singuliers, dont la détermination contribue éminemment à la connaissance de toute courbe qui en présente, comme les points d'*inflexion*, les points *multiples*, les points de *rebroussement*, etc. Relativement aux points d'*inflexion*, par exemple, c'est-à-dire à ceux où une courbe de concave devient convexe, ou de convexe concave, il faut d'abord examiner le caractère analytique immédiatement propre à la concavité ou à la convexité, ce qui dépend de la manière dont varie la direction de la tangente. Quand la courbe est concave vers l'axe des abcisses, elle fait avec lui un angle de plus en plus petit à mesure qu'elle s'en éloigne; au contraire, lorsqu'elle est convexe, l'angle qu'elle fait avec l'axe devient de plus en plus grand en s'en écartant davantage. On peut donc directement reconnaître, d'après l'équation d'une courbe, le sens de sa courbure à chaque instant : il suffit d'examiner si le coéfficient qui marque l'inclinaison de la tangente, c'est-à-dire la fonction dérivée de l'ordonnée, prend des valeurs croissantes ou des valeurs décroissantes à mesure que l'ordonnée augmente; dans le premier cas, la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abcisses; dans le second, sa concavité. Cela posé, s'il y a *inflexion* en quelque point, c'est-à-dire si la courbure change de sens, il est clair qu'en ce point l'inclinaison

de la tangente sera devenue un *maximum* ou un *minimum*, suivant qu'il s'agira du passage de la convexité à la concavité, ou du passage inverse. On trouvera donc en quels points ce phénomène peut avoir lieu, à l'aide de la théorie ordinaire des *maxima* et *minima*, dont l'application à cette recherche apprendra évidemment que, pour l'abcisse du point d'inflexion, la seconde fonction dérivée de l'ordonnée proposée doit être nulle, ce qui suffira pour déterminer l'existence et la position de ce point. Cette recherche peut ainsi être rattachée à la théorie des tangentes, quoiqu'elle soit ordinairement présentée d'après la théorie du cercle osculateur. Il en serait de même, avec plus ou moins de difficulté, relativement à tous les autres points *singuliers*.

Un second problème fondamental que présente l'étude générale des courbes, et dont la solution complète exige un emploi plus étendu de l'analyse transcendante, est l'importante question de la mesure de la *courbure* des courbes au moyen du cercle *osculateur* en chaque point, dont la découverte suffirait seule pour immortaliser le nom du grand Huyghens.

Le cercle étant la seule courbe qui présente en tous ses points une courbure uniforme, d'autant plus grande d'ailleurs que le rayon est plus petit, quand les géomètres se sont proposé de soumettre à une estimation précise la courbure de toute autre courbe quelconque, ils ont dû naturellement la comparer en chaque point au cercle qui pouvait avoir avec elle le plus intime contact possible, et qu'ils ont nommé, pour cette raison, cercle *osculateur*, afin de le distinguer des cercles simplement *tangens*, qui sont en nombre infini au même point de courbe, tandis que le cercle osculateur est évidemment unique. En considérant cette question sous un autre aspect, on conçoit que la courbure d'une courbe en chaque point pourrait aussi être estimée par l'angle plus ou moins grand de deux élémens consécutifs, qu'on appelle angle de *contingence*. Mais, il est aisé de reconnaître que ces deux mesures sont nécessairement équivalentes, puisque le centre du cercle osculateur sera d'autant plus éloigné que cet angle de contingence sera plus obtus : on voit même, sous le point de vue analytique, que l'expression du rayon de ce cercle fournit immédiatement la valeur de cet angle. D'après cette conformité évidente des deux points de vue, les géomètres ont dû préférer habituellement la considération du cercle osculateur, comme plus étendue et se prêtant mieux à la déduction des autres théories géométriques qui se rattachent à cette conception fondamentale.

