cette science consiste essentiellement à déterminer quelle est, en général, l'expression analytique de tel ou tel phénomène géométrique propre aux lignes ou aux surfaces, et réciproquement à découvrir l'interprétation géométrique de telle ou telle considération analytique. Nous avons maintenant à examiner, en nous bornant aux questions générales les plus importantes, comment les géomètres sont parvenus à établir effectivement cette belle harmonie, et à imprimer ainsi à la science géométrique, envisagée dans son ensemble total, le caractère parfait de rationalité et de simplicité qu'elle présente aujourd'hui si éminemment. Tel sera l'objet essentiel des deux leçons suivantes, l'une, consacrée à l'étude générale des lignes, et l'autre, à l'étude générale des surfaces.

TREIZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. De la géométrie *générale* à deux dimensions.

D'après la marche habituellement adoptée jusqu'ici pour l'exposition de la science géométrique, la destination vraiment essentielle de la géométrie analytique n'est encore sentie que d'une manière fort imparfaite, qui ne correspond nullement à l'opinion que s'en forment les véritables géomètres, depuis que l'extension des conceptions analytiques à la mécanique rationnelle a permis de s'élever à quelques idées générales sur la philosophie mathématique. La révolution fondamentale opérée par la grande pensée de Descartes n'est point encore dignement appréciée dans notre éducation mathématique, même la plus haute. A la manière dont elle est ordinairement présentée et surtout employée, cette admirable méthode ne semblerait d'abord avoir d'autre but réel que de simplifier l'étude des sections coniques, ou de quelques autres courbes, considérées toujours une à une suivant l'esprit de la géométrie ancienne, ce qui serait sans doute de fort peu d'importance. On n'a point encore convenablement senti que le véritable caractère distinctif de notre géométrie moderne, ce qui constitue son incontestable supériorité, consiste à étudier, d'une manière entièrement générale, les diverses questions relatives à des lignes ou à des surfaces quelconques, en transformant les considérations et les recherches géométriques en considérations et en recherches analytiques. Il est remarquable que dans les établissemens, même les plus justement célèbres, consacrés à la haute instruction mathématique, on n'ait point institué de cours vraiment dogmatique de géométrie générale, conçu d'une manière à la fois distincte et complète (1). Cependant une telle étude est la plus propre à manifester clairement le vrai caractère philosophique de la science mathématique, en démontrant

(1) La profonde médiocrité qu'on observe généralement à cet égard, surtout dans l'enseignement de la partie élémentaire des mathématiques, quoique deux siècles se soient écoulés déjà depuis la publication de la Géométrie de Descartes, montre combien notre éducation mathématique ordinaire est encore loin de correspondre au véritable état de la science ; ce qui tient sans doute, en grande partie, on ne doit pas se le dissimuler, à l'extrême infériorité de la plupart des personnes auxquelles on confie un enseignement aussi important, sur la haute direction duquel les véritables chefs de la science ne sont d'ailleurs admis à exercer aucune influence régulière et permanente.

avec une netteté parfaite l'organisation générale de la relation de l'abstrait au concret dans la théorie mathématique d'un ordre quelconque de phénomènes naturels.

Ces considérations indiquent assez quelle peut être, outre son extrême importance philosophique, l'utilité spéciale et directe de l'exposition à laquelle nous conduit maintenant le plan de cet ouvrage. Il s'agit donc, en partant de la conception fondamentale expliquée dans la leçon précédente, relativement à la représentation analytique des formes géométriques, d'examiner comment les géomètres sont parvenus à réduire toutes les questions de géométrie générale à de pures questions d'analyse, en déterminant les lois analytiques de tous les phénomènes géométriques, c'est-à-dire les modifications algébriques qui leur correspondent dans les équations des lignes et des surfaces. Je ne m'occuperai d'abord que des courbes, et même des courbes planes, réservant pour la leçon suivante l'étude générale des surfaces et des courbes à double courbure. L'esprit de cet ouvrage prescrit d'ailleurs de se borner à l'examen philosophique des questions générales les plus importantes, et surtout d'écarter toute application à des formes particulières. Le but essentiel que nous devons avoir en vue ici, est seulement de constater avec précision comment la conception fondamentale de Descartes a établi le système général de la science géométrique sur des bases rationnelles et définitives. Toute autre étude rentrerait dans un traité spécial de géométrie ; mais, quant à celle-ci, elle est indispensable pour l'objet que nous nous proposons. On peut sans doute concevoir *à priori*, comme je l'ai indiqué dans la leçon précédente, que, une fois le sujet des recherches géométriques représenté analytiquement, tous les *accidens* ou phénomènes quelconques dont il est susceptible doivent comporter nécessairement une interprétation semblable. Mais il est clair qu'une telle considération ne dispense nullement, même sous le simple rapport philosophique, d'étudier l'organisation effective de cette harmonie générale entre la géométrie et l'analyse, dont on ne se formerait sans cela qu'une idée vague et confuse, entièrement insuffisante.

