DOUZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Conception fondamentale de la géométrie *générale* ou *analytique*.

La géométrie *générale* étant entièrement fondée sur la transformation des considérations géométriques en considérations analytiques équivalentes, nous devons d'abord examiner directement et d'une manière approfondie la belle conception d'après laquelle Descartes a établi uniformément la possibilité constante d'une telle co-rélation. Outre son extrême importance propre, comme moyen de perfectionner éminemment la science géométrique, ou plutôt de la constituer dans son ensemble sur des bases rationnelles, l'étude philosophique de cette admirable conception doit avoir à nos yeux un intérêt d'autant plus élevé, qu'elle caractérise avec une parfaite évidence la méthode générale à employer pour organiser les relations de l'abstrait au concret en mathématique, par la représentation analytique des phénomènes naturels. Il n'y a point, dans la philosophie mathématique, de pensée qui mérite davantage de fixer toute notre attention.

Afin de parvenir à exprimer par de simples relations analytiques tous les divers phénomènes géométriques que l'on peut imaginer, il faut évidemment établir d'abord un mode général pour représenter analytiquement les sujets mêmes dans lesquels ces phénomènes résident, c'est-à-dire les lignes ou les surfaces à considérer. Le *sujet* étant ainsi habituellement envisagé sous un point de vue purement analytique, on comprend que dès-lors il a été possible de concevoir de la même manière les *accidens* quelconques dont il est susceptible.

Pour organiser la représentation des formes géométriques par des équations analytiques, on doit surmonter préalablement une difficulté fondamentale, celle de réduire à des idées simplement numériques les élémens généraux des diverses notions géométriques ; en un mot, de substituer, en géométrie, de pures considérations de *quantité* à toutes les considérations de *qualité*.

A cet effet, observons d'abord que toutes les idées géométriques se rapportent nécessairement à ces trois catégories universelles : la grandeur, la forme et la position des étendues à considérer. Quant à la première, il n'y a évidemment aucune difficulté; elle rentre immédiatement dans

les idées de nombres. Pour la seconde, il faut remarquer qu'elle est toujours réductible par sa nature à la troisième. Car la forme d'un corps résulte évidemment de la position mutuelle des différens points dont il est composé, en sorte que l'idée de position comprend nécessairement celle de forme, et que toute circonstance de forme peut être traduite par une circonstance de position. C'est ainsi, en effet, que l'esprit humain a procédé pour parvenir à la représentation analytique des formes géométriques, la conception n'étant directement relative qu'aux positions. Toute la difficulté élémentaire se réduit donc proprement à ramener les idées quelconques de situation à des idées de grandeur. Telle est la destination immédiate de la conception préliminaire sur laquelle Descartes a établi le système général de la géométrie analytique.

Son travail philosophique a simplement consisté, sous ce rapport, dans l'entière généralisation d'un procédé élémentaire qu'on peut regarder comme naturel à l'esprit humain, puisqu'il se forme pour ainsi dire spontanément chez toutes les intelligences, même les plus vulgaires. En effet, quand il s'agit d'indiquer la situation d'un objet sans le montrer immédiatement, le moyen que nous adoptons toujours, et le seul évidemment qui puisse être employé, consiste à rapporter cet objet à d'autres qui soient connus, en assignant la grandeur des élémens géométriques quelconques, par lesquels on le conçoit lié à ceux-ci (1). Ces élémens constituent ce que Descartes, et d'après lui tous les géomètres, ont appelé les *coordonnées* de chaque point considéré, qui sont nécessairement au nombre de deux si l'on sait d'avance dans quel plan le point est situé, et au nombre de trois, s'il peut se trouver indifféremment dans une région quelconque de l'espace. Autant de constructions différentes on peut imaginer pour déterminer la position d'un point, soit sur un plan, soit dans l'espace, autant on conçoit de systèmes de coordonnées distincts, qui sont susceptibles, par conséquent, d'être multipliés à l'infini. Mais quelque soit le système adopté, on aura toujours ramené les idées de situation à de simples idées de grandeur, en sorte que l'on se représentera le déplacement d'un point comme produit par de pures variations numériques dans les valeurs de ses coordonnées. Pour ne considérer d'abord que le cas le moins compliqué, celui de la géométrie plane, c'est ainsi qu'on détermine le plus souvent la position d'un point sur un plan, par ses distances plus ou moins grandes à