Cela posé, la manière la plus simple et la plus

directe de déterminer le cercle osculateur consiste à l'envisager, d'après la méthode infinitésimale proprement dite, comme passant par trois points infiniment voisins de la courbe proposée, ou, en d'autres termes, comme ayant avec elle deux élémens consécutifs communs, ce qui le distingue nettement de tous les cercles simplement tangens, avec lesquels la courbe n'a qu'un seul élément commun. Il résulte de cette notion, en ayant égard à la construction nécessaire pour décrire un cercle passant par trois points donnés, que le centre du cercle osculateur, ou ce qu'on appelle le *centre de courbure* de la courbe en chaque point, peut être regardé comme le point d'intersection de deux normales infiniment voisines, en sorte que la question se réduit à trouver ce dernier point. Or, cette recherche est facile, en formant, d'après l'équation générale de la tangente à une courbe quelconque, celle de la normale qui lui est perpendiculaire, et faisant ensuite varier d'une quantité infiniment petite, dans cette dernière équation, les coordonnées du point de contact, afin de passer à la normale infiniment voisine : la détermination de la solution commune à ces deux équations, qui sont du premier degré par rapport aux deux coordonnées du point d'intersection, suffit pour faire trouver les deux formules générales qui expriment les cordonnées du centre de courbure d'une courbe en un point quelconque. Ces formules une fois obtenues, la recherche du rayon de courbure n'offre plus aucune difficulté, puisqu'elle se réduit à calculer la distance de ce centre de courbure au point correspondant de la courbe. En appelant α, β, les coordonnées rectilignes du centre de courbure d'une courbe quelconque en un point dont les coordonnées sont x, y, et nommant r le rayon de courbe, on trouve par cette méthode les formules connues.

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

On conçoit de quelle importance est la détermination du rayon de courbure, et combien la discussion de la manière générale dont il varie aux différens points d'une courbe, doit contribuer à la connaissance approfondie de cette courbe. Cet élément a surtout ceci de très-remarquable, entre tous les autres sujets ordinaires de recherches dans la géométrie analytique, qu'il se rapporte directement, par sa nature, à la forme

même de la courbe, sans dépendre aucunement de sa position. On voit que, sous le rapport analytique, il exige la considération simultanée des deux premières fonctions dérivées de l'ordonnée.

La théorie des centres de courbure conduit naturellement à l'importante notion des *développées*, qui sont maintenant définies comme étant les lieux géométriques de tous les centres de courbure de chaque courbe en ses différens points, quoique, au contraire, dans la conception primitive de cette branche de la géométrie, Huyghens eût déduit l'idée du cercle osculateur de celle de la développée, directement envisagée comme engendrant par son développement la courbe primitive, ou la *développante*. Il est aisé de reconnaître que ces deux manières de voir rentrent l'une dans l'autre. Cette développée présente évidemment, par quelque mode qu'on l'obtienne, deux propriétés générales et nécessaires relativement à la courbe quelconque dont elle dérive : la première, d'avoir pour tangentes les normales à celle-ci; et la seconde, que la longueur de ses arcs soit égale à celle des rayons de courbure correspondans de la développante. Quant au moyen d'obtenir l'équation de la développée d'une courbe donnée, il est clair qu'entre les deux formules citées ci-dessus pour exprimer les coordonnées du centre de courbure, il suffit d'éliminer, dans chaque cas, les coordonnées x, y, du point correspondant de la courbe proposée, à l'aide de l'équation de cette courbe : l'équation en α, β qui résultera de l'élimination, sera celle de la développée demandée. On pourrait également entreprendre de résoudre la question inverse, c'est-à-dire de trouver la développante d'après la développée. Mais il faut remarquer qu'une élimination analogue à la précédente ne fournirait alors, pour la courbe cherchée, qu'une équation contenant, outre x et y, les deux fonctions dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; en sorte qu'après cette analyse préparatoire, la solution complète du problème exigerait encore l'intégration de cette équation différentielle du second ordre, ce qui, vu l'extrême imperfection du calcul intégral, serait le plus souvent impossible, si, par la nature propre d'une telle recherche, la courbe demandée ne devait point, comme j'ai eu occasion de l'indiquer dans la septième leçon, être représentée par la solution *singulière*, que la simple différentiation peut toujours faire obtenir, l'intégrale générale ne désignant ici que le système des cercles osculateurs, dont la connaissance n'est point l'objet de la question proposée. Il en serait de même toutes les fois qu'on aurait à déterminer une courbe d'après une propriété quelconque de son rayon de courbure. Cet ordre de questions est

exactement analogue aux problèmes plus simples qui constituent ce que, dans l'origine de l'analyse transcendante, on appelait la *Méthode inverse des tangentes*, où l'on se proposait de déterminer une courbe par une propriété donnée de sa tangente en un point quelconque.

