites, ce qui se peut toujours, et par-là la question rentre dans le domaine de l'analyse transcendante ordinaire, qui achève la solution, du moins en la ramenant à l'algèbre pure, si on sait effectuer l'intégration. La destination générale, propre à la méthode des variations, est d'opérer cette transformation, pour laquelle Lagrange a établi des règles simples, invariables, et d'un succès toujours assuré.

Je ne dois pas négliger, dans cette rapide indication générale, de faire remarquer, comme un des plus grands avantages spéciaux de la méthode des variations comparée aux solutions isolées qu'on avait auparavant des problèmes des isopérimètres, l'importante considération de ce que Lagrange appelle les *équations aux limites*, entièrement négligées avant lui, et sans lesquelles néanmoins la plupart des solutions particulières restaient nécessairement incomplètes. Quand les limites des intégrales proposées doivent être fixes, leurs variations étant nulles, il n'y a pas lieu d'en tenir compte. Mais il n'en est plus ainsi quand ces limites, au lieu d'être rigoureusement invariables, sont assujetties seulement à certaines conditions; comme, par exemple, si les deux points entre lesquels doit être tracée la courbe cherchée ne sont pas fixes, et doivent seulement rester sur des lignes ou des surfaces données. Alors, il faut avoir égard aux variations de leurs coordonnées, et établir entr'elles les relations correspondantes aux équations de ces lignes ou de ces surfaces.

Cette considération essentielle n'est que le dernier complément d'une considération plus générale et plus importante relative aux variations des diverses variables indépendantes. Si ces variables sont réellement indépendantes les unes des autres, comme lorsqu'on compare toutes les courbes imaginables susceptibles d'être tracées entre deux points, il en sera de même de leurs variations, et par suite les termes relatifs à chacune de ces variations devront être séparément nuls dans l'équation générale qui exprime le maximum ou le minimum. Mais si, au contraire, on suppose les variables assujetties à de certaines conditions quelconques, il faudra tenir compte de la relation qui en résulte entre leurs variations, de telle sorte que le nombre des équations dans lesquelles se décompose alors cette équation générale soit toujours égal à celui seulement des variables qui restent vraiment indépendantes. C'est ainsi, par exemple, qu'au lieu de chercher le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, en choisissant parmi tous les chemins possibles, on peut se proposer de trouver seulement quel est le plus court entre tous ceux qu'on peut suivre sur une surface quelconque donnée, question dont la solution générale constitue certainement une des plus belles applications de la méthode des variations.

Les problèmes où l'on considère de telles conditions modificatrices se rapprochent beaucoup, par leur nature, de la seconde classe générale d'applications de la méthode des variations, caractérisée ci-dessus comme consistant dans la recherche des maxima et minima *relatifs*. Il y a néanmoins, entre les deux cas, cette différence essentielle, que, dans ce dernier, la modification est exprimée par une intégrale qui dépend de la fonction cherchée, tandis que, dans l'autre, elle se trouve désignée par une équation finie qui est immédiatement donnée. On conçoit par là, que la recherche des maxima et minima *relatifs* est toujours et nécessairement plus compliquée que celle des maxima et minima *absolus*. Heureusement, un théorème général fort important, trouvé avant l'invention du calcul des variations, et qui est une des plus belles découvertes dues au génie du grand Euler, donne un moyen uniforme et très-simple de faire rentrer

ces deux classes de questions l'une dans l'autre. Il consiste, en ce que si l'on ajoute à l'intégrale qui doit être un maximum ou un minimum un multiple constant et indéterminé de celle qui doit rester constante par la nature du problème, il suffira de chercher, suivant le procédé général de Lagrange, ci-dessus indiqué, le maximum ou le minimum *absolu* de cette expression totale. On peut aisément concevoir, en effet, que la partie de la variation complète qui proviendrait de la dernière intégrale doit aussi bien être nulle, à cause de la constance de celle-ci, que la portion due à la première intégrale, qui s'anéantit en vertu de l'état maximum ou minimum. Ces deux conditions distinctes, s'accordent évidemment pour produire, sous ce rapport, des effets exactement semblables.