La première et la plus simple question qu'on puisse se proposer relativement à une courbe quelconque, c'est de connaître, d'après son équation (1), le nombre de points nécessaire à sa détermination. Outre l'importance propre d'une telle notion, qui n'est pas établie jusqu'ici d'une manière assez rationnelle, je crois devoir exposer avec quelque

(1) Je considérerai toujours, pour fixer les idées, à moins d'avertissement formel, le système de coordonnées rectilignes ordinaire, soit dans cette leçon, soit dans la suivante.

développement la solution générale de ce problème élémentaire, parce qu'elle me semble éminemment apte, sous le rapport de la méthode, vu l'extrême simplicité des considérations analytiques correspondantes, à faire saisir le véritable esprit de la géométrie analytique, c'est-à-dire la corrélation nécessaire et continue entre le point de vue concret et le point de vue abstrait.

Pour résoudre complétement cette question, il faut distinguer deux cas, suivant que la courbe proposée est définie analytiquement par son équation la plus générale, c'est-à-dire convenant à toutes les positions de la courbe relativement aux axes, ou par une équation particulière et plus simple, qui n'a lieu que dans une certaine situation de la courbe à l'égard des axes.

Dans le premier cas, il est évident que la condition, de la part de la courbe, de devoir passer par un point donné, équivaut analytiquement à ce que les constantes arbitraires que renferme son équation générale conservent entre elles la relation marquée par la substitution des coordonnées particulières de ce point dans cette équation. Chaque point donné imposant ainsi à ces constantes une certaine condition algébrique, pour que la courbe soit entièrement déterminée il faudra donc assigner un nombre de points égal au nombre des constantes arbitraires contenues dans son équation. Telle est la règle générale. Il convient cependant d'observer qu'elle pourrait induire en erreur, et indiquer un nombre de points trop considérable, si, dans l'équation proposée, le nombre des termes distincts renfermant les constantes arbitraires était moindre que celui de ces constantes, auquel cas il faudrait évidemment juger du nombre de points nécessaire à l'entière détermination de la courbe, seulement par celui de ces termes, ce qui signifierait géométriquement que les constantes considérées pourraient alors éprouver certains changemens sans qu'il en résultât aucun pour la courbe. Tel serait, par exemple, le cas du cercle, si on le définissait comme la courbe décrite par le sommet d'un angle de grandeur invariable qui se meut de manière à ce que chacun de ses côtés passe toujours par un certain point fixe. Il faut donc, pour plus de généralité, compter séparément le nombre des constantes entrant dans l'équation de la courbe proposée et le nombre des termes qui les contiennent, et déterminer combien de points exige l'entière spécification de la courbe par le plus petit de ces deux nombres, à moins qu'ils ne soient égaux.

Quand une courbe n'est primitivement définie que par une équation du genre de celles que nous avons nommées plus haut *particulières*, on peut,

à l'aide d'une transformation invariable et fort simple, faire rentrer ce cas dans le précédent, en *généralisant* convenablement l'équation proposée. Il suffit, pour cela, de rapporter la courbe, d'après les formules connues, à un nouveau système d'axes, dont la situation par rapport aux premiers soit regardée comme indéterminée. Si cette transformation ne change pas essentiellement la composition analytique de l'équation primitive, ce sera la preuve que celle-ci était déjà suffisamment générale; dans le cas contraire, elle le sera devenue, et dès lors la question se résoudra facilement par l'application de la règle précédemment établie. On peut même observer, pour simplifier encore davantage cette solution, que cette généralisation de l'équation introduira toujours, quelle que soit l'équation primitive, trois nouvelles constantes arbitraires, savoir les deux coordonnées de la nouvelle origine et l'inclinaison des nouveaux axes sur les anciens; en sorte que, sans effectuer le calcul, on pourra connaître le nombre des constantes arbitraires qui entreraient dans l'équation la plus générale, et par suite en déduire directement le nombre de points nécessaire à la détermination de la courbe proposée, toutes les fois du moins qu'on pourra être certain d'avance, ce qui a lieu très-fréquemment, que le nombre des termes qui contiendraient ces constantes ne serait pas moindre que celui des constantes elles-mêmes.