Par des considérations géométriques plus ou moins compliquées, analogues à celle qui fournit les développées, les géomètres ont déduit d'une même courbe primitive quelconque diverses autres courbes secondaires, dont les équations peuvent être obtenues d'après des procédés semblables. Les plus remarquables d'entre elles sont les *caustiques* par réflexion ou par réfraction, dont la première idée est due à Tschirnaüs, quoique Jacques Bernouilli en ait seul établi la véritable théorie générale. Ce sont, comme on sait, des courbes formées par l'intersection continuelle des rayons de lumière infiniment voisins qu'on supposerait réfléchis ou réfractés par la courbe primitive. En partant de la loi géométrique de la réflexion ou de la réfraction de la lumière, consistant en ce que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, ou en ce que le sinus de l'angle de réfraction est un multiple constant et connu du sinus de l'angle d'incidence, il est évident que la recherche de ces *caustiques* se réduit à une pure question de géométrie, parfaitement semblable à celle des développées, conçues comme formées par l'intersection continuelle des normales infiniment voisines. Le problème se résoudra donc analytiquement en suivant une marche analogue, au sujet de laquelle toute autre indication serait ici superflue. Le calcul sera seulement plus laborieux, surtout si les rayons incidens ne sont pas supposés parallèles entre eux ou émanés d'un même point.

Les développées, les caustiques, et toutes les autres lignes déduites d'une même courbe principale à l'aide de constructions analogues, sont formées par les intersections continuelles de droites infiniment voisines soumises à une certaine loi. Mais on peut aussi, en généralisant le plus possible cette considération géométrique, concevoir des courbes produites par l'intersection continuelle de certaines courbes infiniment voisines, assujéties à une même loi quelconque. Cette loi consiste ordinairement en ce que toutes ces courbes sont représentées par une équation commune, d'ailleurs quelconque, d'où elles dérivent successivement en donnant diverses valeurs à une certaine constante arbitraire. On peut alors se proposer de trouver le lieu géométrique des points d'intersection de ces courbes consécutives, qui correspondent à des valeurs infiniment rapprochées de cette constante arbitraire conçue comme variant d'une manière continue. Leibnitz a imaginé le premier les recherches de cette nature, qui ont ensuite été fort étendues par Clairaut et surtout par Lagrange. Pour traiter le cas le plus simple, celui que je viens de caractériser exactement, il suffit évidemment de différentier l'équation générale proposée par rapport à la constante arbitraire que l'on considère, et d'éliminer ensuite cette constante entre cette équation différentielle et l'équation primitive; on obtiendra ainsi, entre les deux coordonnées variables, une équation indépendante de cette constante, qui sera celle de la courbe cherchée, dont la forme différera souvent beaucoup de celle des courbes génératrices. Lagrange a établi, au sujet de cette relation géométrique, un important théorème général, en montrant que, sous le point de vue analytique, la courbe ainsi obtenue et les courbes génératrices ont nécessairement une même équation différentielle, dont l'intégrale complète représente le système des courbes génératrices, tandis que sa solution *singulière* correspond à la courbe des intersections.

J'ai considéré jusqu'ici la théorie de la courbure des courbes suivant l'esprit de la méthode infinitésimale proprement dite, qui s'adapte en effet bien plus simplement qu'aucune autre à toute recherche de ce genre. La conception de Lagrange, relativement à l'analyse transcendante, présentait surtout, par sa nature, de grandes difficultés spéciales pour la solution directe d'une telle question, comme je l'ai déjà remarqué dans la sixième leçon. Mais ces difficultés ont si heureusement excité le génie de Lagrange, qu'elles l'ont conduit à la formation de la théorie générale des contacts, dont l'ancienne théorie du cercle osculateur se trouve n'être plus qu'un cas particulier fort simple. Il importe au but de cet ouvrage de considérer maintenant cette belle conception, qui est peut-être, sous le rapport philosophique, l'objet le plus profondément intéressant que puisse offrir jusqu'ici la géométrie analytique.

