ONZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations générales sur la géométrie *spéciale* ou *préliminaire*.

La méthode géométrique des anciens devant avoir nécessairement, d'après les motifs indiqués à la fin de la leçon précédente, une part préliminaire dans le système dogmatique de la géométrie, pour fournir à la géométrie *générale* des fondemens indispensables, il convient maintenant de fixer d'abord en quoi consiste strictement cette fonction préalable de la géométrie *spéciale*, ainsi réduite au moindre développement possible.

En la considérant sous ce point de vue, il est aisé de reconnaître qu'on pourrait la restreindre à la seule étude de la ligne droite pour ce qui concerne la géométrie des lignes, à la quadrature des aires planes rectilignes, et enfin à la cubature des corps terminés par des faces planes. Les propositions élémentaires relatives à ces trois questions fondamentales constituent, en effet, le point de départ nécessaire de toutes les recherches géométriques; elles seules ne peuvent être obtenues que par une étude directe du sujet; tandis qu'au contraire la théorie complète de toutes les autres formes quelconques, même celle du cercle et des surfaces et volumes qui s'y rapportent, peut aujourd'hui rentrer entièrement dans le domaine de la géométrie *générale* ou *analytique*, ces élémens primitifs fournissant déjà des *équations*, qui suffisent pour permettre l'application du calcul aux questions géométriques, qui n'eût pas été possible sans cette condition préalable.

Il résulte de cette considération que, dans l'usage ordinaire, on donne à la géométrie *élémentaire* plus d'étendue qu'il ne serait rigoureusement nécessaire, puisque, outre la ligne droite, les polygones et les polyèdres, on y comprend aussi le cercle et les corps *ronds*, dont l'étude pourrait cependant être aussi purement *analytique* que celle, par exemple, des sections coniques. Une vénération irréfléchie pour l'antiquité contribue, sans doute, à maintenir ce défaut de méthode. Mais comme ce respect n'a point empêché de faire rentrer dans le domaine de la géométrie moderne la théorie des sections coniques, il faut bien que, relativement aux formes circulaires, l'habitude contraire, encore universelle, soit fondée sur d'autres motifs. La raison la plus sensible qu'on en puisse donner, c'est le grave inconvénient qu'il y aurait, pour l'enseignement ordinaire, à ajourner à une époque assez éloignée de l'éducation mathématique la solution de plusieurs questions essentielles, susceptibles d'une application immédiate et continuelle à une foule d'usages importans. Pour procéder, en effet, de la manière la plus rationnelle, ce ne serait qu'à l'aide du calcul intégral qu'on pourrait obtenir les intéressans résultats, relatifs à la mesure de la longueur ou de l'aire du cercle, ou à la quadrature de la sphère, etc., établis par les anciens d'après des considérations extrêmement simples. Cet inconvénient serait peu important, à l'égard des esprits destinés à étudier l'ensemble de la science mathématique, et l'avantage de procéder avec une rationnalité parfaite aurait, comparativement, une bien plus grande valeur. Mais, le cas contraire étant encore le plus fréquent, on a dû s'attacher à conserver dans la géométrie élémentaire proprement dite des théories aussi essentielles. En admettant l'influence d'une telle considération, et ne restreignant plus cette géométrie préliminaire à ce qui est strictement indispensable, on peut même concevoir l'utilité, pour certains cas particuliers, d'y introduire plusieurs études importantes qui en ont été généralement exclues, comme celles des sections coniques, de la cycloïde, etc., afin de renfermer, dans un enseignement borné, le plus grand nombre possible de connaissances usuelles, quoique, même sous le simple rapport du temps, il fût préférable de suivre la marche la plus rationnelle.

Je ne dois point, à ce sujet, tenir compte ici des avantages que peut présenter cette extension habituelle de la méthode géométrique des anciens au-delà de la destination nécessaire qui lui est propre, par la connaissance plus profonde qu'on acquiert ainsi de cette méthode, et par la comparaison instructive qui en résulte avec la méthode moderne. Ce sont là des qualités qui, dans l'étude d'une science quelconque, appartiennent à la marche que nous avons nommée *historique*, et auxquelles il faut savoir renoncer franchement, quand on a bien reconnu la nécessité de suivre la marche vraiment *dogmatique*. Après avoir conçu toutes les parties d'une science de la manière la plus rationnelle, nous savons combien il importe, pour compléter cette éducation, d'étudier l'*histoire* de la science, et par conséquent, de comparer exactement les diverses méthodes que l'esprit humain a successivement employées; mais ces deux séries d'études doivent être, en général, comme nous l'avons vu, soigneusement séparées. Cependant, dans le cas dont il s'agit ici, la méthode géométrique des modernes est peut-être encore trop récente pour qu'il ne convienne pas, afin de la mieux caractériser par la comparaison, de traiter d'abord, suivant la méthode des anciens, certaines questions qui, par leur nature, doivent rentrer rationnellement dans la géométrie moderne.

