ces derniers; en sorte que cette première considération n'est pas rigoureusement suffisante pour expliquer la préférence accordée unanimement au système ordinaire. Mais, en examinant d'une manière plus approfondie la nature de tout système de cordonnées, nous avons reconnu, en outre, que chacune des deux lignes dont la rencontre détermine le point considéré, doit nécessairement offrir à chaque instant, parmi ses diverses conditions quelconques de détermination, une seule condition variable, qui donne lieu à l'ordonnée correspondante, et toutes les autres fixes, qui constituent les *axes* du système, en prenant ce terme dans son acception mathématique la plus étendue : la variation est indispensable pour que toutes les positions puissent être considérées, et la fixité ne l'est pas moins pour qu'il existe des moyens de comparaison. Ainsi, dans tous les systèmes *rectilignes*, chacune des deux droites sera assujétie à une condition fixe, et l'ordonnée résultera de la condition variable. Sous ce rapport, il est évident, en thèse générale, que le système le plus favorable à la construction des lieux géométriques, sera nécessairement celui d'après lequel la condition variable de chaque droite sera la plus simple possible, sauf à compliquer pour cela, s'il le faut, la condition fixe. Or, de toutes les manières possibles de déterminer deux droites mobiles, la plus aisée à suivre géométriquement est certainement celle dans laquelle, la direction de chaque droite restant invariable, elle ne fait que se rapprocher ou s'éloigner plus ou moins d'un axe constant. Il serait, par exemple, évidemment plus difficile de se figurer nettement le déplacement d'un point produit par l'intersection de deux droites, qui tourneraient chacune autour d'un point fixe en fesant avec un certain axe un angle plus ou moins grand, comme dans le système de coordonnées précédemment indiqué. Telle est la véritable explication générale de la propriété fondamentale que présente, par sa nature, le système rectiligne ordinaire, d'être plus apte qu'aucun autre à la représentation géométrique des équations, comme étant celui dans lequel il est le plus aisé de concevoir le déplacement d'un point en résultat du changement de valeur de ses coordonnées. Pour sentir nettement toute la force de cette considération, il suffirait, par exemple, de comparer soigneusement ce système avec le système polaire, dans lequel cette image géométrique si simple et si aisée à suivre, de deux droites se mouvant chacune parallèlement à l'axe correspondant, se trouve remplacée par le tableau compliqué d'une série infinie de cercles concentriques coupés par une droite assujétie à tourner autour d'un point fixe. Il est d'ailleurs facile de concevoir *à priori* quelle doit être, pour la géométrie analytique, l'extrême importance d'une propriété aussi profondément élémentaire, qui, par cette raison, doit se reproduire à chaque instant et prendre une valeur progressivement croissante dans tous les travaux quelconques de cette nature (1).

En précisant davantage la considération qui démontre la supériorité du système de coordonnées ordinaire sur tout autre quant à la peinture des équations, on peut même se rendre compte de l'utilité que présente sous ce rapport l'usage habituel de prendre autant que possible les deux axes perpendiculaires entre eux plutôt qu'avec aucune autre inclinaison. Sous le rapport de la représentation des lignes par les équations, cette circonstance secondaire n'est pas plus universellement convenable que nous n'avons vu l'être la nature même du système; puisque, suivant les

(1) Devant me borner ici à la comparaison la plus générale, je n'ai point considéré plusieurs autres inconvéniens élémentaires de moindre importance, mais cependant fort graves, que présente le système des coordonnées polaires, comme de ne point admettre d'interprétation géométrique pour le signe du rayon recteur, et même d'assigner quelquefois un point unique pour diverses solutions distinctes, d'où il résulte que la peinture des équations y est nécessairement imparfaite. Quels que soient ces inconvéniens, comme plusieurs systèmes autres que le système rectiligne ordinaire pourraient aussi en être exempts, il ne fallait point en tenir compte pour établir la supériorité générale de ce dernier.