Comparons une courbe quelconque donnée $y=f(x)$ à une autre courbe variable $z=\varphi(x)$, et cherchons à nous former une idée précise des divers degrés d'intimité qui pourront exister entre ces deux courbes, en un point commun, suivant les relations qu'on supposera entre la fonction φ et la fonction f. Il suffira pour cela de considérer la distance verticale des deux courbes en un autre point de plus en plus rapproché du premier, afin de la rendre successivement la moindre possible, eu égard à la corrélation des deux fonctions. Si h désigne l'accroissement qu'éprouve l'abcisse en passant à ce nouveau point, cette distance, qui est égale à la différence des

deux ordonnées correspondantes, pourra être développée, d'après la formule de Taylor, suivant les puissances ascendantes de h, et aura pour expression la série,

$$D=\Big(f'(x)-\varphi'(x)\Big)h+\Big(f''(x)-\varphi''(x)\Big)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+\Big(f'''(x)-\varphi'''(x)\Big)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En concevant, ce qui est évidemment toujours possible, h tellement petit, que le premier terme de cette série soit supérieur à la somme de tous les autres, il est clair que la courbe z aura avec la courbe y un rapprochement d'autant plus intime, que la nature de la fonction variable φ permettra de supprimer un plus grand nombre de termes dans ce développement, à partir du premier. Le degré d'intimité des deux courbes sera donc exactement apprécié, sous le point de vue analytique, par le nombre plus ou moins grand de fonctions dérivées successives de leurs ordonnées qui auront la même valeur au point que l'on considère. De là, l'importante conception générale des divers ordres de *contacts* plus ou moins parfaits, dont la notion du cercle osculateur comparé aux cercles simplement tangens n'avait présenté jusqu'alors qu'un seul exemple particulier. Ainsi, après la simple intersection, le premier degré de rapprochement entre deux courbes a lieu quand les premières dérivées de leurs ordonnées sont égales ; c'est le *contact du premier ordre*, ou ce qu'on appelle ordinairement le simple contact, parce qu'il a été long-temps le seul connu. Le *contact du second ordre* exige de plus que les secondes dérivées des fonctions f et φ soient égales : en y joignant encore l'égalité de leurs troisièmes dérivées, on constitue un *contact du troisième ordre*, et ainsi de suite à l'infini. Au delà du premier ordre, les contacts portent souvent le nom d'*osculations* du premier ordre, du second ordre, etc.

Les contacts du premier et du second ordre peuvent être caractérisés géométriquement par une observation fort simple, en ce qu'il en résulte évidemment que les deux courbes comparées ont au point commun, dans un cas, la même tangente, et, dans l'autre, le même cercle de courbure, puisque la tangente à chaque courbe dépend de la première dérivée de son ordonnée, et le cercle de courbure, des deux premières dérivées successives. Mais cette considération ne conviendrait plus au-delà du second ordre pour déterminer l'idée géométrique du contact. Lagrange s'est borné, sous ce rapport, à assigner le caractère général qui résulte immédiatement de l'analyse ci-dessus indiquée, et qui consiste en ce que lorsque la courbe z est déterminée de manière à avoir avec la courbe y un contact de l'ordre n,

produit analytiquement par l'égalité de toutes les fonctions dérivées jusqu'à celle de l'ordre n, aucune autre courbe z, de même nature que la précédente, mais qui ne satisferait qu'à un moindre nombre de conditions analytiques, et qui, par conséquent, n'aurait avec la courbe y qu'un contact moins intime, ne pourrait passer entre les deux courbes, puisque l'intervalle de celles-ci a reçu la plus petite valeur dont il était susceptible d'après une telle relation des deux équations.

Lorsqu'on a particularisé la nature de la courbe z ainsi comparée à une courbe quelconque donnée y, l'ordre du contact le plus intime qu'elle peut avoir avec celle-ci dépend évidemment du nombre plus ou moins grand de constantes arbitraires que renferme son équation la plus générale, un contact de l'ordre n exigeant $n+1$ conditions analytiques, qui ne sauraient être remplies qu'avec un pareil nombre de constantes disponibles. Par conséquent, une ligne droite, dont l'équation la plus générale contient seulement deux constantes arbitraires, ne peut avoir avec une courbe quelconque qu'un contact du premier ordre : d'où découle la théorie ordinaire des tangentes. L'équation du cercle renfermant, en général, trois constantes arbitraires, le cercle peut avoir avec une courbe quelconque un contact du second ordre, et de là résulte, comme cas particulier, l'ancienne théorie du cercle osculateur. En considérant une parabole, comme il y a quatre constantes arbitraires dans son équation la plus complète et la plus simple, elle est susceptible, comparée à toute autre courbe, d'une intimité plus profonde, qui peut aller jusqu'au contact du troisième ordre : de même, une ellipse comporterait un contact du quatrième ordre, etc.