Telle est, par aperçu, la manière générale dont la méthode des variations s'applique à toutes les diverses questions qui composent ce qu'on appelait la théorie des isopérimètres. On aura sans doute remarqué dans cette exposition sommaire, à quel degré s'est trouvée utilisée par cette nouvelle analyse la seconde propriété fondamentale de l'analyse transcendante, appréciée dans la sixième leçon, savoir : la généralité des expressions infinitésimales pour représenter un même phénomène géométrique ou mécanique, en quelque corps qu'il soit considéré. C'est, en effet, sur cette généralité que sont fondées, par leur nature, toutes les solutions dues à la méthode des variations. Si une formule unique ne pouvait point exprimer la longueur ou l'aire de toute courbe quelconque, si on n'avait point une autre formule fixe pour désigner le temps de la chute d'un corps pesant, suivant quelque ligne qu'il descende, etc., comment eût-il été possible de résoudre des questions qui exigent inévitablement, par leur nature, la considération simultanée de tous les cas que peuvent déterminer dans chaque phénomène les divers sujets qui le manifestent?

Quelle que soit l'extrême importance de la théorie des isopérimètres, et quoique la méthode des variations n'ait eu primitivement d'autre objet que la résolution rationnelle et générale de cet ordre de problèmes, on n'aurait cependant qu'une idée incomplète de cette belle analyse, si on bornait là sa destination. En effet, la conception abstraite de deux natures distinctes de différentiations, est évidemment applicable non-seulement aux cas pour lesquels elle a été créée, mais aussi à tous ceux qui présentent, par quelque cause que ce soit, deux manières différentes de faire varier les mêmes grandeurs. C'est ainsi que Lagrange lui-même a fait, dans sa *mécanique*

analytique, une immense application capitale de son calcul des variations, en l'employant à distinguer les deux sortes de changemens que présentent si naturellement les questions de mécanique rationnelle pour les divers points que l'on considère, suivant que l'on compare les positions successives qu'occupe, en vertu du mouvement, un même point de chaque corps dans deux instans consécutifs, ou que l'on passe d'un point du corps à un autre dans le même instant. L'une de ces comparaisons produit les différentielles ordinaires; l'autre donne lieu aux variations, qui ne sont, là comme partout, que des différentielles prises sous un nouveau point de vue. C'est dans une telle acception générale qu'il faut conce oir le calcul des variations, pour apprécier convenablement l'importance de cet admirable instrument logique, le plus puissant que l'esprit humain ait construit jusqu'ici.

La méthode des variations n'étant qu'une immense extension de l'analyse transcendante générale, je n'ai pas besoin de constater spécialement qu'elle est susceptible d'être envisagée sous les divers points de vue fondamentaux que comporte le calcul des fonctions indirectes, considéré dans son ensemble. Lagrange a inventé le calcul des variations d'après la conception infinitésimale proprement dite, et même bien avant d'avoir entrepris la reconstruction générale de l'analyse transcendante. Quand il eut exécuté cette importante réformation, il montra aisément comment elle pouvait aussi s'appliquer au calcul des variations, qu'il exposa avec tout le développement convenable, suivant sa théorie des fonctions dérivées. Mais, plus l'emploi de la méthode des variations est difficile pour l'intelligence à cause du degré d'abstraction supérieur des idées considérées, plus il importe de ménager dans son application les forces de notre esprit, en adoptant la conception analytique la plus directe et la plus rapide, c'est-à-dire, celle de Leïbnitz. Aussi Lagrange lui-même l'a-t-il constamment préférée dans l'important usage qu'il a fait du calcul des variations pour la *mécanique analytique*. Il n'existe pas, en effet, la moindre hésitation à cet égard parmi les géomètres.