occasions, toute autre inclinaison des axes peut mériter à cet égard la préférence. Mais, sous le point de vue inverse, il est aisé de voir que des axes rectangulaires permettent constamment de peindre les équations d'une manière plus simple et même plus fidèle. Car, avec des axes obliques, l'espace se trouvant partagé par eux en régions dont l'identité n'est plus parfaite, il en résulte que, si le lieu géométrique de l'équation s'étend à la fois dans toutes ces régions, il y présentera, à raison de la seule inégalité des angles, des différences de figure qui, ne correspondant à aucune diversité analytique, altéreront nécessairement l'exactitude rigoureuse du tableau, en se mêlant aux résultats propres des comparaisons algébriques. Par exemple, une équation comme $x^m + y^m = c$, qui, par sa symétrie parfaite, devrait donner évidemment une courbe composée de quatre quarts identiques, sera représentée, au contraire, en prenant des axes non-rectangulaires, par un lieu géométrique dont les quatre parties seront inégales. On voit que le seul moyen d'éviter toute disconvenance de ce genre est de supposer droit l'angle des deux axes.

La discussion précédente établit clairement que, si, sous l'un des deux points de vue fondamentaux continuellement combinés en géométrie analytique, le système des coordonnées rectilignes proprement dit n'a aucune supériorité constante sur tout autre; comme il n'est pas non plus à cet égard constamment inférieur, sa plus grande aptitude nécessaire et absolue à la peinture des équations doit lui faire généralement accorder la préférence, quoiqu'il puisse évidemment arriver, dans quelques cas particuliers, que le besoin de simplifier les équations et de les obtenir plus aisément détermine les géomètres à adopter un système moins parfait. C'est, en effet, d'après le système rectiligne, que sont ordinairement construites les théories les plus essentielles de géométrie générale, destinées à exprimer analytiquement les phénomènes géométriques les plus importans. Quand on juge nécessaire d'en choisir un autre, c'est presque toujours le système polaire auquel on s'arrête, ce système étant d'une nature assez opposée à celle du système rectiligne pour que les équations trop compliquées relativement à celui-ci deviennent, en général, suffisamment simples par rapport à l'autre. Les coordonnées polaires ont d'ailleurs souvent l'avantage de comporter une signification concrète plus directe et plus naturelle, comme il arrive en mécanique pour les questions géométriques auxquelles donne lieu la théorie des mouvemens de rotation, et dans presque tous les cas de géométrie céleste.



Afin de simplifier l'exposition, nous n'avons jusqu'ici considéré la conception fondamentale de la géométrie analytique que relativement aux seules courbes planes, dont l'étude générale avait été l'objet unique de la grande rénovation philosophique opérée par Descartes. Il s'agit maintenant, pour compléter cette importante explication, de montrer sommairement de quelle manière cette pensée élémentaire a été étendue, environ un siècle après, par notre illustre Clairaut, à l'étude générale des surfaces et des courbes à double courbure. Les considérations indiquées ci-dessus me permettront de me borner à ce sujet à l'examen rapide de ce qui est strictement propre à ce nouveau cas.

L'entière détermination analytique d'un point dans l'espace exige évidemment qu'on assigne les valeurs de trois coordonnées; par exemple, d'après le système le plus fréquemment adopté et qui correspond au système *rectiligne* de la géométrie plane, des distances de ce point à trois plans fixes, ordinairement perpendiculaires entre eux, ce qui présente le point comme l'intersection de trois plans dont la direction est invariable. On pourrait également employer les distances du point mobile à trois points fixes, ce qui le déterminerait par la rencontre de trois sphères à centre constant. De même, la position d'un point serait définie en donnant sa distance plus ou moins grande à un point fixe, et la direction de cette distance, au moyen des deux angles que fait cette droite avec deux axes invariables; c'est le système *polaire* propre à la géométrie à trois dimensions; le point est alors construit par l'intersection d'une sphère à centre constant avec deux cônes droits à base circulaire dont les axes et le sommet commun ne changent pas. En un mot, il y a évidemment, dans ce cas, au moins la même variété infinie entre les divers systèmes possibles de coordonnées que nous avons déjà observée pour la géométrie à deux dimensions. En général, il faut concevoir un point comme toujours déterminé par l'intersection de trois surfaces quelconques, ainsi qu'il l'était auparavant par celle de deux lignes; chacune de ces trois surfaces a pareillement toutes ses conditions de détermination constantes, excepté une, qui donne lieu à la coordonnée correspondante, dont l'influence géométrique propre est ainsi d'astreindre le point à être situé sur cette surface.