Quoi qu'il en soit, écartant maintenant ces diverses considérations accessoires, nous voyons que cette introduction à la géométrie, qui ne peut être traitée que suivant la méthode des anciens, est strictement réductible à l'étude de la ligne droite, des aires polygonales et des polyèdres. Il est même vraisemblable qu'on finira par la restreindre habituellement à ces limites nécessaires, quand les grandes notions analytiques seront devenues plus familières, et qu'une étude de l'ensemble des mathématiques sera universellement regardée comme la base philosophique de l'éducation générale.

Si cette portion préliminaire de la géométrie, qui ne saurait être fondée sur l'application du calcul, se réduit, par sa nature, à une suite de recherches fondamentales très-peu étendues, il est certain, d'un autre côté, qu'on ne peut la restreindre davantage, quoique, par un véritable abus de l'esprit analytique, on ait quelquefois essayé, dans ces derniers temps, de présenter sous un point de vue purement algébrique l'établissement des théorèmes principaux de la géométrie élémentaire. C'est ainsi qu'on a prétendu démontrer par de simples considérations abstraites d'analyse mathématique la relation constante qui existe entre les trois angles d'un triangle rectiligne, la proposition fondamentale de la théorie des triangles semblables, la mesure des rectangles, celle des parallélipipèdes, etc., en un mot, précisément les seules propositions géométriques qui ne puissent être obtenues que par une étude directe du sujet, sans que le calcul soit susceptible d'y avoir aucune part. Je ne signalerais point ici de telles aberrations, si elles n'avaient pas été déterminées par l'intention évidente de perfectionner, au plus haut degré possible, le caractère philosophique de la science géométrique, en la faisant rentrer immédiatement, dès sa naissance, dans le domaine des applications de l'analyse mathématique. Mais l'erreur capitale commise à cet égard par quelques géomètres doit être soigneusement remarquée, parce qu'elle résulte de l'exagération irréfléchie de cette tendance aujourd'hui très-naturelle et éminemment philosophique, qui porte à étendre de plus en plus l'influence de l'analyse dans les études mathématiques. La contemplation des résultats prodi-

gieux auxquels l'esprit humain est parvenu en suivant une telle direction, a dû involontairement entraîner à croire que même les fondemens de la mathématique concrète pourraient être établis sur de simples considérations analytiques. Ce n'est point, en effet, pour la géométrie seulement que nous devons noter de semblables aberrations; nous aurons bientôt à en constater de parfaitement analogues relativement à la mécanique, à l'occasion des prétendues démonstrations analytiques du parallélogramme des forces. Cette confusion logique a même aujourd'hui bien plus de gravité en mécanique, où elle contribue effectivement à répandre encore un nuage métaphysique sur le caractère général de la science; tandis que, du moins en géométrie, ces considérations abstraites ont été jusqu'ici laissées en dehors, sans s'incorporer à l'exposition normale de la science.

D'après les principes présentés dans cet ouvrage, sur la philosophie mathématique, il n'est pas nécessaire d'insister beaucoup pour faire sentir le vice d'une telle manière de procéder. Nous avons déjà reconnu, en effet, que le calcul n'étant et ne pouvant être qu'un moyen de déduction, c'est s'en former une idée radicalement fausse que de vouloir l'employer à établir les fondemens élémentaires d'une science quelconque;

car, sur quoi reposeraient, dans une telle opération, les argumentations analytiques? Un travail de cette nature, bien loin de perfectionner véritablement le caractère philosophique d'une science, constituerait un retour vers l'état métaphysique, en présentant des connaissances réelles comme de simples abstractions logiques.