Afin d'éclaircir aussi complétement que possible le caractère philosophique du calcul des variations, je crois devoir terminer en indiquant sommairement ici une considération qui me semble importante, et par laquelle je puis le rapprocher de l'analyse transcendante ordinaire à un plus haut degré que Lagrange ne me paraît l'avoir fait (1).

(1) Je me propose de développer plus tard cette considération nouvelle, dans un travail spécial sur le *calcul des variations*, qui a pour objet de présenter l'ensemble de cette analyse hyper-transcendante sous un nouveau point de vue, que je crois propre à en étendre la portée générale.

Nous avons remarqué, d'après Lagrange, dans la leçon précédente, la formation du calcul aux différences partielles, créé par d'Alembert, comme ayant introduit, dans l'analyse transcendante, une nouvelle idée élémentaire, la notion de deux sortes d'accroissemens distincts et indépendans les uns des autres que peut recevoir une fonction de deux variables, en vertu du changement de chaque variable séparément. C'est ainsi que l'ordonnée verticale d'une surface, ou toute autre grandeur qui s'y rapporte, varie de deux manières tout-à-fait distinctes et qui peuvent suivre les lois les plus diverses, en faisant croître tantôt l'une tantôt l'autre des deux coordonnées horizontales. Or, une telle considération me semble très-rapprochée, par sa nature, de celle qui sert de base générale à la méthode des variations. Celle-ci, en effet, n'a réellement fait autre chose que transporter aux variables indépendantes elles-mêmes la manière de voir déjà adoptée pour les fonctions de ces variables, ce qui en a singulièrement agrandi l'usage. Je crois, d'après cela, que, sous le seul rapport des conceptions fondamentales, on peut envisager le calcul créé par d'Alembert, comme ayant établi une transition naturelle et nécessaire entre le calcul infinitésimal ordinaire et le calcul des variations, dont une telle filiation me paraît devoir éclaircir et simplifier la notion générale.

D'après les diverses considérations indiquées dans cette leçon, la méthode des variations se présente comme le plus haut degré de perfection connu jusqu'ici de l'analyse des fonctions indirectes. Dans son état primitif, cette dernière analyse s'est présentée comme un puissant moyen général de faciliter l'étude mathématique des phénomènes naturels, en introduisant, pour l'expression de leurs lois, la considération de grandeurs auxiliaires choisies de telle manière, que leurs relations soient nécessairement plus simples et plus aisées à obtenir que celles des grandeurs directes. Mais la formation de ces équations différentielles n'était point conçue comme pouvant comporter aucunes règles générales et abstraites. Or, l'analyse des variations, considérée sous le point de vue le plus philosophique, peut être envisagée comme essentiellement destinée, par sa nature, à faire rentrer, autant que possible, dans le domaine du calcul, l'établissement même des équations différentielles, car tel est, pour un grand nombre de questions importantes et difficiles, l'effet général des équations *variées* qui, encore plus *indirectes* que les simples équations différentielles par

rapport aux objets propres de la recherche, sont aussi bien plus aisées à former, et desquelles on peut ensuite, par des procédés analytiques invariables et complets, destinés à éliminer le nouvel ordre d'infinitésimales auxiliaires introduit, déduire ces équations différentielles ordinaires, qu'il eût été souvent impossible d'établir immédiatement. La méthode des variations constitue donc la partie la plus sublime de ce vaste système de l'analyse mathématique qui, partant des plus simples élémens de l'algèbre, organise, par une succession d'idées non-interrompue, des moyens généraux de plus en plus puissans pour l'étude approfondie de la philosophie naturelle, et qui, dans son ensemble, présente, sans aucune comparaison, le monument le plus imposant et le moins équivoque de la portée de l'esprit humain. Mais, il faut reconnaître aussi que les conceptions habituellement considérées dans la méthode des variations étant, par leur nature, plus indirectes, plus générales, et surtout beaucoup plus abstraites que toutes les autres, l'emploi d'une telle méthode exige nécessairement, et d'une manière soutenue, le plus haut degré connu de contention intellectuelle, pour ne jamais perdre de vue l'objet précis de la recherche en suivant des raisonnemens qui offrent à l'esprit des points d'appui aussi peu déterminés, et dans lesquels les signes ne sont presque jamais d'aucun secours. On doit, sans doute, attribuer en grande partie à cette difficulté nécessaire le peu d'usage réel que les géomètres, excepté Lagrange, ont fait jusqu'ici d'une conception aussi admirable.

NEUVIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations générales sur le calcul aux différences finies.

Les diverses considérations fondamentales indiquées dans les cinq leçons précédentes constituent réellement toutes les bases essentielles d'une exposition complète de l'analyse mathématique, envisagée sous le point de vue philosophique. Néanmoins, pour ne négliger aucune conception générale vraiment importante relative à cette analyse, je crois devoir, avant de passer à l'étude philosophique de la mathématique concrète, expliquer très-sommairement le véritable caractère propre à un genre de calcul fort étendu, et qui, bien que rentrant au fond dans l'analyse ordinaire, est cependant encore regardé comme étant d'une nature essentiellement distincte. Il s'agit de ce qu'on appelle le *calcul aux différences finies*, qui sera le sujet spécial de cette leçon.

Ce calcul, créé par Taylor, dans son célèbre ouvrage intitulé *methodes incrumentorum*, consiste essentiellement, comme on sait, dans la considération des accroissemens finis que reçoivent les fonctions par suite d'accroissemens analogues de la part des variables correspondantes. Ces accroissemens ou *différences*, auxquels on applique la caractéristique Δ, pour les distinguer des *differentielles* ou accroissemens infiniment petits, peuvent être, à leur tour, envisagés comme de nouvelles fonctions, et devenir le sujet d'une seconde considération semblable, et ainsi de suite, d'où résulte la notion des différences des divers ordres successifs, analogues, au moins en apparence, aux ordres consécutifs des différentielles. Un tel calcul présente, évidemment, comme le calcul des fonctions indirectes, deux classes générales de questions: 1° déterminer les différences successives de toutes les diverses fonctions analytiques à une ou à plusieurs variables, en résultat d'un mode d'accroissement défini des variables indépendantes, que l'on suppose, en général, augmenter en progression arithmétique; 2° réciproquement, en partant de ces différences, ou, plus généralement, d'équations quelconques établies entre elles, remonter aux fonctions primitives elles-mêmes, ou à leurs relations correspondantes. D'où la décomposition de ce calcul

total en deux calculs distincts, auxquels on donne ordinairement les noms de *calcul direct aux différences finies*, et de *calcul inverse aux différences finies*, ce dernier étant aussi appelé quelquefois *calcul intégral aux différences finies*. Chacun de ces deux calculs serait d'ailleurs évidemment susceptible d'une distribution rationnelle semblable à celle exposée dans la septième leçon pour le calcul différentiel et le calcul intégral, ce qui me dispense d'en faire une mention distincte.

