Telles sont les diverses considérations principales que j'ai cru devoir indiquer relativement au calcul des différences finies. Cet examen complète l'étude philosophique que je m'étais proposé d'esquisser pour la mathématique abstraite. Nous devons maintenant procéder à un travail semblable sur la mathématique concrète, où nous nous attacherons surtout à concevoir comment, en supposant parfaite la sience générale du calcul, on a pu, par des procédés invariables, réduire à de pures questions d'analyse tous les problèmes que peuvent présenter la géométrie et la mécanique, et imprimer ainsi à ces deux bases fondamentales de la philosophie naturelle, un degré de précision et surtout d'unité, en un mot, un caractère de haute perfection, qu'une telle marche pouvait seule leur communiquer.

DIXIÈME LEÇON.

Sommaire. Vue générale de la géométrie.

D'après l'explication générale présentée dans la troisième leçon relativement au caractère philosophique de la mathématique concrète, comparé à celui de la mathématique abstraite, je n'ai pas besoin d'établir ici, d'une manière spéciale, que la géométrie doit être considérée comme une véritable science naturelle, seulement bien plus simple et par suite beaucoup plus parfaite qu'aucune autre. Cette perfection nécessaire de la géométrie, obtenue essentiellement par l'application, qu'elle comporte si éminemment, de l'analyse mathématique, fait ordinairement illusion sur la nature réelle de cette science fondamentale, que la plupart des esprits conçoivent aujourd'hui comme une science purement rationnelle, tout-à-fait indépendante de l'observation. Il est néanmoins évident, pour quiconque examine avec attention le caractère des raisonnemens géométriques, même dans l'état actuel de la géométrie abstraite, que, si les faits qu'on y considère sont beaucoup plus liés entr'eux que ceux relatifs à toute autre science, il existe toujours cependant, par rapport à chaque corps étudié par les géomètres, un certain nombre de phénomènes primitifs, qui, n'étant établis par aucun raisonnement, ne peuvent être fondés que sur l'observation, et constituent la base nécessaire de toutes les déductions. L'erreur commune à cet égard doit être regardée comme un reste d'influence de l'esprit métaphysique, qui a si long-temps dominé, même dans les études géométriques. Indépendamment de sa gravité logique, cette fausse manière de voir présente continuellement, dans les applications de la géométrie rationnelle, les plus grands inconvéniens, en ce qu'elle empêche de concevoir nettement le passage du concret à l'abstrait.

La supériorité scientifique de la géométrie tient, en général, à ce que les phénomènes qu'elle considère sont, nécessairement, les plus universels et les plus simples de tous. Non-seulement tous les corps de la nature peuvent évidemment donner lieu à des recherches géométriques, aussi bien qu'à des recherches mécaniques, mais, de plus, les phénomènes géométriques subsisteraient encore, quand même toutes les parties de l'univers seraient supposées immobiles. La géométrie

est donc, par sa nature, plus générale que la mécanique. En même temps, ses phénomènes sont plus simples; car ils sont évidemment indépendans des phénomènes mécaniques, tandis que ceux-ci se compliquent toujours nécessairement des premiers. Il en est de même, en comparant la géométrie à la thermologie abstraite, qu'on peut concevoir aujourd'hui, depuis les travaux de M. Fourier, ainsi que je l'ai indiqué dans la troisième leçon, comme une nouvelle branche générale de la mathématique concrète. En effet, les phénomènes thermologiques, considérés même indépendamment des effets dynamiques qui les accompagnent presque constamment, surtout dans les corps fluides, dépendent nécessairement des phénomènes géométriques, puisque la forme des corps influe sur la répartition de la chaleur.

C'est pour ces diverses raisons que nous avons dû classer précédemment la géométrie comme la première partie de la mathématique concrète, celle dont l'étude, outre son importance propre, sert de base indispensable à toutes les autres.