Quand on examine en elles-mêmes ces prétendues démonstrations analytiques des propositions fondamentales de la géométrie élémentaire, on vérifie aisément leur insignifiance nécessaire. Elles sont toutes fondées sur une manière vicieuse de concevoir le principe de l'*homogénéité*, dont j'ai exposé, dans la cinquième leçon, la véritable notion générale. Ces démonstrations supposent que ce principe ne permet point d'admettre la coexistence dans une même équation de nombres obtenus par des comparaisons concrètes différentes, ce qui est évidemment faux et visiblement contraire à la marche constante des géomètres. Aussi, il est facile de reconnaître qu'en employant la loi de l'homogénéité dans cette acception arbitraire et illégitime, on pourrait parvenir à *démontrer* avec tout autant de rigueur apparente des propositions dont l'absurdité est manifeste au premier coup-d'œil. En examinant avec attention, par exemple, le procédé à l'aide duquel on a tenté de prouver analytiquement que la somme

des trois angles d'un triangle rectiligne quelconque est constamment égale à deux angles droits, on voit qu'il est fondé sur cette notion préliminaire, que si deux triangles ont deux de leurs angles respectivement égaux, le troisième angle sera aussi, de part et d'autre, nécessairement égal. Ce premier point étant accordé, la relation proposée s'en déduit immédiatement, d'une manière très-exacte et fort simple. Or, la considération analytique, d'après laquelle on a voulu établir cette proposition préalable, est d'une telle nature que, si elle pouvait être juste, on en déduirait rigoureusement, en la reproduisant en sens inverse, cette absurdité palpable, que deux côtés d'un triangle suffisent, sans aucun angle, à l'entière détermination du troisième côté. On peut faire des remarques analogues sur toutes les démonstrations de ce genre, dont le sophisme sera ainsi vérifié d'une manière parfaitement sensible.

Plus nous devons ici considérer la géométrie comme étant aujourd'hui essentiellement analytique, plus il était nécessaire de prémunir les esprits contre cette exagération abusive de l'analyse mathématique, suivant laquelle on prétendrait se dispenser de toute observation géométrique proprement dite, en établissant sur de pures abstractions algébriques les fondemens mêmes de cette science naturelle. J'ai dû attacher d'autant plus d'importance à caractériser des aberrations ainsi liées au développement normal de l'esprit humain, qu'elles ont été pour ainsi dire consacrées dans ces derniers temps par l'assentiment formel d'un géomètre fort distingué, dont l'autorité exerce sur l'enseignement élémentaire de la géométrie une très-grande influence.

Je crois devoir remarquer à cette occasion que, sous plus d'un autre rapport, on a, ce me semble, trop perdu de vue le caractère de science naturelle nécessairement inhérent à la géométrie. Il est aisé de le reconnaître, en considérant les vains efforts tentés si long-temps par les géomètres pour *démontrer* rigoureusement, non à l'aide du calcul, mais d'après certaines constructions, plusieurs propositions fondamentales de la géométrie élémentaire. Quoi qu'on puisse faire, on ne saurait évidemment éviter de recourir quelquefois en géométrie à la simple observation immédiate, comme moyen d'établir divers résultats. Si, dans cette science, les phénomènes que l'on considère sont, en vertu de leur extrême simplicité, beaucoup plus liés entr'eux que ceux relatifs à toute autre science physique, il doit néanmoins s'en trouver nécessairement quelques-uns qui ne peuvent être déduits, et qui servent au contraire de point de départ. Qu'il convienne, en thèse générale, pour

la plus grande perfection rationnelle de la science, de les réduire au plus petit nombre possible, cela est sans doute incontestable; mais il serait absurde de prétendre les faire disparaître complétement. J'avoue d'ailleurs que je trouve moins d'inconvéniens réels à étendre un peu au delà de ce qui serait strictement nécessaire le nombre de ces notions géométriques ainsi établies par l'observation immédiate, pourvu qu'elles soient d'une simplicité suffisante, qu'à en faire le sujet de démonstrations compliquées et indirectes, même quand ces démonstrations peuvent être logiquement irréprochables.

Après avoir caractérisé aussi exactement que possible la véritable destination dogmatique de la géométrie des anciens réduite à son moindre développement indispensable, il convient de considérer sommairement dans son ensemble chacune des parties principales dont elle doit se composer. Je crois pouvoir me borner ici à envisager la première et la plus étendue de ces parties, celle qui a pour objet l'étude de la ligne droite; les deux autres sections, savoir : la quadrature des polygones et la cubature des polyèdres, ne pouvant donner lieu, vu leur nature trop restreinte, à aucune considération philosophique de quelque importance, distincte de celles indiquées dans la leçon précédente relativement à la mesure des aires et des volumes en général.

La question définitive que l'on a constamment en vue dans l'étude de la ligne droite, consiste proprement à déterminer les uns par les autres les divers élémens d'une figure rectiligne quelconque, ce qui permet de connaître toujours indirectement une ligne droite dans quelques circonstances qu'elle puisse être placée. Ce problème fondamental est susceptible de deux solutions générales, dont la nature est tout-à-fait distincte, l'une graphique, l'autre algébrique. La première, quoique fort imparfaite, est celle qu'on doit considérer d'abord, parce qu'elle dérive spontanément de l'étude directe du sujet; la seconde, bien plus parfaite sous les rapports les plus importans, ne peut être étudiée qu'en dernier lieu, parce qu'elle est fondée sur la connaissance préalable de l'autre.