Afin de montrer à quel degré de facilité peut parvenir la solution générale de cette question, il importe de remarquer que, l'opération analytique prescrite pour la résoudre se réduisant à une simple énumération, cette énumération peut être faite avant même que l'équation de la courbe soit obtenue, et d'après sa seule définition géométrique. Il suffit, en effet, d'analyser cette définition sous ce point de vue, en estimant combien de points donnés, ou de droites données soit en longueur, soit en direction, ou de cercles donnés, etc., elle exige pour l'entière détermination de la courbe proposée. Cela posé, on saura aussi d'avance combien il devra entrer de constantes arbitraires dans l'équation la plus générale de cette courbe, en considérant que chaque point fixe donné par la définition en introduira deux, chaque droite donnée également deux, chaque longueur donnée une, chaque cercle entièrement donné trois, etc. On pourra donc juger immédiatement par là du nombre de points qu'exige la détermination de la courbe, avec autant d'exactitude que si l'on avait sous les yeux son équation générale; à cela près néanmoins de la restriction indiquée ci-dessus pour le cas où le nombre des termes renfermant les constantes arbitraires serait inférieur à celui des constantes; restriction qu'on pourra souvent reconnaître comme inapplicable, si l'analyse de la définition proposée a montré clairement que les données qu'elle prescrit ne pourraient nullement varier, soit isolément, soit ensemble, sans qu'il en résultât pour la courbe un changement quelconque. Mais, lorsque cette restriction devra être réellement appliquée, cette considération ne fournira d'abord qu'une limite supérieure du nombre cherché, qui ne pourra être alors entièrement connu qu'en consultant effectivement l'équation générale.

J'ai supposé jusqu'ici que les points par lesquels on veut déterminer le cours d'une ligne fussent absolument quelconques; mais, pour compléter la méthode, il faut examiner le cas où l'on introduirait parmi eux des points *singuliers*, c'est-à-dire distincts de tous les autres par une propriété caractéristique quelconque, comme ce que l'on nomme les *foyers* dans les sections coniques, les *sommets*, les *centres*, les points d'*inflexion* ou de *rebroussement*, etc. Ces points ayant tous pour caractère d'être uniques, ou du moins déterminés, dans une même courbe, leurs deux coordonnées sont donc chacune une fonction déterminée, connue ou inconnue, des constantes qui spécifient exactement la courbe proposée. Ainsi, donner un seul de ces points, c'est imposer à ces constantes arbitraires deux conditions algébriques, ce qui, par conséquent, équivaut analytiquement à donner deux points ordinaires. La règle générale et fort simple se réduit donc, à cet égard, à compter toujours pour deux chaque point *singulier*, par quelque propriété qu'il puisse être défini : à cela près, on rentrera dans la loi établie ci-dessus.

Toute application spéciale de la théorie générale que je viens d'indiquer serait ici déplacée. Je crois cependant utile de remarquer, au sujet de cette application, que le nombre de points nécessaires à l'entière détermination de chaque courbe, quoique constituant une circonstance fort importante, n'est point aussi intimement lié qu'on le croirait d'abord, soit à la nature analytique de l'équation, soit à la forme géométrique de la ligne. Ainsi, par exemple, on trouve, d'après la méthode précédente, que la parabole ordinaire, et même les paraboles de tous les degrés, la logarithmique, la cycloïde, la spirale d'Archimède, etc., exigent également quatre points pour leur détermination, quoiqu'on n'ait pu découvrir jusqu'ici aucune autre propriété commune entre des courbes aussi différentes sous

le rapport analytique que sous le rapport géométrique. Il est néanmoins vraisemblable que cette analogie ne doit pas être entièrement isolée.