Avant de considérer directement l'étude philosophique des divers ordres de recherches qui constituent la géométrie actuelle, il faut se faire une idée nette et exacte de la destination générale de cette science, envisagée dans son ensemble. Tel est l'objet de cette leçon.

On définit communément la géométrie d'une manière très-vague et tout-à-fait vicieuse, en se bornant à la présenter comme *la science de l'étendue*. Il conviendrait d'abord d'améliorer cette définition, en disant, avec plus de précision, que la géométrie a pour objet la *mesure* de l'étendue. Mais une telle explication serait, par elle-même, fort insuffisante, bien que, au fond, elle soit exacte. Un aperçu aussi imparfait ne peut nullement faire connaître le véritable caractère général de la science géométrique.

Pour y parvenir, je crois devoir éclaircir préalablement deux notions fondamentales, qui, très-simples en elles-mêmes, ont été singulièrement obscurcies par l'emploi des considérations métaphysiques.

La première est celle de l'*espace*, qui a donné lieu à tant de raisonnemens sophistiques, à des discussions si creuses et si puériles de la part des métaphysiciens. Réduite à son acception positive, cette conception consiste simplement en ce que, au lieu de considérer l'étendue dans les corps eux-mêmes, nous l'envisageons dans un milieu indéfini, que nous regardons comme contenant tous les corps de l'univers. Cette notion nous est naturellement suggérée par l'observation, quand nous pensons à l'*empreinte* que laisserait un corps dans un fluide où il aurait été placé. Il est clair,

en effet, que, sous le rapport géométrique, une telle *empreinte* peut être substituée au corps lui-même, sans que les raisonnemens en soient altérés. Quant à la nature physique de cet *espace* indéfini, nous devons spontanément nous le représenter, pour plus de facilité, comme analogue au milieu effectif dans lequel nous vivons, tellement que si ce milieu était liquide, au lieu d'être gazeux, notre *espace* géométrique serait sans doute conçu aussi comme liquide. Cette circonstance n'est d'ailleurs évidemment que très-secondaire, l'objet essentiel d'une telle conception étant seulement de nous faire envisager l'étendue séparément des corps qui nous la manifestent. On comprend aisément *à priori* l'importance de cette image fondamentale, puisqu'elle nous permet d'étudier les phénomènes géométriques en eux-mêmes, abstraction faite de tous les autres phénomènes qui les accompagnent constamment dans les corps réels, sans cependant exercer sur eux aucune influence. L'établissement régulier de cette abstraction générale doit être regardé comme le premier pas qui ait été fait dans l'étude rationnelle de la géométrie, qui eût été impossible s'il avait fallu continuer à considérer avec la forme et la grandeur des corps l'ensemble de toutes leurs autres propriétés physiques. L'usage d'une semblable hypothèse, qui est peut-être la plus ancienne conception philosophique créée par l'esprit humain, nous est maintenant devenu si familier, que nous avons peine à mesurer exactement son importance, en appréciant les conséquences qui résulteraient de sa suppression.

Les spéculations géométriques ayant pu ainsi devenir abstraites, elles ont acquis non-seulement plus de simplicité, mais encore plus de généralité. Tant que l'étendue est considérée dans les corps eux-mêmes, on ne peut prendre pour sujet des recherches que les formes effectivement réalisées dans la nature, ce qui restreindrait singulièrement le champ de la géométrie. Au contraire, en concevant l'étendue dans l'*espace*, l'esprit humain peut envisager toutes les formes quelconques imaginables, ce qui est indispensable pour donner à la géométrie un caractère entièrement rationnel.

La seconde conception géométrique préliminaire que nous devons examiner est celle des différentes sortes d'étendue, désignées par les mots de *volume* (1), *surface*, *ligne*, et même

(1) M. Lacroix a critiqué avec raison l'expression de *solide*, communément employée par les géomètres pour désigner un *volume*. Il est certain, en effet, que lorsque nous voulons considérer séparément une certaine portion de l'*espace* indéfini, conçu comme gazeux, nous en solidifions par la pensée l'enceinte extérieure, en sorte qu'une *ligne* et une *surface* sont habituellement, pour notre esprit, tout aussi *solides* qu'un *volume*. On peut même remarquer que, le plus souvent, afin que les corps se pénètrent mutuellement avec plus de facilité, nous sommes obligés de nous représenter comme creux l'intérieur des *volumes*, ce qui rend encore plus sensible l'impropriété du mot *solide*.

point, et dont l'explication ordinaire est si peu satisfaisante.