La solution graphique consiste à *rapporter* à volonté la figure proposée, soit avec les mêmes dimensions, soit surtout avec des dimensions variées dans une proportion quelconque. Le premier mode ne peut guère être mentionné que pour mémoire, comme étant le plus simple, et celui que l'esprit doit envisager d'abord, car il est, évidemment, d'ailleurs presque entièrement

inapplicable par sa nature. Le second est, au contraire, susceptible de l'application la plus étendue et la plus utile. Nous en faisons encore aujourd'hui un usage important et continuel, non-seulement pour représenter exactement les formes des corps et leurs positions mutuelles, mais même pour la détermination effective des grandeurs géométriques, quand nous n'avons pas besoin d'une grande précision. Les anciens, vu l'imperfection de leurs connaissances géométriques, employaient ce procédé d'une manière beaucoup plus étendue, puisqu'il a été long-temps le seul qu'ils pussent appliquer, même dans les déterminations précises les plus importantes. C'est ainsi, par exemple, qu'Aristarque de Samos estimait la distance relative du soleil et de la lune à la terre, en prenant des mesures sur un triangle construit le plus exactement possible de façon à être semblable au triangle rectangle formé par les trois astres, à l'instant où la lune se trouve en quadrature, et où, en conséquence, il suffirait, pour définir le triangle, d'observer l'angle à la terre. Archimède lui-même, quoiqu'ayant, le premier, introduit en géométrie les déterminations calculées, a plusieurs fois employé de semblables moyens. La formation de la trigonométrie n'y a pas fait même renoncer entièrement, quoiqu'elle en ait beaucoup diminué l'usage; les

Grecs et les Arabes ont continué à s'en servir pour une foule de recherches, où nous regardons aujourd'hui l'emploi du calcul comme indispensable.

Cette exacte reproduction d'une figure quelconque suivant une échelle différente, ne peut présenter aucune grande difficulté théorique lorsque toutes les parties de la figure proposée sont comprises dans un même plan. Mais, si l'on suppose, comme il arrive le plus souvent, qu'elles soient situées dans des plans différens, on voit naître alors un nouvel ordre de considérations géométriques. La figure artificielle, qui est constamment plane, ne pouvant plus, en ce cas, être une image parfaitement fidèle de la figure réelle, il faut d'abord fixer avec précision le mode de représentation, ce qui donne lieu aux divers systèmes de *projection*. Cela posé, il reste à déterminer suivant quelles lois les phénomènes géométriques se correspondent dans les deux figures. Cette considération engendre une nouvelle série de recherches géométriques, dont l'objet définitif est proprement de découvrir comment on pourra remplacer les constructions en relief par des constructions planes. Les anciens ont eu à résoudre plusieurs questions élémentaires de ce genre, pour les divers cas où nous employons aujourd'hui la trigonométrie sphérique; et principalement pour les différens problèmes relatifs à la sphère céleste. Telle était la destination de leurs *analemnes*, et des autres figures planes qui ont suppléé pendant si long-temps à l'usage du calcul. On voit par là que les anciens connaissaient réellement les élémens de ce que nous nommons maintenant la *géométrie descriptive*, quoiqu'ils ne les eussent point conçus d'une manière distincte et générale.

Je crois convenable de signaler ici rapidement, à cette occasion, le véritable caractère philosophique de cette géométrie descriptive, bien que, comme étant une science essentiellement d'application, elle ne doive pas être comprise dans le domaine propre de cet ouvrage, tel que je l'ai circonscrit en commençant.

Toutes les questions quelconques de géométrie à trois dimensions, donnent lieu nécessairement, quand on considère leur solution graphique, à une difficulté générale qui leur est propre, celle de substituer aux diverses constructions en relief nécessaires pour les résoudre, et qui sont presque toujours d'une exécution impossible, de simples constructions planes équivalentes, susceptibles de déterminer finalement les mêmes résultats. Sans cette indispensable conversion, chaque solution de ce genre serait évidemment incomplète et réellement inapplicable dans la pratique, quoique, pour la théorie, les constructions dans l'espace soient ordinairement préférables comme plus directes. C'est afin de fournir les moyens généraux d'effectuer constamment une telle transformation que la *géométrie descriptive* a été créée, et constituée en un corps de doctrine distinct et homogène par une vue de génie de notre illustre Monge. Il a préalablement conçu un mode uniforme de représenter les corps par des figures tracées sur un seul plan, à l'aide des *projections* sur deux plans différens, ordinairement perpendiculaires entre eux, et dont l'un est supposé tourner autour de leur intersection commune pour venir se confondre avec le prolongement de l'autre; il a suffi, dans ce système, ou dans tout autre équivalent, de regarder les points et les lignes comme déterminés par leurs projections, et les surfaces par les projections de leurs génératrices. Cela posé, Monge, analysant avec une profonde sagacité les divers travaux partiels de ce genre exécutés avant lui d'après une foule de procédés incohérens, et considérant même, d'une manière générale et directe, en quoi devaient consister constamment les questions quelconques de cette nature, a reconnu qu'elles étaient toujours réductibles à un très-petit nombre de problèmes abstraits invariables, susceptibles d'être résolus séparément une fois pour toutes par des opérations uniformes, et