La considération précédente est propre à suggérer une interprétation géométrique de cette théorie générale des contacts, qui me semble destinée à compléter le travail de Lagrange, en assignant, pour définir directement les divers ordres de contacts, un caractère concret plus simple et plus clair que celui indiqué par Lagrange. En effet, ce nombre plus ou moins grand de constantes arbitraires contenues dans une équation a pour signification géométrique, comme nous l'avons établi en commençant cette leçon, le nombre des points nécessaires à l'entière détermination de la courbe correspondante, lequel se trouve ainsi marquer le degré d'intensité dont cette courbe est susceptible relativement à toute autre. Or, d'un autre côté, la loi analytique qui exprime ce contact par l'égalité d'un pareil nombre de dérivées successives des deux ordonnées, indique évidemment que les deux courbes ont alors autant de points infiniment voisins communs; puisque, d'après la nature des différentielles, il est clair que la différentielle de l'ordre n dépend

de la comparaison de $n+1$ ordonnées consécutives. On peut donc se faire directement une idée nette des divers ordres de contacts, en disant qu'ils consistent dans la communauté d'un nombre plus ou moins grand de points infiniment voisins entre les deux courbes. En termes plus rigoureux, on définirait, par exemple, l'ellipse osculatrice au troisième ordre, en la regardant comme la limite vers laquelle tendraient les ellipses passant par cinq points de la courbe proposée, à mesure que quatre de ces points supposés mobiles se rapprocheraient indéfiniment du cinquième supposé fixe.

Cette théorie générale des contacts est évidemment propre, par sa nature, à fournir une connaissance de plus en plus profonde de la courbure d'une courbe quelconque, en lui comparant successivement diverses courbes connues, susceptibles d'un contact de plus en plus intime; ce qui permettrait de rendre aussi exacte qu'on voudrait la mesure de la courbure, en changeant convenablement le terme de comparaison. Ainsi, il est clair, d'après les considérations précédentes, que l'assimilation de tout arc de courbe infiniment petit à un arc de parabole, en ferait connaître la courbure avec plus de précision que par l'emploi du cercle osculateur; et la comparaison avec l'ellipse procurerait encore plus d'exactitude, etc.; en sorte qu'en destinant chaque type primitif à approfondir l'étude du type suivant, on pourrait perfectionner à l'infini la théorie des courbes. Mais la nécessité d'avoir une connaissance nette et familière de la courbe ainsi adoptée comme unité de courbure, détermine les géomètres à renoncer à cette haute perfection spéculative, pour se contenter, en réalité, de comparer toutes les courbes au cercle seulement, en vertu de l'uniformité de courbure, propriété caractéristique du cercle. Aucune autre courbe, en effet, ne peut être regardée, sous ce rapport, comme assez simple et assez connue pour pouvoir être utilement employée, quoique l'on n'ignore plus que le cercle n'est pas l'unité de courbure la plus convenable abstraitement. Lagrange s'est donc borné définitivement à déduire de sa conception générale la théorie du cercle osculateur, ainsi présentée sous un point de vue purement analytique. Il est même remarquable que de cette seule considération il ait pu conclure avec facilité les deux propriétés fondamentales ci-dessus indiquées pour les développées, que la simple analyse paraissait d'abord si peu propre à établir.

J'ai cru devoir considérer la théorie des contacts des courbes dans sa plus grande extension spéculative, afin d'en faire saisir convenablement le véritable caractère. Quoiqu'on doive la réduire

finalement à la seule détermination effective du cercle osculateur, il y a sans doute, sous le rapport philosophique, une profonde différence entre concevoir cette dernière considération, pour ainsi dire, comme le dernier terme des efforts de l'esprit humain dans l'étude des courbes, ainsi qu'on le faisait avant Lagrange, et n'y voir, au contraire, qu'un simple cas particulier d'une théorie générale très-étendue, à l'examen duquel on doit habituellement se borner, en sachant néanmoins que d'autres comparaisons pourraient perfectionner davantage la doctrine géométrique.

Après avoir envisagé les principales questions de géométrie générale relatives aux propriétés des courbes, il me reste à signaler celles qui se rapportent aux rectifications et aux quadratures, dans lesquelles consiste proprement, suivant l'explication donnée dans la dixième leçon, le but définitif de la science géométrique. Mais ayant eu occasion précédemment (*voyez* la 6me leçon) d'établir les formules générales qui expriment, à l'aide de certaines intégrales, la longueur et l'aire d'une courbe plane quelconque dont l'équation rectiligne est donnée, et devant d'ailleurs m'interdire ici toute application à aucune courbe particulière, cette partie importante du sujet se trouve suffisamment traitée. Je me bornerai seulement à indiquer les formules propres à déterminer l'aire et le volume des corps produits par la révolution des courbes planes autour de leurs axes.