Je choisirai, comme second exemple intéressant, parmi les questions élémentaires relatives à l'étude générale des lignes, la détermination des *centres* dans une courbe plane quelconque. Le caractère géométrique du *centre* d'une figure étant, en général, d'être le milieu de toutes les cordes qui y passent, il en résulte évidemment que, si l'on y place l'origine du système des coordonnées rectilignes, les points de la figure auront, deux à deux, par rapport à une telle origine, des coordonnées égales et de signe contraire. On peut donc reconnaître immédiatement, d'après l'équation d'une courbe quelconque, si elle a pour centre l'origine actuelle des coordonnées, puisqu'il suffit d'examiner si cette équation n'est point altérée, en y changeant à la fois les signes des deux coordonnées variables, ce qui exige, dans le cas où il n'y entre que des fonctions algébriques, rationnelles et entières, que les termes soient tous de degré pair ou tous de degré impair, suivant le degré de l'équation. Cela posé, quand un tel changement trouble l'équation, il faut déplacer l'origine d'une manière indéterminée, et chercher à disposer des deux constantes arbitraires que cette transformation introduit dans l'équation pour les coordonnées de la nouvelle origine, de façon à ce que l'équation puisse jouir, relativement aux nouveaux axes, de la propriété précédente. Si, par des valeurs réelles convenables des coordonnées de la nouvelle origine, on peut faire disparaître tous les termes qui empêchaient l'équation de présenter ce caractère analytique, la courbe aura un centre dont ces valeurs feront connaître la position : dans le cas contraire, il sera constaté que la courbe n'a point de centre.

Parmi les questions de géométrie générale à deux dimensions dont la solution complète ne dépend que de l'analyse ordinaire, je crois devoir encore indiquer ici celle qui se rapporte à la détermination des conditions de la *similitude* entre des courbes quelconques d'un même *genre*, c'est-à-dire susceptibles d'une même définition ou *équation*, qui ne les distingue les unes des autres que par les diverses valeurs de certaines constantes arbitraires relatives à la grandeur de chacune d'elles. Cette question, importante en elle-même, a d'autant plus d'intérêt sous le rapport de la méthode, que le phénomène géométrique qu'il s'agit alors de caractériser analytiquement, est évidemment purement relatif à la forme, et nullement un phénomène de situation, ce qui, comme nous l'avons remarqué dans la leçon précédente, donne toujours lieu à des difficultés spéciales par rapport à notre système de géométrie analytique, où les idées de position sont seules directement considérées.

L'emploi de l'analyse différentielle fournirait immédiatement la solution de ce problème général, en étendant aux courbes, comme il convient, la définition élémentaire de la similitude pour les figures rectilignes. Il suffirait, en effet, 1° de calculer, d'après l'équation de chacune des deux courbes, l'angle de *contingence* en un point quelconque, et d'exprimer que cet angle a la même valeur dans les deux courbes pour des points correspondans; 2° d'après l'expression différentielle générale de la longueur d'un élément infiniment petit de chaque courbe, d'exprimer que les élémens homologues des deux courbes sont entre eux dans un rapport constant. Les conditions analytiques de la similitude se trouveraient ainsi dépendre des deux premières fonctions dérivées de l'ordonnée rapportée à l'abcisse. Mais le problème peut être résolu d'une manière beaucoup plus simple, et néanmoins tout aussi générale, quoique moins directe, par le simple usage de l'analyse ordinaire.

Pour cela, il faut d'abord remarquer une propriété élémentaire que peuvent toujours présenter deux figures semblables de forme quelconque, quand elles sont placées dans une situation *parallèle*, c'est-à-dire, de telle façon que tous les élémens de chacune soient respectivement parallèles aux élémens homologues de l'autre, ce que la similitude permet évidemment de faire constamment. Dans cette situation, il est aisé de voir que, si on joint deux à deux par des droites les points homologues des deux figures, toutes ces lignes de jonction concourront nécessairement en un point unique, à partir duquel leurs longueurs, comptées jusqu'à l'une et à l'autre des deux figures semblables, auront entre elles un rapport constant, égal à celui des deux figures. Il résulte immédiatement de cette propriété, considérée sous le point de vue analytique, que, si l'origine des coordonnées rectilignes est supposée placée au point particulier dont nous venons de parler, les points homologues des deux courbes semblables auront des coordonnées constamment proportionnelles, en sorte que l'équation de la première courbe devra rentrer dans celle de la seconde, en y changeant x en mx, et y en my, m étant une constante arbitraire égale au rapport linéaire des deux figures. Avec des coordonnées polaires z et φ, dont le pôle serait placé au même point, les deux équations deviendraient identiques en changeant seulement z en mz dans l'une d'elles, sans changer φ. La vérification d'un tel caractère algébrique suffira donc