Cela posé, il est clair que si les trois coordonnées d'un point sont entièrement indépendantes entre elles, ce point pourra prendre successivement dans l'espace toutes les positions possibles. Mais, si le point est assujéti à rester sur une certaine surface, définie d'une manière quelconque, alors deux coordonnées suffisent évidemment pour déterminer à chaque instant sa situation, puisque la surface proposée tiendra lieu de la condition imposée par la troisième coordonnée. On doit donc concevoir nécessairement dans ce cas, sous le point de vue analytique, cette dernière coordonnée comme une fonction déterminée des deux autres, celles-ci demeurant entre elles complétement indépendantes. Ainsi, il y aura entre les trois coordonnées variables une certaine équation permanente, et qui sera unique afin de correspondre au degré précis d'indétermination de la position du point. Cette équation, plus ou moins facile à découvrir, mais toujours possible, sera la définition analytique de la surface proposée, puisqu'elle devra se vérifier pour tous les points de cette surface, et seulement pour eux. Si la surface vient à éprouver un changement quelconque, même un simple déplacement, l'équation devra subir une modification correspondante plus ou moins profonde. En un mot, tous les phénomènes géométriques quelconques relatifs aux surfaces seront suceptibles d'être traduits par certaines conditions analytiques équivalentes propres aux équations à trois variables, et c'est dans l'établissement et l'interprétation de cette harmonie générale et nécessaire que consistera essentiellement la science de la géométrie analytique à trois dimensions.

Considérant ensuite cette conception fondamentale sous le point de vue inverse, on voit de la même manière que toute équation à trois variables peut être, en général, représentée géométriquement par une surface déterminée, primitivement définie d'après la propriété très-caractéristique, que les coordonnées de tous ses points conservent toujours entre elles la relation énoncée dans cette équation. Ce lieu géométrique changera évidemment, pour la même équation, suivant le système de coordonnées qui servira à la construction de ce tableau. En adoptant, par exemple, le système rectiligne, il est clair que dans l'équation entre les trois variables $x, y, z$, chaque valeur particulière attribuée à $z$, donnera une équation entre $x$ et $y$, dont le lieu géométrique sera une certaine ligne située dans un plan parallèle au plan des $x, y$, et à une distance de ce dernier égale à la valeur de $z$, de telle sorte que le lieu géométrique total se présentera comme composé d'une suite infinie de lignes superposées dans une série de plans parallèles, sauf les interruptions qui pourront exister, et formera, par conséquent, une véritable surface. Il en serait de même en considérant tout autre système de coordonnées, quoique la construction géométrique de l'équation devînt plus difficile à suivre.



Telle est la conception élémentaire, complément de l'idée-mère de Descartes, sur laquelle est fondée la géométrie générale relativement aux surfaces. Il serait inutile de reprendre directement ici les autres considérations indiquées ci-dessus par rapport aux lignes, et que chacun peut aisément étendre aux surfaces, soit pour montrer que toute définition d'une surface par un mode quelconque de génération est réellement une équation directe de cette surface dans un certain système de coordonnées, soit pour déterminer entre tous les divers systèmes de coordonnées possibles quel est généralement le plus convenable. J'ajouterai seulement, sous ce dernier rapport, que la supériorité nécessaire du système rectiligne ordinaire, quant à la peinture des équations, est évidemment encore plus prononcée dans la géométrie analytique à trois dimensions que dans celle à deux, à cause de la complication géométrique incomparablement plus grande qui résulterait alors du choix de tout autre système, ainsi qu'on peut le vérifier de la manière la plus sensible en considérant, par opposition, le système polaire en particulier, qui est, pour les surfaces comme pour les courbes, et en vertu des mêmes motifs, le plus usité après le système rectiligne proprement dit.