Il n'est pas douteux que, par une telle conception, Taylor a cru fonder un calcul d'une nature entièrement nouvelle, absolument distinct de l'analyse ordinaire, et plus général que le calcul de Leïbnitz, quoique consistant dans une considération analogue. C'est aussi de cette manière que presque tous les géomètres ont jugé l'analyse de Taylor. Mais Lagrange, avec sa profondeur habituelle, a clairement aperçu que ces propriétés appartenaient bien plus aux formes et aux notations employées par Taylor qu'au fond même de sa théorie. En effet, ce qui fait le caractère propre de l'analyse de Leïbnitz, et la constitue en un calcul vraiment distinct et supérieur, c'est que les fonctions dérivées sont, en général, d'une toute autre nature que les fonctions primitives, en sorte qu'elles peuvent donner lieu à des relations plus simples et d'une formation plus facile, d'où résultent les admirables propriétés fondamentales de l'analyse transcendante, expliquées dans les leçons précédentes. Mais il n'en est nullement ainsi pour les *différences* considérées par Taylor. Car ces différences sont, par leur nature, des fonctions essentiellement semblables à celles qui les ont engendrées, ce qui les rend impropres à faciliter l'établissement des équations, et ne leur permet pas davantage de conduire à des relations plus générales. Toute équation aux différences finies est vraiment, au fond, une équation directement relative aux grandeurs mêmes dont on compare les états successifs. L'échafaudage de nouveaux signes, qui fait illusion sur le véritable caractère de ces équations, ne le déguise cependant que d'une manière fort imparfaite, puisqu'on pourrait toujours le mettre aisément en évidence en remplaçant constamment les *différences* par les combinaisons équivalentes des grandeurs primitives, dont elles ne sont réellement autre chose que les désignations abrégées. Aussi, le calcul de Taylor n'a-t-il jamais offert et ne peut-il offrir, dans aucune question de géométrie ou de mécanique, ce puissant secours général que nous avons vu résulter nécessairement de l'analyse de Leïbnitz. Lagrange a, d'ailleurs, très-nettement établi que la prétendue analogie observée entre le calcul aux différences et le calcul infinitésimal était radicalement vicieuse, en ce sens que les formules propres au premier calcul ne peuvent nullement fournir, comme cas particuliers, celles qui conviennent au second, dont la nature est essentiellement distincte.

D'après l'ensemble de considérations que je viens d'indiquer, je crois que le calcul aux différences finies est ordinairement classé à tort dans l'analyse transcendante proprement dite, c'est-à-dire dans le calcul des fonctions indirectes. Je le conçois, au contraire, en adoptant pleinement les importantes réflexions de Lagrange, qui ne sont pas encore suffisamment appréciées, comme étant seulement une branche très-étendue et fort importante de l'analyse ordinaire, c'est-à-dire, de ce que j'ai nommé le calcul des fonctions directes. Tel est, en effet, ce me semble, son vrai caractère philosophique, que les équations qu'il considère sont toujours, malgré la notation, de simples équations *directes*.

En précisant, autant que possible, l'explication précédente, on doit envisager le calcul de Taylor comme ayant constamment pour véritable objet la théorie générale des *suites*, dont, avant cet illustre géomètre, on n'avait encore considéré que les cas les plus simples. J'aurais dû, rigoureusement, mentionner cette importante théorie en traitant, dans la cinquième leçon, de l'algèbre proprement dite, dont elle est une branche si étendue. Mais, afin d'éviter tout double emploi, j'ai préféré ne la signaler qu'en considérant le calcul aux différences finies, qui, réduit à sa plus simple expression générale, n'est autre chose, dans toute son étendue, qu'une étude rationnelle complète des questions relatives aux *suites*.

Toute *suite*, ou succession de nombres déduits les uns des autres d'après une loi constante quelconque, donne lieu nécessairement à ces deux questions fondamentales : 1° la loi de la suite étant supposée connue, trouver l'expression de son terme général, de manière à pouvoir calculer immédiatement un terme d'un rang quelconque, sans être obligé de former successivement tous les précédens; 2° dans les mêmes circonstances, déterminer la *somme* d'un nombre quelconque de termes de la suite en fonction de leurs rangs, en sorte qu'on puisse la connaître sans être forcé d'ajouter continuellement ces termes les uns aux autres. Ces deux questions fondamentales étant supposées résolues, on peut en outre se proposer réciproquement de trouver la loi d'une série d'après la forme de son terme général, ou l'expression de la somme. Chacun de ses divers problèmes comporte d'autant plus d'étendue et de difficulté, que l'on peut concevoir un plus grand nombre de *lois* différentes pour les séries, suivant le nombre de termes précédens dont chaque terme dépend immédiatement, et suivant la fonction qui exprime cette dépendance. On peut même considérer des séries à plusieurs indices variables, comme l'a fait Laplace dans la *théorie analytique des probabilités*, par l'analyse à laquelle il a donné le nom de *théorie des fonctions génératrices*, bien qu'elle ne soit réellement qu'une branche nouvelle et supérieure du calcul aux différences finies, ou de la théorie générale des suites.