Quoiqu'il soit évidemment impossible de concevoir aucune étendue absolument privée de l'une quelconque des trois dimensions fondamentales, il n'est pas moins incontestable que, dans une foule d'occasions, même d'une utilité immédiate; les questions géométriques ne dépendent que de deux dimensions, considérées séparément de la troisième, ou d'une seule dimension, considérée séparement des deux autres. D'un autre côté, indépendamment de ce motif direct, l'étude de l'étendue à une seule dimension et ensuite à deux se présente clairement comme un préliminaire indispensable pour faciliter l'étude des corps complets ou à trois dimensions, dont la théorie immédiate serait trop compliquée. Tels sont les deux motifs généraux qui obligent les géomètres à considérer isolément l'étendue sous le rapport d'une ou de deux dimensions, aussi bien que relativement à toutes les trois ensemble.

C'est afin de pouvoir penser, d'une manière permanente, à l'étendue dans deux sens ou dans un seul, que l'esprit humain se forme les notions générales de *surface*, et de *ligne*. Les expressions hyperboliques habituellement employées par les géomètres pour les définir, tendent à en faire concevoir une fausse idée. Mais, examinées en elles-mêmes, elles n'ont d'autre destination que de nous permettre de raisonner avec facilité sur ces deux genres d'étendue, en faisant complétement abstraction de ce qui ne doit pas être pris en considération. Or, il suffit, pour cela, de concevoir la dimension que l'on veut éliminer comme devenue graduellement de plus en plus petite, les deux autres restant les mêmes, jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à un tel degré de ténuité qu'elle ne puisse plus fixer l'attention. C'est ainsi qu'on acquiert naturellement l'idée réelle d'une *surface*, et, par une seconde opération analogue, l'idée d'une *ligne*, en renouvelant pour la largeur ce qu'on a d'abord fait pour l'épaisseur. Enfin, si l'on répète encore le même travail, on parvient à l'idée d'un *point*, ou d'une étendue considérée uniquement par rapport à son lieu, abstraction faite de toute grandeur, et destinée, par conséquent, à préciser les positions. Les surfaces ont d'ailleurs évidemment la propriété générale de circonscrire exactement les volumes; et, de même les lignes, à leur tour, circonscrivent les surfaces, et sont limitées par les points. Mais cette considération, à laquelle on a donné

souvent trop d'importance, n'est que secondaire.

Les surfaces et les lignes sont donc réellement toujours conçues avec trois dimensions; il serait, en effet, impossible de se représenter une surface autrement que comme une plaque extrêmement mince, et une ligne autrement que comme un fil infiniment délié. Il est même évident que le degré de ténuité attribué par chaque individu aux dimensions dont il veut faire abstraction, n'est pas constamment identique, car il doit dépendre du degré de finesse de ses observations géométriques habituelles. Ce défaut d'uniformité n'a d'ailleurs aucun inconvénient réel, puisqu'il suffit, pour que les idées de surface et de ligne remplissent la condition essentielle de leur destination, que chacun se représente les dimensions à négliger comme plus petites que toutes celles dont ses expériences journalières lui donnent occasion d'apprécier la grandeur.