Afin de compléter l'exposition générale de la conception fondamentale relative à l'étude analytique des surfaces, nous aurons encore à examiner philosophiquement, dans la quatorzième leçon, un dernier perfectionnement de la plus haute importance, que Monge a récemment introduit dans les élémens mêmes de cette théorie, pour la classification des surfaces en familles naturelles, établies d'après le mode de génération, et exprimées algébriquement par des équations différentielles communes, ou par des équations finies contenant des fonctions arbitraires.

Considérons maintenant le dernier point de vue élémentaire de la géométrie analytique à trois dimensions, celui qui se rapporte à la représentation algébrique des courbes, envisagées dans l'espace de la manière la plus générale. En continuant à suivre le principe constamment employé ci-dessus, celui du degré d'indétermination du lieu géométrique, correspondant au degré d'indépendance des variables, il est évident, en thèse générale, que, lorsque un point doit être situé sur une certaine courbe quelconque, une seule coordonnée suffit pour achever de déterminer entièrement sa position, par l'intersection de cette courbe avec la surface qui résulte de cette coordonnée. Ainsi, dans ce cas, les deux autres coordonnées du point doivent être conçues comme des fonctions nécessairement déterminées et distinctes de la première. Par conséquent,



toute ligne, considérée dans l'espace, est donc représentée analytiquement, non plus par une seule équation, mais par le système de deux équations entre les trois coordonnées de l'un quelconque de ses points. Il est clair, en effet, d'un autre côté, que chacune de ces équations, envisagée séparément, exprimant une certaine surface, leur ensemble présente la ligne proposée comme l'intersection de deux surfaces déterminées. Telle est la manière la plus générale de concevoir la représentation algébrique d'une ligne dans la géométrie analytique à trois dimensions. Cette conception est ordinairement envisagée d'une manière trop étroite, lorsqu'on se borne à considérer une ligne comme déterminée par le système de ses deux *projections* sur deux des plans coordonnés, système caractérisé analytiquement par cette particularité que chacune des deux équations de la ligne ne contient alors que deux des trois coordonnées, au lieu de renfermer simultanément les trois variables. Cette considération, qui consiste à regarder la ligne comme l'intersection de deux surfaces cylindriques parallèles à deux des trois axes des coordonnées, outre l'inconvénient d'être bornée au système rectiligne ordinaire, a le défaut, lorsqu'on croit devoir s'y réduire strictement, d'introduire des difficultés inutiles dans la représentation analytique des lignes, puisque la combinaison de ces deux cylindres ne saurait être évidemment toujours la plus convenable pour former les équations d'une ligne. Ainsi, envisageant cette notion fondamentale dans son entière généralité, il faudra, dans chaque cas, parmi l'infinité de couples de surfaces dont l'intersection pourrait produire la courbe proposée, choisir celui qui se prêtera le mieux à l'établissement des équations, comme se composant des surfaces les plus connues. Par exemple, s'agit-il d'exprimer analytiquement un cercle dans l'espace, il sera évidemment préférable de le considérer comme l'intersection d'une sphère et d'un plan, plutôt que suivant toute autre combinaison de surfaces qui pourrait également le produire.