(1) C'est ainsi, par exemple, que nous déterminons habituellement la position des lieux sur la terre par leurs distances plus ou moins grandes à l'équateur et à un premier méridien.

deux droites fixes supposées connues, qu'on nomme *axes*, et qu'on suppose ordinairement perpendiculaires entre elles. Ce système est le plus adopté, à cause de sa simplicité; mais les géomètres en emploient quelquefois encore une infinité d'autres. Ainsi, la position d'un point sur un plan peut être déterminée par ses distances à deux points fixes; ou par sa distance à un seul point fixe, et la direction de cette distance, estimée par l'angle plus ou moins grand qu'elle fait avec une droite fixe, ce qui constitue le système des coordonnées dites *polaires*, le plus usité après celui dont nous avons parlé d'abord; ou par les angles que forment les droites allant du point variable à deux points fixes avec la droite qui joint ces derniers; ou par les distances de ce point à une droite fixe et à un point fixe, etc. En un mot, il n'y a pas de figure géométrique quelconque d'où l'on ne puisse déduire un certain système de coordonnées, plus ou moins susceptible d'être employé.

Une observation générale qu'il importe de faire à cet égard, c'est que tout système de coordonnées revient à déterminer un point, dans la géométrie plane, par l'intersection de deux lignes, dont chacune est assujétie à certaines conditions fixes de détermination; une seule de ces conditions restant variable, et tantôt l'une, tantôt une autre, selon le système considéré. On ne saurait, en effet, concevoir d'autre moyen de construire un point que de le marquer par la rencontre de deux lignes quelconques. Ainsi, dans le système le plus fréquent, celui des *coordonnées rectilignes* proprement dites, le point est déterminé par l'intersection de deux droites, dont chacune reste constamment parallèle à un axe fixe, en s'en éloignant plus ou moins; dans le système *polaire*, c'est la rencontre d'un cercle de rayon variable et dont le centre est fixe, avec une droite mobile assujétie à tourner autour de ce centre, qui marque la position du point; en choisissant d'autres systèmes, le point pourrait être désigné par l'intersection de deux cercles, ou de deux autres lignes quelconques, etc. En un mot, assigner la valeur d'une des coordonnées d'un point dans quelque système que ce puisse être, c'est toujours nécessairement déterminer une certaine ligne sur laquelle ce point doit être situé. Les géomètres de l'antiquité avaient déjà fait cette remarque essentielle, qui servait de base à leur méthode des *lieux géométriques*, dont ils faisaient un si heureux usage pour diriger leurs recherches dans la résolution des problèmes de géométrie *déterminés*, en appréciant isolément l'influence de chacune des deux conditions par lesquelles était défini chaque point constituant l'objet, direct ou indirect, de la question proposée : c'est précisément cette méthode dont la systématisation générale a été pour Descartes le motif immédiat des travaux qui l'ont conduit à fonder la géométrie analytique.

Après avoir nettement établi cette conception préliminaire, en vertu de laquelle les idées de position, et, par suite implicitement, toutes les notions géométriques élémentaires, sont réductibles à de simples considérations numériques, il est aisé de concevoir directement, dans son entière généralité, la grande idée-mère de Descartes, relative à la représentation analytique des formes géométriques, ce qui constitue l'objet propre de cette leçon. Je continuerai à ne considérer d'abord, pour plus de facilité, que la géométrie à deux dimensions, la seule que Descartes ait traitée, devant ensuite examiner séparément sous le même point de vue ce qui est propre à la théorie des surfaces ou des courbes à double courbure.