qui se rapportent essentiellement les uns aux contacts et les autres aux intersections des surfaces. Ayant formé des méthodes simples et entièrement générales pour la solution graphique de ces deux ordres de problèmes, toutes les questions géométriques auxquelles peuvent donner lieu les divers arts quelconques de construction, la coupe des pierres, la charpente, la perspective, la gnomonique, la fortification, etc., ont pu être traitées désormais comme de simples cas particuliers d'une théorie unique, dont l'application invariable conduira toujours nécessairement à une solution exacte, susceptible d'être facilitée dans la pratique en profitant des circonstances propres à chaque cas.

Cette importante création mérite singulièrement de fixer l'attention de tous les philosophes qui considèrent l'ensemble des opérations de l'espèce humaine, comme étant un premier pas, et jusqu'ici le seul réellement complet, vers cette rénovation générale des travaux humains, qui doit imprimer à tous nos arts un caractère de précision et de rationnalité, si nécessaire à leurs progrès futurs. Une telle révolution devait, en effet, commencer inévitablement par cette classe de travaux industriels qui se rapporte essentiellement à la science la plus simple, la plus parfaite, et la plus ancienne. Elle ne peut manquer de s'étendre successivement dans la suite, quoique avec moins de facilité, à toutes les autres opérations pratiques. Nous aurons même bientôt occasion de remarquer que Monge, qui a conçu plus profondément que personne la véritable philosophie des arts, avait essayé d'ébaucher pour l'industrie mécanique une doctrine correspondante à celle qu'il avait si heureusement formée pour l'industrie géométrique, mais sans obtenir pour ce cas, dont la difficulté est bien supérieure, aucun autre succès que celui d'indiquer assez nettement la direction que doivent prendre les recherches de cette nature.

Quelqu'essentielle que soit réellement la conception de la géométrie descriptive, il importe beaucoup de ne pas se méprendre sur la véritable destination qui lui est si expressément propre, comme l'ont fait, surtout dans les premiers temps de cette découverte, ceux qui y ont vu un moyen d'agrandir le domaine général et abstrait de la géométrie rationnelle. L'événement n'a nullement répondu depuis à ces espérances mal conçues. Et, en effet, n'est-il pas évident que la géométrie descriptive n'a de valeur spéciale que comme science d'application, comme constituant la véritable théorie propre des arts géométriques? Considérée sous le rapport abstrait, elle ne saurait introduire aucun ordre vraiment distinct

de spéculations géométriques. Il ne faut point perdre de vue que, pour qu'une question géométrique tombe dans le domaine propre de la géométrie descriptive, elle doit nécessairement avoir toujours été résolue préalablement par la géométrie spéculative, dont ensuite, comme nous l'avons vu, les solutions ont constamment besoin d'être préparées pour la pratique de manière à suppléer aux constructions en relief par des constructions planes, substitution qui constitue réellement la seule fonction caractéristique de la géométrie descriptive.

Il convient néanmoins de remarquer ici que, sous le rapport de l'éducation intellectuelle, l'étude de la géométrie descriptive présente une importante propriété philosophique, tout-à-fait indépendante de sa haute utilité industrielle. C'est l'avantage qu'elle offre si éminemment, en habituant à considérer dans l'espace des systèmes géométriques quelquefois très-composés, et à suivre exactement leur correspondance continuelle avec les figures effectivement tracées, d'exercer ainsi au plus haut degré de la manière la plus sûre et la plus précise, cette importante faculté de l'esprit humain qu'on appelle l'*imagination* proprement dite, et qui consiste, dans son acception élémentaire et positive, à se représenter nettement, avec facilité, un vaste ensemble variable d'objets fictifs, comme s'ils étaient sous nos yeux.