A la vérité, cette manière de concevoir la représention des lignes par des équations dans la géométrie analytique à trois dimensions, engendre, par sa nature, un inconvénient nécessaire, celui d'une certaine confusion analytique, consistant en ce que la même ligne peut se trouver ainsi exprimée, avec un même système de coordonnées, par une infinité de couples d'équations différens, vu l'infinité de couples de surfaces qui peuvent la former, ce qui peut présenter quelques difficultés pour reconnaître cette ligne à travers tous les déguisemens algébriques dont elle est susceptible. Mais il existe un procédé général fort simple pour faire disparaître cet inconvénient, se priver des facilités qui résultent de cette variété de constructions géométriques. Il suffit, en effet, quel que soit le système analytique établi primitivement pour une certaine ligne, de pouvoir en déduire le système correspondant à un couple unique de surfaces uniformément engendrées, par exemple, à celui des deux surfaces cylindriques qui *projettent* la ligne proposée sur deux des plans coordonnés, surfaces qui évidemment seront toujours identiques de quelque manière que la ligne ait été obtenue, et ne varieront que lorsque cette ligne elle-même changera. Or, en choisissant ce système fixe, qui est effectivement le plus simple, on pourra généralement déduire des équations primitives celles qui leur correspondent dans cette construction spéciale, en les transformant, par deux éliminations successives, en deux équations ne contenant chacune que deux des coordonnées variables, et qui conviendront par cela seul aux deux surfaces de projection. Telle est réellement la principale destination de cette sorte de combinaison géométrique, qui nous offre ainsi un moyen invariable et certain de reconnaître l'identité des lignes malgré la diversité quelquefois très-grande de leurs équations.



Après avoir considéré dans son ensemble la conception fondamentale de la géométrie analytique sous les principaux aspects élémentaires qu'elle peut présenter, il convient, pour compléter, sous le rapport philosophique, une telle esquisse, de signaler ici les imperfections générales que présente encore cette conception, soit relativement à la géométrie, soit relativement à l'analyse.

Relativement à la géométrie, il faut remarquer que les équations ne sont propres jusqu'ici qu'à représenter des lieux géométriques entiers, et nullement des portions déterminées de ces lieux géométriques. Il serait cependant nécessaire, dans plusieurs circonstances, de pouvoir exprimer analytiquement une partie de ligne ou de surface, et même une ligne ou surface *discontinue* composée d'une suite de sections appartenant à des figures géométriques distinctes, par exemple le contour d'un polygone ou la surface d'un polyèdre. La thermologie surtout donne lieu fréquemment à de semblables considérations, auxquelles notre géométrie analytique actuelle se trouve nécessairement inapplicable. Néanmoins il importe d'observer que, dans ces derniers temps, les travaux de M. Fourier sur les fonctions discontinues ont commencé à remplir cette grande lacune, et ont par là directement introduit un nouveau perfectionnement essentiel dans la conception fondamentale de Descartes. Mais cette manière de représenter des formes hétérogènes ou partielles, étant fondée sur l'emploi de séries trigonométriques procédant selon les sinus d'une suite infinie d'arcs multiples, ou sur l'usage de certaines intégrales définies équivalentes à ces séries et dont l'intégrale générale est ignorée, présente encore trop de complication pour pouvoir être immédiatement introduite dans le système propre de la géométrie analytique.



Relativement à l'analyse, il faut commencer par reconnaître que l'impossibilité où nous sommes de concevoir géométriquement pour des équations contenant quatre, cinq variables ou un plus grand nombre, une représentation analogue à celles que comportent toutes les équations à deux ou à trois variables, ne doit pas être envisagée comme une imperfection de notre système de géométrie analytique, car elle tient évidemment à la nature même du sujet. L'analyse étant nécessairement plus générale que la géométrie, puisqu'elle est relative à tous les phénomènes possibles, il serait peu philosophique de vouloir constamment trouver parmi les seuls phénomènes géométriques une représentation concrète de toutes les lois que l'analyse peut exprimer. Mais il existe une autre imperfection de moindre importance qu'on doit réellement envisager comme provenant de la manière même dont nous concevons la géométrie analytique. Elle consiste en ce que notre représentation actuelle des équations à deux ou à trois variables par des lignes ou des surfaces est évidemment toujours plus ou moins incomplète, puisque, dans la construction du lieu géométrique, nous n'avons égard qu'aux solutions *réelles* des équations, sans tenir aucun compte des solutions *imaginaires*. La marche générale de ces dernières serait cependant, par sa nature, tout aussi susceptible que celle des autres d'une peinture géométrique. Il résulte de cette omission que le tableau graphique de l'équation est constamment imparfait, et quelquefois même au point qu'il n'y a plus de représentation géométrique, lorsque l'équation n'admet que des solutions imaginaires. Cependant, même dans ce dernier cas, il y aurait évidemment lieu de distinguer sous le rapport géométrique des équations aussi différentes en elles-mêmes que celles-ci, par exemple,