On doit sans doute regretter qu'il soit encore nécessaire aujourd'hui d'indiquer expressément une explication aussi simple que la précédente, dans un ouvrage tel que celui-ci. Mais j'ai cru devoir signaler rapidement ces considérations à cause du nuage ontologique dont une fausse manière de voir enveloppe ordinairement ces notions premières. On voit par là combien sont dépourvues de toute espèce de sens les discussions fantastiques des métaphysiciens sur les fondemens de la géométrie. On doit aussi remarquer que ces idées primordiales sont habituellement présentées par les géomètres d'une manière peu philosophique, puisqu'ils exposent, par exemple, les notions des différentes sortes d'étendue dans un ordre absolument inverse de leur enchaînement naturel, ce qui engendre souvent, pour l'enseignement élémentaire, les plus graves inconvéniens.

Ces préliminaires étant posés, nous pouvons procéder directement à la définition générale de la géométrie, en concevant toujours cette science comme ayant pour but final la *mesure* de l'étendue.

Il est tellement nécessaire d'entrer à cet égard dans une explication approfondie, fondée sur la distinction des trois espèces d'étendue, que la notion de *mesure* n'est pas exactement la même par rapport aux surfaces et aux volumes que relativement aux lignes, en sorte que, sans cet examen, on se formerait une fausse idée de la nature des questions géométriques.

Si l'on prend le mot *mesure* dans son acception mathématique directe et générale, qui signifie simplement l'évaluation des *rapports* qu'ont entr'elles des grandeurs homogènes quelconques, on doit considérer, en géométrie, que la *mesure* des surfaces et des volumes, par opposition à

celle des lignes, n'est jamais conçue, même dans les cas les plus simples et les plus favorables, comme s'effectuant immédiatement. On regarde comme directe la comparaison de deux lignes; celle de deux surfaces ou de deux volumes est, au contraire, constamment indirecte. En effet, on conçoit que deux lignes puissent être superposées; mais la superposition de deux surfaces, ou, à plus forte raison, celle de deux volumes, est évidemment impossible à établir dans le plus grand nombre des cas; et, lors même qu'elle devient rigoureusement praticable, une telle comparaison n'est jamais ni commode, ni susceptible d'exactitude. Il est donc bien nécessaire d'expliquer en quoi consiste proprement la mesure vraiment géométrique d'une surface ou d'un volume.

Il faut considérer, pour cela, que, quelle que puisse être la forme d'un corps, il existe toujours un certain nombre de lignes, plus ou moins faciles à assigner, dont la longueur suffit pour définir exactement la grandeur de sa surface ou de son volume. La géométrie, regardant ces lignes comme seules susceptibles d'être mesurées immédiatement, se propose de déduire, de leur simple détermination, le rapport de la surface ou du volume cherchés, à l'unité de surface ou à l'unité de volume. Ainsi l'objet général de la géométrie, relativement aux surfaces et aux volumes, est proprement de ramener toutes les comparaisons de surfaces ou de volumes, à de simples comparaisons de lignes.

Outre la facilité immense que présente évidemment une telle transformation pour la mesure des volumes et des surfaces, il en résulte, en la considérant d'une manière plus étendue et plus scientifique, la possibilité générale de réduire à des questions de lignes, toutes les questions relatives aux volumes et aux surfaces, envisagés quant à leur grandeur. Tel est souvent l'usage le plus important des expressions géométriques qui déterminent les surfaces et les volumes en fonction des lignes correspondantes.

Ce n'est pas que les comparaisons immédiates entre surfaces ou entre volumes ne soient jamais employées. Mais de telles mesures ne sont pas regardées comme géométriques, et on n'y voit qu'un supplément quelquefois nécessaire, quoique trop rarement applicable, à l'insuffisance ou à la difficulté des procédés vraiment rationnels. C'est ainsi que souvent on détermine le volume d'un corps, et, dans certains cas, sa surface, d'après son poids. De même, en d'autres occasions, quand on peut substituer au volume proposé un volume liquide équivalent, on établit immédiatement la comparaison de deux volumes, en profitant de la propriété que présentent les masses liquides, de

pouvoir prendre aisément toutes les formes qu'on veut leur donner. Mais tous les moyens de cette nature sont purement mécaniques, et la géométrie rationnelle les rejette nécessairement.