D'après la manière d'exprimer analytiquement la position d'un point sur un plan, on peut aisément établir que, par quelque propriété qu'une ligne quelconque puisse être définie, cette définition est toujours susceptible d'être remplacée par une équation correspondante entre les deux coordonnées variables du point qui décrit cette ligne, équation qui sera dès lors la représentation analytique de la ligne proposée, dont tout phénomène devra se traduire par une certaine modification algébrique de son équation. Si l'on suppose, en effet, qu'un point se meuve sur un plan sans que son cours soit déterminé en aucune manière, on devra évidemment regarder ses deux coordonnées, dans quelque système que ce soit, comme deux variables entièrement indépendantes l'une de l'autre. Mais, si au contraire ce point est assujéti à décrire une certaine ligne quelconque, il faudra nécessairement concevoir que ses coordonnées conservent entre elles, dans toutes les positions qu'il peut prendre, une certaine relation permanente et précise, susceptible, par conséquent, d'être exprimée par une équation convenable, qui deviendra la définition analytique très-nette et très-rigoureuse de la ligne considérée, puisqu'elle exprimera une propriété algébrique exclusivement relative aux coordonnées de tous les points de cette ligne. Il est clair, en effet, que lorsqu'un point n'est soumis à aucune condition, sa situation n'est déterminée qu'autant qu'on donne à la fois ses deux coordonnées, distinctement l'une de l'autre; tandis que quand le point doit se trouver sur une ligne définie, une seule coordonnée suffit pour fixer entièrement sa position. La seconde coordonnée est donc alors une *fonction* déterminée de la pre-

mière, ou, en d'autres termes, il doit exister entre elles une certaine *équation*, d'une nature correspondante à celle de la ligne sur laquelle le point est assujéti à rester. En un mot, chacune des coordonnées d'un point l'obligeant à être situé sur une certaine ligne, on conçoit réciproquement que la condition, de la part d'un point, de devoir appartenir à une ligne définie d'une manière quelconque, équivaut à assigner la valeur de l'une des deux coordonnées, qui se trouve, dans ce cas, être entièrement dépendante de l'autre. La relation analytique qui exprime cette dépendance peut être plus ou moins difficile à découvrir; mais on doit évidemment en concevoir toujours l'existence, même dans les cas où nos moyens actuels seraient insuffisans pour la faire connaître. C'est par cette simple considération que, indépendamment des vérifications particulières sur lesquelles est ordinairement établie cette conception fondamentale à l'occasion de telle ou telle définition de ligne, on peut démontrer, d'une manière entièrement générale, la nécessité de la représentation analytique des lignes par les équations.

En reprenant en sens inverse les mêmes réflexions, on mettrait aussi facilement en évidence la nécessité géométrique de la représentation de toute équation à deux variables, dans un système déterminé de coordonnées, par une certaine ligne, dont une telle relation serait, à défaut d'aucune autre propriété connue, une définition très-caractéristique, et qui aura pour destination scientifique de fixer immédiatement l'attention sur la marche générale des solutions de l'équation, qui se trouvera ainsi notée de la manière la plus sensible et la plus simple. Cette peinture des équations est un des avantages fondamentaux les plus importans de la géométrie analytique, qui a par là réagi au plus haut degré sur le perfectionnement général de l'analyse elle-même, non seulement en assignant aux recherches purement abstraites un but nettement déterminé et une carrière inépuisable, mais, sous un rapport encore plus direct, en fournissant un nouveau moyen philosophique de méditation analytique, qui ne pourrait être remplacé par aucun autre. En effet, la discussion purement algébrique d'une équation en fait sans doute connaître les solutions de la manière la plus précise, mais en les considérant seulement une à une, de telle sorte que, par cette voie, leur marche générale ne saurait être conçue qu'en résultat définitif d'une longue et pénible suite de comparaisons numériques, après laquelle l'activité intellectuelle doit ordinairement se trouver émoussée. Au contraire, le lieu géométrique de l'équation étant uniquement des-

tiné à représenter distinctement et avec une netteté parfaite le résumé de cet ensemble de comparaisons, permet de le considérer directement en fesant complètement abstraction des détails qui l'ont fourni, et par là peut indiquer à notre esprit des vues analytiques générales, auxquelles nous serions difficilement parvenus de toute autre manière, faute d'un moyen de caractériser clairement leur objet. Il est évident, par exemple, que la simple inspection de la courbe logarithmique ou de la courbe $y = \sin x$ fait connaître d'une manière bien plus distincte le mode général de variations des logarithmes par rapport aux nombres ou des sinus par rapport aux arcs, que ne pourrait le permettre l'étude la plus attentive d'une table de logarithmes ou d'une table trigonométrique. On sait que ce procédé est devenu aujourd'hui entièrement élémentaire, et qu'on l'emploie toutes les fois qu'il s'agit de saisir nettement le caractère général de la loi qui règne dans une suite d'observations précises d'un genre quelconque.