Enfin, pour achever d'indiquer la nature générale de la géométrie descriptive en déterminant son caractère logique, nous devons observer que si, par le genre de ses solutions, elle appartient à la géométrie des anciens, d'un autre côté elle se rapproche de la géométrie des modernes par l'espèce des questions qui la composent. Ces questions sont, en effet, éminemment remarquables par cette généralité que nous avons vue, dans la dernière leçon, constituer le vrai caractère fondamental de la géométrie moderne; les méthodes y sont toujours conçues comme applicables à des formes quelconques, les particularités propres à chaque forme n'y pouvant avoir qu'une influence purement secondaire. Les solutions y sont donc graphiques comme la plupart de celles des anciens, et générales comme celles des modernes.

Après cette importante digression, dont le lecteur aura sans doute reconnu la nécessité, poursuivons l'examen philosophique de la géométrie *spéciale*, considérée toujours comme réduite à son moindre développement possible, pour servir d'introduction indispensable à la géométrie *générale*. Ayant suffisamment envisagé la solution graphique du problème fondamental relatif à la ligne droite, c'est-à-dire, de la détermination les uns par les autres des divers élémens d'une figure rectiligne quelconque, nous devons maintenant en

examiner d'une manière générale la solution algébrique.

Cette seconde solution, dont il est inutile ici d'apprécier expressément la supériorité évidente, appartient nécessairement, par la nature même de la question, au système de la géométrie ancienne, quoique le procédé logique employé l'en fasse ordinairement séparer mal à propos. Nous avons lieu de vérifier ainsi, sous un rapport très-important, ce qui a été établi en général dans la leçon précédente, que ce n'est point par l'emploi du calcul qu'on doit distinguer essentiellement la géométrie moderne de celle des anciens. Les anciens sont, en effet, les vrais inventeurs de la trigonométrie actuelle, tant sphérique que rectiligne, qui seulement était beaucoup moins parfaite entre leurs mains, vu l'extrême infériorité de leurs connaissances algébriques. C'est donc réellement dans cette leçon, et non, comme on pourrait le croire d'abord, dans celles que nous cansacrerons ensuite à l'examen philosophique de la géométrie *générale*, qu'il convient d'apprécier le caractère de cette importante théorie préliminaire, habituellement comprise à tort dans ce qu'on appelle la *géométrie analytique*, et qui n'est effectivement qu'un complément de la *géométrie élémentaire* proprement dite.

Toutes les figures rectilignes pouvant être décomposées en triangles, il suffit évidemment de savoir déterminer les uns par les autres les divers élémens d'un triangle, ce qui réduit la *polygonométrie* à la simple *trigonométrie*.

Pour qu'une telle question puisse être résolue algébriquement, la difficulté consiste essentiellement à former entre les angles et les côtés d'un triangle trois équations distinctes, qui, une fois obtenues, réduiront évidemment tous les problèmes trigonométriques à de pures recherches de calcul. En considérant de la manière la plus générale l'établissement de ces équations, on voit naître immédiatement une distinction fondamentale relativement au mode d'introduction des angles dans le calcul, suivant qu'on les y fera entrer directement par eux-même ou par les arcs, circulaires qui leur sont proportionnels, ou que, au contraire, on leur substituera certaines droites, comme, par exemple, les cordes de ces arcs qui leur sont inhérentes, et que, par cette raison, on appelle ordinairement leurs lignes trigonométriques. De ces deux systèmes de trigonométrie, le second a dû être, à l'origine, le seul adopté, comme étant le seul praticable, puisque l'état de la géométrie permettait alors de trouver assez aisément des relations exactes entre les côtés des triangles et les lignes trigonométriques des angles, tandis qu'il eût été absolument impossible,

à cette époque, d'établir des équations entre les côtés et les angles eux-mêmes. La solution pouvant aujourd'hui être obtenue indifféremment dans l'un et dans l'autre système, ce motif de préférence ne subsiste plus. Mais les géomètres n'en ont pas moins dû persister à suivre par choix le système primitivement admis par nécessité; car, la même raison qui a permis ainsi d'obtenir les équations trigonométriques avec beaucoup plus de facilité, doit également, comme il est encore plus aisé de le concevoir *à priori*, rendre ces équations bien plus simples, puisqu'elles existent alors seulement entre des lignes droites, au lieu d'être établies entre des lignes droites et des arcs de cercle. Une telle considération a d'autant plus d'importance qu'il s'agit là de formules éminemment élémentaires, destinées à être continuellement employées dans toutes les parties de la science mathématique aussi bien que dans toutes ses diverses applications.