Pour rendre plus sensible la différence de ces déterminations avec les véritables mesures géométriques, je citerai un seul exemple très-remarquable, la manière dont Galilée évalua le rapport de l'aire de la cycloïde ordinaire à celle du cercle générateur. La géométrie de son temps étant encore trop inférieure à la solution rationnelle d'un tel problème, Galilée imagina de chercher ce rapport par une expérience directe. Ayant pesé le plus exactement possible deux lames de même matière et d'égale épaisseur, d'ont l'une avait la forme d'un cercle et l'autre celle de la cycloïde engendrée, il trouva le poids de celle-ci constamment triple de celui de la première, d'où il conclut que l'aire de la cyloïde est triple de celle du cercle générateur, résultat conforme à la véritable solution obtenue plus tard par Pascal et Wallis. Un tel succès, sur lequel d'ailleurs Galilée n'avait pas pris le change, tient évidemment à l'extrême simplicité réelle du rapport cherché; et on conçoit l'insuffisance nécessaire de semblables expédiens, même lorsqu'ils seraient effectivement praticables.

On voit clairement, d'après ce qui précède, en quoi consistent proprement la partie de la géométrie relative aux volumes et celle relative aux surfaces. Mais on ne conçoit pas aussi nettement le caractère de la géométrie des lignes, puisque nous avons semblé, pour simplifier l'exposition, considérer la mesure des lignes comme se fesant immédiatement. Il faut donc, par rapport à elles, un complément d'explication.

A cet effet, il suffit de distinguer, entre la ligne droite et les lignes courbes; la mesure de la première étant seule regardée comme directe, et celle des autres comme constamment indirecte. Bien que la superposition soit quelquefois rigoureusement praticable pour les lignes courbes, il est évident néanmoins que la géométrie vraiment rationnelle doit la rejeter nécessairement, comme ne comportant, lors même qu'elle est possible, aucune exactitude. La géométrie des lignes a donc pour objet général de ramener constamment la mesure des lignes courbes à celle des lignes droites; et par suite, sous un point de vue plus étendu, de réduire à de simples questions de lignes droites toutes les questions relatives à la grandeur des courbes quelconques. Pour comprendre la possibilité d'une telle transformation, il faut remarquer que, dans toute courbe quelconque, il existe constamment certaines droites dont la longueur doit suffire pour déterminer celle de la courbe.

Ainsi, dans un cercle, il est évident que de la longueur du rayon on doit pouvoir conclure celle de la circonférence; de même, la longueur d'une ellipse dépend de celle de ses deux axes; la longueur d'une cycloïde, du diamètre du cercle générateur, etc.; et si, au lieu de considérer la totalité de chaque courbe, on demande plus généralement la longueur d'un arc quelconque, il suffira d'ajouter, aux divers paramètres rectilignes qui déterminent l'ensemble de la courbe, la corde de l'arc proposé, ou les coordonnées de ses extrémités. Découvrir la relation qui existe entre la longueur d'une ligne courbe et celle de semblables lignes droites, tel est le problème général qu'on a essentiellement en vue dans la partie de la géométrie relative à l'étude des lignes.

En combinant cette considération avec celles précédemment exposées sur les volumes et sur les surfaces, on peut se former une idée très-nette de la science géométrique, conçue dans son ensemble, en lui assignant pour destination générale de réduire finalement les comparaisons de toutes les espèces d'étendue, volumes, surfaces, ou lignes, à de simples comparaisons de lignes droites, les seules regardées comme pouvant être effectuées immédiatement, et qui, en effet, ne sauraient évidemment être ramenées à d'autres plus faciles. En même temps qu'une telle conception manifeste clairement le véritable caractère de la géométrie, elle me semble propre à faire apercevoir, d'un coup-d'œil unique, son utilité et sa perfection.

Afin de compléter rigoureusement cette explication fondamentale, il me reste à indiquer comment il peut y avoir, en géométrie, une section spéciale relative à la ligne droite, ce qui paraît d'abord incompatible avec le principe que la mesure de cette classe de lignes doit être toujours regardée comme immédiate.