Revenant à la représentation des lignes par les équations, qui est notre objet principal, nous voyons que cette représentation est, par sa nature, tellement fidèle, que la ligne ne saurait éprouver aucune modification, quelque légère qu'elle soit, sans déterminer dans l'équation un changement correspondant. Cette complète exactitude donne même lieu souvent à des difficultés spéciales, en ce que, dans notre système de géométrie analytique, les simples déplacemens des lignes se fesant aussi bien ressentir dans les équations que les variations réelles de grandeur ou de forme, on pourrait être exposé à confondre analytiquement les uns avec les autres, si les géomètres n'avaient pas découvert une méthode ingénieuse expressément destinée à les distinguer constamment. Cette méthode est fondée sur ce que, bien qu'il soit impossible de changer analytiquement à volonté la position d'une ligne par rapport aux axes des coordonnées, on peut changer d'une manière quelconque la situation des axes eux-mêmes, ce qui est évidemment équivalent; dès lors, à l'aide des formules générales très-simples par lesquelles on opère cette transformation d'axes, il devient aisé de reconnaître si deux équations différentes ne sont que l'expression analytique d'une même ligne diversement située, ou se rapportent à des lieux géométriques vraiment distincts, puisque, dans le premier cas, l'une d'elles doit rentrer dans l'autre en changeant convenablement les axes ou les autres constantes du système de coordonnées considéré. Du reste, il faut remarquer à ce sujet que les inconvéniens généraux de cette nature paraissent, en

géométrie analytique, devoir être strictement inévitables; puisque les idées de position étant, comme nous l'avons vu, les seules idées géométriques immédiatement réductibles à des considérations numériques, et les notions de forme ne pouvant y être ramenées qu'en voyant en elles des rapports de situation, il est impossible que l'analyse ne confonde point d'abord les phénomènes de forme avec de simples phénomènes de position, les seuls que les équations expriment directement.

Pour compléter l'explication philosophique de la conception fondamentale qui sert de base à la géométrie analytique, je crois devoir indiquer ici une nouvelle considération générale, qui me semble particulièrement propre à mettre dans tout son jour cette représentation nécessaire des lignes par des équations à deux variables. Elle consiste en ce que non-seulement, ainsi que nous l'avons établi, toute ligne définie doit nécessairement donner lieu à une certaine équation entre les deux coordonnées de l'un quelconque de ses points; mais, de plus, toute définition de ligne peut être envisagée comme étant déjà elle-même une équation de cette ligne dans un système de coordonnées convenable.

Il est aisé d'établir ce principe, en faisant d'abord une distinction logique préliminaire relativement aux diverses sortes de définition. La condition rigoureusement indispensable de toute définition, c'est de distinguer l'objet défini d'avec tout autre, en assignant une propriété qui lui appartienne exclusivement. Mais ce but peut être atteint, en général, de deux manières très-différentes : ou par une définition simplement *caractéristique*, c'est-à-dire, indiquant une propriété qui, quoique vraiment exclusive, ne fait pas connaître la génération de l'objet ; ou par une définition réellement *explicative*, c'est-à-dire, caractérisant l'objet par une propriété qui exprime un de ses modes de génération. Par exemple, en considérant le cercle comme la ligne qui, sous le même contour, renferme la plus grande aire, on a évidemment une définition du premier genre ; tandis qu'en choisissant la propriété d'avoir tous ses points à égale distance d'un point fixe, ou toute autre semblable, on a une définition du second genre. Il est, du reste, évident, en thèse générale, que quand même un objet quelconque ne serait d'abord connu que par une définition *caractéristique*, on ne devrait pas moins l'envisager comme susceptible de définitions *explicatives*, que ferait nécessairement découvrir l'étude ultérieure de cet objet.