Supposons, comme on peut évidemment toujours le faire, que l'axe de rotation soit pris pour axe des abcisses; et, suivant l'esprit de la méthode infinitésimale proprement dite, la seule bien convenable jusqu'ici aux recherches de cette nature, concevons que l'abcisse augmente d'une quantité infiniment petite : cet accroissement déterminera dans l'arc et dans l'aire de la courbe des augmentations différentielles analogues qui, par la révolution autour de l'axe, engendreront les *élémens* de la surface et du volume cherchés. Il est aisé de voir que, en négligeant seulement un infiniment petit du second ordre tout au plus, on pourra regarder ces élémens comme égaux à la surface et au volume du cylindre correspondant, ayant pour hauteur la différentielle de l'abcisse, et pour rayon de sa base l'ordonnée du point considéré. D'après cela, en appelant S et V la surface et le volume demandés, les plus simples propositions de la géométrie élémentaire fourniront immédiatement les équations différentielles générales

$$dS = 2\pi y\,dx, \quad dV = \pi y^2\,dx.$$

Ainsi, lorsque la relation entre y et x sera donnée

dans chaque cas particulier, les valeurs de S et de V seront exprimées par les deux intégrales

$$S = 2\pi\int y\,dx, \quad V = \pi\int y^2\,dx;$$

prises entre les limites convenables. Telles sont les formules invariables d'après lesquelles, depuis Leibnitz, les géomètres ont résolu un grand nombre de questions de ce genre, quand les progrès du calcul intégral l'ont permis.

On pourrait aussi comprendre au nombre des recherches de géométrie générale à deux dimensions, l'importante détermination des centres de gravité des arcs ou des aires appartenant à des courbes quelconques, quoique cette considération ait son origine dans la mécanique rationnelle. Car, en définissant le centre de gravité comme étant le *centre des moyennes distances*, c'est-à-dire un point dont la distance à un plan ou à un axe quelconque est la moyenne arithmétique entre les distances de tous les points du corps à ce plan ou à cet axe, il est clair que cette question devient purement géométrique, et peut être traitée sans aucun recours à la mécanique. Mais, malgré une telle considération, dont nous reconnaîtrons plus tard l'importance pour généraliser suffisamment et avec facilité la notion du centre de gravité, il est certain, d'un autre côté, que la destination essentielle de cette recherche doit continuer à la faire classer plus convenablement parmi les questions de mécanique; quoique, par sa nature propre, et aussi par le caractère analytique de la méthode correspondante, elle appartienne réellement à la géométrie, ce qui m'a engagé à l'indiquer ici par anticipation.

Telles sont les principales questions fondamentales dont se compose le système actuel de notre géométrie générale à deux dimensions. On voit que, sous le rapport analytique, elles peuvent être nettement distinguées en trois classes: la première, comprenant les recherches géométriques qui dépendent seulement de l'analyse ordinaire; la seconde, celles dont la solution exige l'emploi du calcul différentiel; la troisième, enfin, celles qui ne peuvent être résolues qu'à l'aide du calcul intégral.

Il nous reste maintenant à considérer sous le même aspect, dans la leçon suivante, l'ensemble de la géométrie générale à trois dimensions.

QUATORZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. De la géométrie *générale* à trois dimensions.

L'étude des surfaces se compose d'une suite de questions générales exactement analogues à celles indiquées dans la leçon précédente par rapport aux lignes. Il est inutile de considérer ici distinctement celles qui ne dépendent que de l'analyse ordinaire, car elles se résolvent par des méthodes essentiellement semblables; soit qu'il s'agisse de connaître le nombre des points nécessaires à l'entière détermination d'une surface, soit qu'on s'occupe de la recherche des centres, soit qu'on demande les conditions précises de la similitude entre deux surfaces du même genre, etc. Il n'y a d'autre différence analytique que d'envisager des équations à trois variables au lieu d'équations à deux variables. Je passe donc immédiatement aux questions qui exigent l'emploi de l'analyse transcendante, en insistant seulement