On peut objecter, il est vrai, que, lorsqu'un angle est donné, c'est toujours en effet par lui-même et non par sa ligne trigonométrique; et que, lorsqu'il est inconnu, c'est sa valeur angulaire qu'il s'agit proprement de déterminer, et non celle d'aucune de ses lignes trigonométriques. Il semble, d'après cela, que de telles lignes ne sont entre les côtés et les angles qu'un intermédiaire inutile, qui doit être finalement éliminé, et dont l'introduction ne paraît point susceptible de simplifier la recherche qu'on se propose. Il importe, en effet, d'expliquer avec plus de généralité et de précision qu'on ne le fait d'ordinaire l'immense utilité réelle de cette manière de procéder. Elle consiste en ce que l'introduction de ces grandeurs auxiliaires partage la question totale de la trigonométrie en deux autres essentiellement distinctes, dont l'une a pour objet de passer des angles à leurs signes trigonométriques ou réciproquement, et dont l'autre se propose de déterminer les côtés des triangles par les lignes trigonométriques de leurs angles ou réciproquement. Or, la première de ces deux questions fondamentales est évidemment susceptible, par sa nature, d'être entièrement traitée et réduite en tables numériques une fois pour toutes, en considérant tous les angles possibles, puisqu'elle ne dépend que de ces angles, et nullement des triangles particuliers où ils peuvent entrer dans chaque cas ; tandis que la solution de la seconde question doit nécessairement être renouvelée, du moins sous le rapport arithmétique, à chaque nouveau triangle qu'il faut résoudre. C'est pourquoi la première portion du travail total, qui serait précisément la plus pénible, n'est plus comptée ordinairement, étant toujours faite

d'avance; tandis que si une telle décomposition n'avait point été instituée, on se serait trouvé évidemment dans l'obligation de recommencer dans chaque cas particulier le calcul tout entier. Telle est la proprieté essentielle du système trigonométrique adopté, qui, en effet, ne présenterait réellement aucun avantage effectif si, pour chaque angle à considérer, il fallait calculer continuellement sa ligne trigonométrique ou réciproquement : l'intermédiaire serait alors plus gênant que commode.

Afin de comprendre nettement la vraie nature de cette conception, il sera utile de la comparer à une conception encore plus importante, destinée à produire un effet analogue, soit sous le rapport algébrique, soit surtout sous le rapport arithmétique, l'admirable théorie des logarithmes. En examinant d'une manière philosophique l'influence de cette théorie, on voit, en effet, que son résultat général est d'avoir décomposé toutes les opérations arithmétiques imaginables en deux parties distinctes, dont la première, qui est la plus compliquée, est susceptible d'être exécutée à l'avance une fois pour toutes, comme ne dépendant que des nombres à considérer et nullement des diverses combinaisons quelconques dans lesquelles ils peuvent entrer, et qui consiste à se représenter tous les nombres comme des puissances assignables d'un nombre constant ; la seconde partie du calcul, qui doit nécessairement être recommencée pour chaque formule nouvelle à évaluer, étant dès lors réduite à exécuter sur ces exposans des opérations corrélatives infiniment plus simples. Je me borne à indiquer ce rapprochement, que chacun peut aisément développer.

Nous devons de plus observer comme une propriété, secondaire aujourd'hui, mais capitale à l'origine, du système trigonométrique adopté, la circonstance très-remarquable que la détermination des angles par leurs lignes trigonométriques ou réciproquement, est susceptible d'une solution arithmétique, la seule qui soit directement indispensable pour la destination propre de la trigonométrie, sans avoir préalablement résolu la question algébrique correspondante. C'est sans doute à une telle particularité que les anciens ont dû de pouvoir connaître la trigonométrie. La recherche ainsi conçue a été d'autant plus facile que, les anciens ayant pris naturellement la corde pour ligne trigonométrique, les tables se trouvaient avoir été d'avance construites en partie pour un tout autre motif, en vertu du travail d'Archimède sur la rectification du cercle, d'où résultait la détermination effective d'une certaine suite de cordes, en sorte que, lorsque plus tard Hipparque eut inventé la trigonométrie, il put se

borner à compléter cette opération par des intercalations convenables, ce qui marque nettement la filiation des idées à cet égard.