Cela posé, il est clair que ce n'est point aux définitions simplement *caractéristiques* que peut

s'appliquer l'observation générale annoncée ci-dessus, qui représente toute définition de ligne comme étant nécessairement une équation de cette ligne dans un certain système de coordonnées. On ne peut l'entendre que des définitions vraiment *explicatives*. Mais, en ne considérant que celle-ci, le principe est aisé à constater. En effet, il est évidemment impossible de définir la génération d'une ligne, sans spécifier une certaine relation entre les deux mouvemens simples, de translation ou de rotation, dans lesquels se décomposera à chaque instant le mouvement du point qui la décrit. Or, en se formant la notion la plus générale de ce que c'est qu'un *système de coordonnées*, et admettant tous les systèmes possibles, il est clair qu'une telle relation ne sera autre chose que l'*équation* de la ligne proposée, dans un système de coordonnées d'une nature correspondante à celle du mode de génération considéré. Ainsi, par exemple, la définition vulgaire du cercle peut évidemment être envisagée comme étant immédiatement l'*équation polaire* de cette courbe, en prenant pour pôle le centre du cercle ; de même, la définition élémentaire de l'ellipse ou de l'hyperbole, comme étant la courbe engendrée par un point qui se meut de telle manière que la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes demeure constante, donne sur-lechamp, pour l'une ou l'autre courbe, l'équation $y+x=c$, en prenant pour système de coordonnées celui dans lequel on déterminerait la position d'un point par ses distances à deux points fixes, et choisissant pour ces pôles les deux foyers donnés; pareillement encore, la définition ordinaire de la cycloïde quelconque fournirait directement, pour cette courbe, l'équation $y=mx$, en adoptant comme coordonnées de chaque point l'arc plus ou moins grand qu'il marque sur un cercle de rayon invariable à partir du point de contact de ce cercle avec une droite fixe, et la distance rectiligne de ce point de contact à une certaine origine prise sur cette droite. On peut faire des vérifications analogues et aussi faciles relativement aux définitions habituelles des spirales, des épicycloïdes, etc. On trouvera constamment qu'il existe un certain système de coordonnées, dans lequel on obtient immédiatement une équation très-simple de la ligne proposée, en se bornant à écrire algébriquement la condition imposée par le mode de génération que l'on considère.

Outre son importance directe, comme moyen de rendre parfaitement sensible la représentation nécessaire de toute ligne par une équation, la considération précédente me paraît pouvoir offrir une véritable utilité scientifique, en caractérisant avec exactitude la principale difficulté générale

qu'on rencontre dans l'établissement effectif de ces équations, et, par conséquent, en fournissant une indication intéressante relativement à la marche à suivre dans les recherches de ce genre, qui, par leur nature, ne sauraient comporter des règles complètes et invariables. En effet, si une définition quelconque de ligne, du moins parmi celles qui indiquent un mode de génération, fournit directement l'équation de cette ligne dans un certain système de coordonnées, ou pour mieux dire constitue par elle-même cette équation, il s'ensuit que la difficulté qu'on éprouve souvent à découvrir l'équation d'une courbe, d'après telle ou telle de ses propriétés caractéristiques, difficulté qui quelquefois est très-grande, ne doit provenir essentiellement que de la condition qu'on s'impose ordinairement d'exprimer analytiquement cette courbe à l'aide d'un système de coordonnées désigné, au lieu d'admettre indifféremment tous les systèmes possibles. Ces divers systèmes ne peuvent pas être regardés, en géométrie analytique, comme étant tous également convenables; pour différens motifs, dont les plus importans vont être discutés ci-dessous, les géomètres croient devoir presque toujours rapporter, autant que possible, les courbes à des coordonnées rectilignes proprement dites. Or, on conçoit, d'après ce qui précède, que souvent ces coordonnées uniques ne seront pas celles relativement auxquelles l'équation de la courbe se trouverait immédiatement établie par la définition proposée. La principale difficulté que présente la formation de l'équation d'une ligne consiste donc réellement, en général, dans une certaine transformation de coordonnées. Sans doute, cette considération n'assujétit point l'établissement de ces équations à une véritable méthode générale complète, dont le succès soit toujours assuré nécessairement, ce qui, par la nature même du sujet, est évidemment chimérique ; mais une telle vue peut nous éclairer utilement à cet égard sur la marche qu'il convient d'adopter pour parvenir au but proposé. Ainsi, après avoir d'abord formé l'équation préparatoire qui dérive spontanément de la définition que l'on considère, il faudra, pour obtenir l'équation relative au système de coordonnées qui doit être admis définitivement, chercher à exprimer en fonction de ces dernières coordonnées celles qui correspondent naturellement au mode de génération dont il s'agit. C'est sur ce dernier travail qu'il est évidemment impossible de donner des préceptes invariables et précis. On peut dire seulement qu'on aura d'autant plus de ressources à cet égard, qu'on saura davantage de véritable géométrie analytique, c'est-à-dire, qu'on connaîtra l'expression algébrique d'un plus

grand nombre de phénomènes géométriques différens.