Les divers aperçus généraux que je viens d'indiquer ne donnent même qu'une idée imparfaite de l'étendue et de la variété vraiment infinie des questions auxquelles les géomètres se sont élevés d'après cette seule considération des séries, si simple en apparence, et si bornée à son origine. Elle présente nécessairement autant de cas divers que la résolution algébrique des équations envisagée dans toute son étendue; et elle est, par sa nature, beaucoup plus compliquée, tellement même qu'elle en dépend toujours, pour conduire à une solution complète. C'est assez faire pressentir quelle doit être encore son extrême imperfection, malgré les travaux successifs de plusieurs géomètres du premier ordre. Nous ne possédons, en effet, jusqu'ici que la solution totale et rationnelle des plus simples questions de cette nature.

Il est maintenant aisé de concevoir l'identité nécessaire et parfaite que j'ai annoncée ci-dessus, d'après les indications de Lagrange, entre le calcul aux différences finies, et la théorie des suites prise dans son ensemble. En effet, toute différentiation à la manière de Taylor revient évidemment à trouver la *loi* de formation d'une suite à un ou à plusieurs indices variables, d'après l'expression de son terme général; de même, toute intégration analogue peut être regardée comme ayant pour objet la sommation d'une suite, dont le terme général serait exprimé par la différence proposée. Sous ce rapport, les divers problèmes de calcul aux différences, direct ou inverse, résolus par Taylor et par ses successeurs, ont réellement une très-grande valeur, comme traitant des questions importantes relativement aux suites. Mais il est fort douteux que la forme et la notation introduites par Taylor apportent réellement aucune facilité essentielle dans la solution des questions de ce genre. Il serait peut-être plus avantageux pour la plupart des cas, et certainement plus rationnel, de remplacer les *différences* par les termes mêmes dont elles désignent certaines combinaisons. Le calcul de Taylor ne reposant pas sur une pensée fondamentale vraiment distincte, et n'ayant de propre que son système de signes, il ne saurait y avoir réellement, dans

la supposition même la plus favorable, aucun avantage important à le concevoir comme détaché de l'analyse ordinaire, dont il n'est, à vrai dire, qu'une branche immense. Cette considération des *différences*, le plus souvent inutile quand elle ne complique pas, me semble conserver encore le caractère d'une époque où les idées analytiques n'étant pas assez familières aux géomètres, ils devaient naturellement préférer les formes spéciales propres aux simples comparaisons numériques.

Quoi qu'il en soit, je ne dois pas terminer cette appréciation générale du calcul aux différences finies, sans signaler une nouvelle notion à laquelle il a donné naissance, et qui a pris ensuite une grande importance. C'est la considération de ces fonctions *périodiques* ou *discontinues*, conservant toujours la même valeur pour une suite infinie de valeurs assujéties à une certaine loi dans les variables correspondantes, et qui doivent être nécessairement ajoutées aux intégrales des équations aux différences finies pour les rendre suffisamment générales, comme on ajoute de simples constantes arbitraires à toutes les quadratures afin d'en compléter la généralité. Cette idée, primitivement introduite par Euler, est devenue, dans ces derniers temps, le sujet de travaux fort étendus de la part de M. Fourier, qui l'a transportée dans le système général de l'analyse, et qui en a fait un usage tellement neuf et si essentiel pour la théorie mathématique de la chaleur que cette conception, dans son état actuel, lui appartient vraiment d'une manière exclusive.