Afin d'esquisser entièrement cet aperçu philosophique de la trigonométrie, il convient d'observer maintenant que l'extension du même motif qui conduit à remplacer les angles ou les arcs de cercle par des lignes droites dans la vue de simplifier les équations, doit aussi porter à employer concurremment plusieurs lignes trigonométriques, au lieu de se borner à une seule, comme le faisaient les anciens, pour perfectionner ce système en choisissant celle qui sera algébriquement la plus convenable en telle ou telle occasion. Sous ce rapport, il est clair que le nombre de ces lignes n'est par lui-même nullement limité; pourvu qu'elles soient déterminées d'après l'arc, et que réciproquement elles le déterminent, suivant quelque loi qu'elles en dérivent d'ailleurs, elles sont aptes à lui être substituées dans les équations. En se bornant aux constructions les plus simples, les Arabes et les modernes ensuite ont successivement porté à quatre ou à cinq le nombre des lignes trigonométriques *directes*, qui pourrait être étendu bien davantage. Mais, au lieu de recourir à des formations géométriques qui finiraient par devenir très-compliquées, on conçoit avec une extrême facilité autant de nouvelles lignes trigonométriques que peuvent l'exiger les transformations analytiques, au moyen d'un artifice remarquable, qui n'est pas ordinairement saisi d'une manière assez générale. Il consiste, sans multiplier immédiatement les lignes trigonométriques propres à chaque arc considéré, à en introduire de nouvelles en regardant cet arc comme déterminé indirectement par toutes les lignes relatives à un arc qui soit une fonction très-simple du premier. C'est ainsi, par exemple, que souvent, pour calculer un angle avec plus de facilité, on déterminera, au lieu de son sinus, le sinus de sa moitié ou de son double, etc. Une telle création de lignes trigonométriques *indirectes* est évidemment bien plus féconde que tous les procédés géométriques immédiats pour en obtenir de nouvelles. On peut dire, d'après cela, que le nombre des lignes trigonométriques effectivement employées aujourd'hui par les géomètres est réellement indéfini, puisque, à chaque instant pour ainsi dire, les transformations analytiques peuvent conduire à l'augmenter par le procédé que je viens d'indiquer. Seulement, on n'a donné jusqu'ici de noms spéciaux qu'à celles de ces lignes *indirectes* qui se rapportent au complément de l'arc primitif, les autres ne revenant pas assez fréquemment pour nécessiter de semblables dénominations, ce qui a fait communément méconnaître la véritable étendue du système trigonométrique.

Cette multiplicité des lignes trigonométriques fait naître évidemment, dans la trigonométrie, une troisième question fondamentale, l'étude des relations qui existent entre ces diverses lignes; puisque, sans une telle connaissance, on ne pourrait point utiliser, pour les besoins analytiques, cette variété de grandeurs auxiliaires, qui n'a pourtant pas d'autre destination. Il est clair, en outre, d'après la considération indiquée tout à l'heure, que cette partie essentielle de la trigonométrie, quoique simplement préparatoire, est, par sa nature, susceptible d'une extension indéfinie quand on l'envisage dans son entière généralité, tandis que les deux autres sont nécessairement circonscrites dans un cadre rigoureusement défini.

Je n'ai pas besoin d'ajouter expressément que ces trois parties principales de la trigonométrie doivent être étudiées dans un ordre précisément inverse de celui suivant lequel nous les avons vues dériver nécessairement de la nature générale du sujet; car la troisième est visiblement indépendante des deux autres, et la seconde de celle qui s'est présentée la première, la résolution des triangles proprement dite, qui doit, pour cette raison, être traitée en dernier lieu, ce qui rendait d'autant plus importante la considération de la filiation naturelle.

Il était inutile d'envisager ici distinctement la trigonométrie sphérique, qui ne peut donner lieu à aucune considération philosophique spéciale, puisque, quelque essentielle qu'elle soit par l'importance et la multiplicité de ses usages, on ne peut plus la traiter aujourd'hui, dans son ensemble, que comme une simple application de la trigonométrie rectiligne, qui fournit immédiatement ses équations fondamentales, en substituant au triangle sphérique l'angle trièdre correspondant.

J'ai cru devoir indiquer cette exposition sommaire de la philosophie trigonométrique, qui pourrait d'ailleurs donner lieu à beaucoup d'autres considérations intéressantes, afin de rendre sensibles, par un exemple important, cet enchaînement rigoureux et cette ramification successive que présentent les questions les plus simples en apparence de la géométrie élémentaire.

Ayant ainsi suffisamment considéré pour le but de cet ouvrage le caractère propre de la géométrie *spéciale*, réduite à sa seule destination dogmatique, de fournir à la géométrie *générale* une base préliminaire indispensable, nous devons désormais porter toute notre attention sur la véritable science géométrique, envisagée dans son

ensemble de la manière la plus rationnelle. Il faut d'abord, à cet effet, soigneusement examiner la grande idée-mère de Descartes, sur laquelle elle est entièrement fondée, ce qui fera l'objet de la leçon suivante.