évidemment pour constater la similitude. Mais, de sa non-vérification, il est clair qu'on ne devra point conclure immédiatement la dissimilitude des deux courbes comparées, puisque l'origine ou le pôle pourraient n'être pas placés au point unique pour lequel cette relation a lieu, ou même que les deux courbes pourraient n'être pas posées actuellement dans la situation *parallèle*. Il est néanmoins facile de généraliser et de compléter la méthode sous l'un et l'autre de ces deux rapports, quoiqu'il semble d'abord impossible analytiquement de modifier la situation relative de deux courbes. Il suffira pour cela de changer, à l'aide des formules connues, à la fois l'origine et la direction des axes si les coordonnées sont rectilignes, ou le pôle et la direction de l'axe si elles sont polaires, mais en effectuant cette transformation seulement dans l'une des deux équations. On cherchera alors à disposer des trois constantes arbitraires introduites par là, pour que cette équation ainsi modifiée présente, relativement à l'autre, la propriété analytique indiquée. Si cette relation peut avoir lieu d'après certaines valeurs réelles des constantes arbitraires, les deux courbes seront semblables; sinon, leur dissimilitude sera constatée.

Quoiqu'il ne convienne point de considérer ici aucune application spéciale de la théorie précédente, je crois cependant utile d'indiquer à ce sujet une remarque générale. Elle consiste en ce que, toutes les fois que l'équation d'une courbe, simplifiée le plus possible par la disposition des axes, ne renfermera qu'une seule constante arbitraire, toutes les courbes de ce genre seront nécessairement semblables entre elles. On peut augmenter l'utilité de cette observation, en ce que, sans considérer même l'équation de la courbe, il suffira d'examiner, dans ce cas, si sa définition géométrique primitive ne fait dépendre que d'une seule donnée l'entière détermination de sa grandeur (1). Quand, au contraire, l'équation la plus simple de la courbe proposée contiendra deux constantes arbitraires ou davantage, ou, ce qui est exactement équivalent, lorsque la définition fera dépendre sa grandeur de plusieurs données distinctes, les courbes de ce genre ne pourront être semblables qu'à l'aide de certaines relations entre ces constantes ou ces données, qui consisteront ordinairement dans leur proportionnalité. C'est ainsi que toutes les paraboles d'un même degré, d'ailleurs quelconque, sont semblables entre elles, aussi bien que toutes les logarithmiques, toutes les cycloïdes ordinaires, tous les cercles, etc.; tandis que deux ellipses ou deux hyperboles, par exemple, ne sont semblables qu'autant que leurs axes sont proportionnels.

(1) Cette propriété, qui est une conséquence évidente de la théorie indiquée ci-dessus, pourrait d'ailleurs être établie directement par une considération fort simple. Il suffirait de remarquer que, dans ce cas, les diverses courbes de ce genre pourraient coïncider en les construisant sur une échelle différente, d'où résulte clairement leur similitude nécessaire.

Je me borne à ce petit nombre de questions générales relatives aux lignes, parmi celles dont la solution complète depend seulement de l'analyse ordinaire. On n'y doit pas comprendre la détermination de ce qu'on appelle les *foyers*, la recherche des *diamètres*, etc., et plusieurs autres problèmes de ce genre, qui, bien que susceptibles d'être proposés et résolus pour des courbes quelconques, n'ont de véritable intérêt qu'à l'égard des sections coniques. Relativement aux *diamètres*, par exemple, c'est-à-dire aux lieux géométriques des milieux d'un système quelconque de cordes parallèles, il est aisé de former une méthode générale pour déduire de l'équation d'une courbe l'équation commune de tous ses diamètres. Mais une telle considération ne peut faciliter l'étude d'une courbe qu'autant que les diamètres se trouvent être des lignes plus simples et plus connues que la courbe primitive; et même cette recherche n'a vraiment une grande utilité que lorsque tous les diamètres sont des lignes droites. Or, c'est ce qui n'a lieu que dans les courbes du second degré. Pour toutes les autres, les diamètres sont, en général, des courbes aussi peu connues et souvent même d'une étude plus difficile que la courbe proposée. C'est pourquoi je ne dois point ici considérer une telle question, ni aucune autre semblable, quoique, dans les traités spéciaux de géométrie analytique, il convînt d'ailleurs de les présenter d'abord, autant que possible, sous un point de vue entièrement général.