$$x^2+y^2+1=0,\quad x^6+y^4+1=0,\quad y^2+e^x=0.$$

On sait de plus que cette imperfection principale entraîne souvent, dans la géométrie analytique à deux ou à trois dimensions, une foule d'inconvéniens secondaires, tenant à ce que plusieurs modifications analytiques se trouvent ne correspondre à aucun phénomène géométrique.



Un de nos plus grands géomètres actuels, M. Poinsot, a présenté une considération très-ingénieuse et fort simple, à laquelle on n'a pas fait communément assez d'attention, et qui permet, lorsque les équations sont peu compliquées, de concevoir la représentation graphique des solutions imaginaires, en se bornant à peindre leurs rapports quand ils sont réels (1). Mais cette considération, qu'il serait aisé de généraliser abstraitement, est jusqu'ici trop peu susceptible d'être effectivement employée, à cause de l'état extrême d'imperfection où se trouve encore la résolution algébrique des équations, et d'où il résulte ou que la forme des racines imaginaires est le plus souvent ignorée, ou qu'elle présente une trop grande complication; en sorte que de nouveaux travaux sont indispensables à cet égard, avant qu'on puisse regarder comme comblée cette lacune essentielle de notre géométrie analytique.

L'exposition philosophique essayée dans cette leçon de la conception fondamentale de la géométrie analytique, nous montre clairement que

(1) M. Poinsot a montré, par exemple, dans son excellent *mémoire sur l'analyse des sections angulaires*, que l'équation $x^2+y^2+a^2=0$, ordinainairement écartée comme n'ayant pas de lieu géométrique, peut-être représentée, de la manière la plus simple et la plus nette, par une hyperbole équilatère, qui remplit à son égard le même office que le cercle pour l'équation $x^2+y^2-a^2=0$.

cette science consiste essentiellement à déterminer quelle est, en général, l'expression analytique de tel ou tel phénomène géométrique propre aux lignes ou aux surfaces, et réciproquement à découvrir l'interprétation géométrique de telle ou telle considération analytique. Nous avons maintenant à examiner, en nous bornant aux questions générales les plus importantes, comment les géomètres sont parvenus à établir effectivement cette belle harmonie, et à imprimer ainsi à la science géométrique, envisagée dans son ensemble total, le caractère parfait de rationalité et de simplicité qu'elle présente aujourd'hui si éminemment. Tel sera l'objet essentiel des deux leçons suivantes, l'une, consacrée à l'étude générale des lignes, et l'autre, à l'étude générale des surfaces.



## TREIZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. De la géométrie *générale* à deux dimensions.

D'après la marche habituellement adoptée jusqu'ici pour l'exposition de la science géométrique, la destination vraiment essentielle de la géométrie analytique n'est encore sentie que d'une manière fort imparfaite, qui ne correspond nullement à l'opinion que s'en forment les véritables géomètres, depuis que l'extension des conceptions analytiques à la mécanique rationnelle a permis de s'élever à quelques idées générales sur la philosophie mathématique. La révolution fondamentale opérée par la grande pensée de Descartes n'est point encore dignement appréciée dans notre éducation mathématique, même la plus haute. A la manière dont elle est ordinairement présentée et surtout employée, cette admirable méthode ne semblerait d'abord avoir d'autre but réel que de simplifier l'étude des sections coniques, ou