Afin de signaler complétement le caractère philosophique du calcul aux différences finies, je ne dois pas négliger de mentionner ici rapidement les principales applications générales qu'on en a faites jusqu'à présent.

Il faudrait placer au premier rang, comme la plus étendue et la plus importante, la solution des questions relatives aux suites, si, d'après les explications données ci-dessus, la théorie générale des suites ne devait pas être considérée comme constituant, par sa nature, le fond même du calcul de Taylor. Cette grande classe de problèmes étant donc écartée, la plus essentielle des véritables *applications* de l'analyse de Taylor, est sans doute, jusqu'ici, la méthode générale des *interpolations*, si fréquemment et si utilement employée dans la recherche des lois *empiriques* des phénomènes naturels. La question consiste, comme on sait, à intercaler, entre certains nombres donnés, d'autres nombres intermédiaires assujétis à la même loi que l'on suppose exister entre les premiers. On peut pleinement vérifier, dans cette application principale du calcul de Taylor, combien, ainsi que je l'ai expliqué plus haut, la considération des *différences* est vraiment étrangère et souvent gênante, relativement aux questions qui dépendent de cette analyse. En effet, Lagrange a remplacé les formules d'interpolation déduites de l'algorithme ordinaire du calcul aux différences finies par des formules générales beaucoup plus simples, qui sont aujourd'hui presque toujours préférées, et qui ont été trouvées directement, sans faire jouer aucun rôle à la notion superflue des *différences*, qui ne faisaient que compliquer la question.

Une dernière classe importante d'applications du calcul aux différences finies, qui mérite d'être distinguée de la précédente, consiste dans l'usage éminemment utile qu'on en fait, en géométrie, pour déterminer par approximation la longueur et l'aire de quelque courbe que ce soit, et, de même, la quadrature et la cubature d'un corps ayant une forme quelconque. Ce procédé, qui peut d'ailleurs être conçu abstraitement comme dépendant de la même recherche analytique que la question des interpolations, présente souvent un supplément précieux aux méthodes géométriques entièrement rationnelles, qui conduisent fréquemment à des intégrations qu'on ne sait point encore effectuer, ou à des calculs d'une exécution très-compliquée.

Telles sont les diverses considérations principales que j'ai cru devoir indiquer relativement au calcul des différences finies. Cet examen complète l'étude philosophique que je m'étais proposé d'esquisser pour la mathématique abstraite. Nous devons maintenant procéder à un travail semblable sur la mathématique concrète, où nous nous attacherons surtout à concevoir comment, en supposant parfaite la sience générale du calcul, on a pu, par des procédés invariables, réduire à de pures questions d'analyse tous les problèmes que peuvent présenter la géométrie et la mécanique, et imprimer ainsi à ces deux bases fondamentales de la philosophie naturelle, un degré de précision et surtout d'unité, en un mot, un caractère de haute perfection, qu'une telle marche pouvait seule leur communiquer.

DIXIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de la géométrie.

D'après l'explication générale présentée dans la troisième leçon relativement au caractère philosophique de la mathématique concrète, comparé à celui de la mathématique abstraite, je n'ai pas besoin d'établir ici, d'une manière spéciale, que la géométrie doit être considérée comme une véritable science naturelle, seulement bien plus simple et par suite beaucoup plus parfaite qu'aucune autre. Cette perfection nécessaire de la géométrie, obtenue essentiellement par l'application, qu'elle comporte si éminemment, de l'analyse mathématique, fait ordinairement illusion sur la nature réelle de cette science fondamentale, que la plupart des esprits conçoivent aujourd'hui comme une science purement rationnelle, tout-à-fait indépendante de l'observation. Il est néanmoins évident, pour quiconque examine avec attention le caractère des raisonnemens géométriques, même dans