Je passe donc immédiatement à l'examen des théories de géométrie générale à deux dimensions qui ne peuvent être complétement établies qu'à l'aide de l'analyse transcendante.

La première et la plus simple d'entre elles consiste dans la détermination des tangentes aux courbes planes. Ayant eu occasion, dans la sixième leçon, d'indiquer la solution générale de cet important problème, d'après chacun des divers points de vue fondamentaux propres à l'analyse transcendante, il est inutile d'y revenir ici. Je ferai seulement observer à ce sujet que la question fondamentale ainsi considérée suppose connu le point de contact de la droite avec la courbe, tandis que la tangente peut être déterminée par plusieurs autres conditions, qu'il faut alors faire rentrer dans la précédente, en déterminant préalablement les coordonnées du point de contact, ce qui est ordinairement très-facile. Ainsi, par

exemple, si la tangente est assujétie à passer par un point donné extérieur à la courbe, les coordonnées de ce point devant satisfaire à la formule générale de l'équation de la tangente à cette courbe, formule qui contient les coordonnées inconnues du point de contact, ce dernier point sera déterminé par une telle relation combinée avec l'équation de la courbe proposée. De même, si la tangente cherchée doit être parallèle à une droite donnée, il faudra égaler le coéfficient général qui marque sa direction en fonction des coordonnées du point de contact à celui qui détermine celle de la droite donnée, et la combinaison de cette condition avec l'équation de la courbe fera encore connaître ces coordonnées.

Afin de considérer sous un point de vue plus étendu les problèmes relatifs aux tangentes, il peut être utile d'exprimer distinctement la relation qui doit exister entre les deux constantes arbitraires contenues dans l'équation générale d'une ligne droite et les diverses constantes propres à une courbe quelconque donnée, pour que la droite soit tangente à la courbe. A cet effet, il suffit d'observer que les deux constantes par lesquelles se trouve fixée à chaque instant la position de la tangente étant des fonctions connues des coordonnées du point de contact, l'élimination de ces deux coordonnées entre ces deux formules et l'équation de la courbe proposée fournira une relation indépendante du point de contact et contenant seulement les constantes des deux lignes, qui sera le caractère analytique cherché du phénomène d'un contact indéterminé. On se servirait, par exemple, de telles expressions pour déterminer une tangente commune à deux courbes données, en calculant les deux constantes propres à cette droite d'après les deux relations qu'entraînerait ainsi son contact avec l'une et l'autre courbe.

La question fondamentale des tangentes est le point de départ de plusieurs autres recherches générales plus ou moins importantes relativement aux courbes, qu'il est aisé d'en faire dépendre. La plus directe et la plus simple de ces questions secondaires consiste dans la détermination des *asymptotes*, ou du moins des *asymptotes* rectilignes, les seules, en général, qu'il soit intéressant de connaître, parce qu'elles seules contribuent réellement à faciliter l'étude d'une courbe. On sait que l'*asymptote* est une droite qui s'approche indéfiniment et d'aussi près qu'on veut d'une courbe, sans cependant pouvoir jamais l'atteindre rigoureusement. Elle peut donc être envisagée comme une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini. Ainsi, pour la déterminer, il

suffit de supposer infinies les coordonnées du point de contact dans les deux formules générales qui expriment, d'après l'équation de la courbe, en fonction de ces coordonnées, les deux constantes par lesquelles est fixée la position de la tangente. Si ces deux constantes prennent alors des valeurs réelles et compatibles entre elles, la courbe donnée aura des asymptotes dont un tel calcul fera connaître le nombre et la situation; si ces valeurs sont imaginaires ou incompatibles, ce sera la preuve que la courbe proposée n'a point d'asymptotes, du moins rectilignes. On voit que cette détermination est exactement analogue à celle d'une tangente menée par un point de la courbe dont les coordonnées seraient finies. Il arrivera seulement, dans un assez grand nombre de cas, que les deux valeurs cherchées se présenteront sous une forme indéterminée, ce qui est un inconvénient général des formules algébriques, quoiqu'il doive sans doute avoir lieu plus fréquemment en attribuant aux variables des valeurs infinies. Mais on sait qu'il existe une méthode analytique générale pour estimer la vraie valeur de toute expression semblable; il suffira donc alors d'y recourir.

On peut rattacher aussi, quoique d'une manière beaucoup moins directe, à la théorie des tangentes, la théorie tout entière des divers points