Elle l'est, en effet, par rapport à celle des lignes courbes, et de tous les autres objets que la géométrie considère. Mais il est évident que l'estimation d'une ligne droite ne peut être envisagée comme directe qu'autant qu'on peut immédiatement porter sur elle l'unité linéaire. Or, c'est ce qui présente le plus souvent des difficultés insurmontables, comme j'ai eu occasion de l'exposer spécialement pour un autre motif dans la troisième leçon. On doit alors faire dépendre la mesure de la droite proposée d'autres mesures analogues, susceptibles d'êtres immédiatement effectuées. Il y a donc nécessairement une première étude géométrique distincte, exclusivement consacrée à la ligne droite; elle a pour objet de déterminer les lignes droites, les unes par les autres, d'après les relations propres aux figures quelconques résultant de leur assemblage. Cette partie préliminaire de la géométrie, qui semble pour ainsi dire imperceptible quand on envisage l'ensemble de la science, est néanmoins susceptible d'un très-grand développement, lorsqu'on veut la traiter dans toute son étendue. Elle est évidemment d'autant plus importante, que, toutes les mesures géométriques devant se ramener, autant que possible, à celle des lignes droites, l'impossibilité de déterminer ces dernières suffirait pour rendre incomplète la solution de chaque question quelconque.

Telles sont donc, suivant leur enchaînement naturel, les diverses parties fondamentales de la géométrie rationnelle. On voit que, pour suivre dans son étude générale un ordre vraiment dogmatique, il faut considérer d'abord la géométrie des lignes, en commençant par la ligne droite, et passer ensuite à la géométrie des surfaces, pour traiter enfin celle des volumes. Il y a lieu de s'étonner, sans doute, qu'une classification méthodique qui dérive aussi simplement de la nature même de la science n'ait pas été constamment suivie.

Après avoir déterminé avec précision l'objet général et définitif des recherches géométriques, il faut maintenant considérer la science sous le rapport du champ embrassé par chacune de ses trois sections fondamentales.

Ainsi envisagée, la géométrie est évidemment susceptible, par sa nature, d'une extension rigoureusement indéfinie; car la mesure des lignes, des surfaces ou des volumes, présente nécessairement autant de questions distinctes que l'on peut concevoir de formes différentes, assujetties à des définitions exactes, et le nombre en est évidemment infini.

Les géomètres se sont bornés d'abord à considérer les formes les plus simples que la nature leur fournissait immédiatement, ou qui se déduisaient de ces élémens primitifs par les combinaisons les moins compliquées. Mais ils ont senti, depuis Descartes, que, pour constituer la science de la manière la plus philosophique, il fallait nécessairement la faire porter, en général, sur toutes les formes imaginables. Ils ont ainsi acquis la certitude raisonnée que cette géométrie abstraite comprendrait inévitablement, comme cas particuliers, toutes les diverses formes réelles que le monde extérieur pourrait présenter, de façon à n'être jamais pris au dépourvu. Si, au contraire, on s'était toujours réduit à la seule considération de ces formes naturelles, sans s'y être préparé par une étude générale et par l'examen spécial de certaines formes hypothétiques plus simples, il est clair que les difficultés auraient été le plus souvent insurmontables au moment de l'application effective. C'est donc un principe fondamental,

dans la géométrie vraiment rationnelle, que la nécessité de considérer, autant que possible, toutes les formes qu'on peut concevoir rigoureusement.