Pour compléter l'exposition philosophique de la conception qui sert de base à la géométrie analytique, il me reste à indiquer les considérations relatives au choix du système de coordonnées qui est, en général, le plus convenable, ce qui fournira l'explication rationnelle de la préférence unanimement accordée au système rectiligne ordinaire, préférence qui a été plutôt jusqu'ici l'effet d'un sentiment empirique de la supériorité de ce système, que le résultat exact d'une analyse directe et approfondie.

Afin de décider nettement entre tous les divers systèmes de coordonnées, il est indispensable de distinguer avec soin les deux points de vue généraux, inverses l'un de l'autre, propres à la géométrie analytique, savoir : la relation de l'algèbre à la géométrie, fondée sur la représentation des lignes par les équations ; et réciproquement la relation de la géométrie à l'algèbre fondée sur la peinture des équations par les lignes.

Il est évident que, dans toute recherche quelconque de géométrie générale, ces deux points de vue fondamentaux se trouvent nécessairement combinés sans cesse, puisqu'il s'agit toujours de passer alternativement, et à des intervalles pour ainsi dire insensible, des considérations géométriques aux considérations analytiques, et des considérations analytiques aux considérations géométriques. Mais la nécessité de les séparer ici momentanément n'en est pas moins réelle ; car la réponse à la question de méthode que nous examinons est, en effet, comme nous allons le voir, fort loin de pouvoir être la même sous l'un et sous l'autre de ces deux rapports, en sorte que sans cette distinction on ne saurait s'en former aucune idée nette.

Sous le premier point de vue, rigoureusement isolé, le seul motif qui puisse faire préférer un système de coordonnées à un autre, ne peut être que la plus grande simplicité de l'équation de chaque ligne, et la facilité plus grande d'y parvenir. Or, il est aisé de voir qu'il n'existe et ne doit exister aucun système de coordonnées méritant à cet égard une préférence constante sur tous les autres. En effet, nous avons remarqué ci-dessus que, pour chaque définition géométrique proposée, on peut concevoir un système de coordonnées dans lequel l'équation de la ligne s'obtient immédiatement et se trouve nécessairement être en même temps fort simple : de plus, ce système varie inévitablement avec la nature de la propriété caractéristique que l'on considère. Ainsi, le système rectiligne ne saurait être, en ce sens, constamment le plus avantageux, quoiqu'il soit souvent très-favorable ; il n'en est probablement pas un seul qui, dans certains cas particuliers, ne doive à cet égard lui être préféré, aussi bien qu'à tout autre système.

Il n'en est, au contraire, nullement de même sous le second point de vue. On peut, en effet, facilement établir, en thèse générale, que le système rectiligne ordinaire doit s'adapter nécessairement mieux que tout autre à la peinture des équations par les lieux géométriques correspondans, c'est-à-dire que cette peinture y est constamment plus simple et plus fidèle.

Considérons, pour cela, que, tout système de coordonnées consistant à déterminer un point par l'intersection de deux lignes, le système propre à fournir les lieux géométriques les plus convenables doit être celui dans lequel ces deux lignes sont les plus simples possibles, ce qui restreint d'abord le choix à ne pouvoir porter que sur des systèmes *rectilignes*. A la vérité, il y a évidemment une infinité de systèmes qui méritent ce nom, c'est-à-dire qui n'emploient que des lignes droites pour déterminer les points, outre le système ordinaire qui assigne pour coordonnées les distances à deux droites fixes ; tel serait, par exemple, celui dans lequel les coordonnées de chaque point se trouveraient être les deux angles que font les droites qui aboutissent de ce point à deux points fixes avec la droite de jonction de