L'examen le moins approfondi suffit pour faire comprendre que ces formes présentent une variété tout-à-fait infinie. Relativement aux lignes courbes, en les regardant comme engendrées par le mouvement d'un point assujetti à une certaine loi, il est clair qu'on aura, en général, autant de courbes différentes que l'on supposera de lois différentes pour ce mouvement, qui peut évidemment s'opérer suivant une infinité de conditions distinctes, quoiqu'il puisse arriver accidentellement quelquefois que de nouvelles générations produisent des courbes déjà obtenues. Ainsi, pour me borner aux seules courbes planes, si un point se meut de manière à rester constamment à la même distance d'un point fixe, il engendrera un cercle; si c'est la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes qui demeure constante, la courbe décrite sera une ellipse ou une hyperbole; si c'est leur produit, on aura une courbe toute différente; si le point s'écarte toujours également d'un point fixe et d'une droite fixe, il décrira une parabole; s'il tourne sur un cercle en même temps que ce cercle roule sur une ligne droite, on aura une cycloïde; s'il s'avance le long d'une droite, tandis que cette droite, fixée par une de ses extrémités, tourne d'une manière quelconque, il en résultera ce qu'on appelle, en général, des spirales qui, à elles seules, présentent évidemment autant de courbes parfaitement distinctes, qu'on peut supposer de relations différentes entre ces deux mouvemens de translation et de rotation, etc., etc. Chacune de ces diverses courbes peut ensuite en fournir de nouvelles, par les différentes constructions générales que les géomètres ont imaginées, et qui donnent naissance aux développées, aux épicycloïdes, aux caustiques, etc., etc. Enfin il existe évidemment une variété encore plus grande parmi les courbes à double courbure.

Relativement aux surfaces, les formes en sont nécessairement bien plus diverses encore, en les regardant comme engendrées par le mouvement des lignes. En effet, la forme peut alors varier, non seulement en considérant, comme dans les courbes, les différentes lois en nombre infini auxquelles peut être assujetti le mouvement de la ligne génératrice, mais aussi en supposant que cette ligne elle-même vienne à changer de nature, ce qui n'a pas d'analogue dans les courbes, les points qui les décrivent ne pouvant avoir aucune figure distincte. Deux classes de conditions très-diverses peuvent donc faire varier les formes des surfaces, tandis qu'il n'en existe qu'une seule

pour les lignes. Il est inutile de citer spécialement une série d'exemples propres à vérifier cette multiplicité doublement infinie qu'on remarque parmi les surfaces. Il suffirait, pour s'en faire une idée, de considérer l'extrême variété que présente le seul groupe des surfaces dites *réglées*, c'est-à-dire engendrées par une ligne droite, et qui comprend toute la famille des surfaces cylindriques, celle des surfaces coniques, la classe plus générale des surfaces développables quelconques, etc. Par rapport aux volumes, il n'y a lieu à aucune considération spéciale, puisqu'ils ne se distinguent entr'eux que par les surfaces qui les terminent.

Afin de compléter cet aperçu géométrique, il faut ajouter que les surfaces elles-mêmes fournissent un nouveau moyen général de concevoir des courbes nouvelles, puisque toute courbe peut être envisagée comme produite par l'intersection de deux surfaces. C'est ainsi, en effet, qu'ont été obtenues les premières lignes qu'on puisse regarder comme vraiment inventées par les géomètres, puisque la nature donnait immédiatement la ligne droite et le cercle. On sait que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, les seules courbes complétement étudiées par les anciens, avaient été seulement conçues, dans l'origine, comme résultant de l'intersection d'un cône à base circulaire par un plan diversement situé. Il est évident que par l'emploi combiné de ces différens moyens généraux pour la formation des lignes et des surfaces, on pourrait produire une suite rigoureusement infinie de formes distinctes, en partant seulement d'un très-petit nombre de figures directement fournies par l'observation.

Du reste, tous les divers moyens immédiats pour l'invention des formes, n'ont presque plus aucune importance, depuis que la géométrie rationnelle a pris, entre les mains de Descartes, son caractère définitif. En effet, comme nous le verrons spécialement dans la douzième leçon, l'invention des formes se réduit aujourd'hui à l'invention des équations, en sorte que rien n'est plus aisé que de concevoir de nouvelles lignes et de nouvelles surfaces, en changeant à volonté les fonctions introduites dans les équations. Ce simple procédé abstrait est, sous ce rapport, infiniment plus fécond que les ressources géométriques directes, développées par l'imagination la plus puissante, qui s'appliquerait uniquement à cet ordre de conceptions. Il explique d'ailleurs, de la manière la plus générale et la plus sensible, la variété nécessairement infinie des formes géométriques, qui correspond ainsi à la diversité des fonctions analytiques. Enfin, il montre non moins clairement que les différentes formes de surfaces

doivent être encore plus multipliées que celles des lignes, puisque les lignes sont représentées analytiquement par des équations à deux variables, tandis que les surfaces donnent lieu à des équations à trois variables, qui présentent nécessairement une plus grande diversité.

Les considérations précédemment indiquées suffisent pour montrer nettement l'extension rigoureusement infinie que comporte, par sa nature, chacune des trois sections générales de la géométrie, relativement aux lignes, aux surfaces et aux volumes, en résultat de la variété infinie des corps à mesurer.

Pour achever de nous faire une idée exacte et suffisamment étendue de la nature des recherches géométriques, il est maintenant indispensable de revenir sur la définition générale donnée ci-dessus, afin de la présenter sous un nouveau point de vue, sans lequel l'ensemble de la science ne serait que fort imparfaitement conçu.

En assignant pour but à la géométrie la *mesure* de toutes les sortes de lignes, de surfaces et de volumes, c'est-à-dire, comme je l'ai expliqué, la réduction de toutes les comparaisons géométriques à de simples comparaisons de lignes droites, nous avons évidemment l'avantage d'indiquer une destination générale très-précise et très-facile à saisir. Mais, si écartant toute définition, on examine la composition effective de la science géométrique, on sera d'abord porté à regarder la définition précédente comme beaucoup trop étroite, car il n'est pas douteux que la majeure partie des recherches qui constituent notre géométrie actuelle ne paraissent nullement avoir pour objet la *mesure* de l'étendue. C'est probablement une telle considération qui maintient encore, pour la géométrie, l'usage de ces définitions vagues, qui ne comprennent tout que parce qu'elles ne caractérisent rien. Je crois néanmoins, malgré cette objection fondamentale, pouvoir persister à indiquer la *mesure* de l'étendue comme le but général et uniforme de la science géométrique, et en y comprenant cependant tout ce qui entre dans sa composition réelle. En effet, si, au lieu de se borner à considérer isolément les diverses recherches géométriques, on s'attache à saisir les questions principales, par rapport auxquelles toutes les autres, quelque importantes qu'elles soient, ne doivent être regardées que comme secondaires, on finira par reconnaître que la *mesure* des lignes, des surfaces et des volumes, est le but invariable, quelquefois *direct*, et le plus souvent *indirect*, de tous les travaux géométriques. Cette proposition générale étant fondamentale, puisqu'elle peut seule donner à notre définition toute sa valeur, il est indispen-

sable d'entrer à ce sujet dans quelques développemens.

En examinant avec attention les recherches géométriques qui ne paraissent point se rapporter à la *mesure* de l'étendue, on trouve qu'elles consistent essentiellement dans l'étude des diverses *propriétés* de chaque ligne ou de chaque surface, c'est-à-dire, en termes précis, dans la connaissance des différens modes de génération, ou du moins de définition, propres à chaque forme que l'on considère. Or, on peut aisément établir, de la manière la plus générale, la relation nécessaire d'une telle étude avec la question de *mesure*, pour laquelle la connaissance la plus complète possible des propriétés de chaque forme est un préliminaire indispensable. C'est ce que concourent à prouver deux considérations également fondamentales, quoique de nature tout-à-fait distincte.

La première, purement scientifique, consiste à remarquer que si l'on ne connaissait, pour chaque ligne ou pour chaque surface, d'autre propriété caractéristique que celle d'après laquelle les géomètres l'ont primitivement conçue, il serait le plus souvent impossible de parvenir à la solution des questions relatives à sa *mesure*. En effet, il est facile de sentir que les différentes définitions dont chaque forme est susceptible ne