côté, que la destination essentielle de cette recherche doit continuer à la faire classer plus convenablement parmi les questions de mécanique; quoique, par sa nature propre, et aussi par le caractère analytique de la méthode correspondante, elle appartienne réellement à la géométrie, ce qui m'a engagé à l'indiquer ici par anticipation.

Telles sont les principales questions fondamentales dont se compose le système actuel de notre géométrie générale à deux dimensions. On voit que, sous le rapport analytique, elles peuvent être nettement distinguées en trois classes: la première, comprenant les recherches géométriques qui dépendent seulement de l'analyse ordinaire; la seconde, celles dont la solution exige l'emploi du calcul différentiel; la troisième, enfin, celles qui ne peuvent être résolues qu'à l'aide du calcul intégral.

Il nous reste maintenant à considérer sous le même aspect, dans la leçon suivante, l'ensemble de la géométrie générale à trois dimensions.

QUATORZIÈME LEÇON.

Sommaire. De la géométrie *générale* à trois dimensions.

L'étude des surfaces se compose d'une suite de questions générales exactement analogues à celles indiquées dans la leçon précédente par rapport aux lignes. Il est inutile de considérer ici distinctement celles qui ne dépendent que de l'analyse ordinaire, car elles se résolvent par des méthodes essentiellement semblables; soit qu'il s'agisse de connaître le nombre des points nécessaires à l'entière détermination d'une surface, soit qu'on s'occupe de la recherche des centres, soit qu'on demande les conditions précises de la similitude entre deux surfaces du même genre, etc. Il n'y a d'autre différence analytique que d'envisager des équations à trois variables au lieu d'équations à deux variables. Je passe donc immédiatement aux questions qui exigent l'emploi de l'analyse transcendante, en insistant seulement sur les considérations nouvelles qu'elles présentent relativement aux surfaces.

La première théorie générale est celle des plans tangens. En se servant de la méthode infinitésimale proprement dite, on peut aisément trouver l'équation du plan qui touche une surface quelconque en un point donné, et qui est alors défini comme coïncidant avec la surface dans une étendue infiniment petite tout autour du point de contact. Il suffit, en effet, de considérer que, afin de remplir une telle condition, l'accroissement infiniment petit reçu par l'ordonnée verticale en résultat des accroissemens infiniment petits des deux coordonnées horizontales, doit être le même pour le plan que pour la surface, et cela indépendamment d'aucune relation déterminée entre ces deux derniers accroissemens, sans quoi la coïncidence n'aurait pas lieu en tout sens. D'après cette idée, l'analyse donne immédiatement l'équation générale :

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y')$$

pour celle du plan tangent, x', y' z', désignant les coordonnées du point de contact. La détermination de ce plan, dans chaque cas particulier, se trouve ainsi réduite à une simple différentiation de l'équation de la surface proposée.

On peut aussi obtenir cette équation générale du plan tangent, en faisant dépendre sa recherche de la seule théorie des tangentes aux courbes planes. Il faut, pour cela, considérer ce plan, ainsi qu'on le fait habituellement en géométrie descriptive, comme déterminé par les tangentes à deux sections planes quelconques de la surface passant au point donné. En choisissant les plans de ces sections parallèles à deux des plans coordonnés, on parvient sur-le-champ à l'équation précédente. Cette manière de concevoir le plan tangent donne lieu d'établir facilement un important théorème de géométrie générale, que Monge a démontré le premier, et qui consiste en ce que les tangentes à toutes les courbes qu'on peut tracer en un même point sur une surface quelconque sont toujours comprises dans un même plan.

Enfin, il est encore possible de parvenir à l'équation générale du plan tangent en le considérant comme perpendiculaire à la normale correspondante, et définissant celle-ci par sa propriété géométrique directe d'être le chemin *maximum* ou *minimum* pour aller d'un point extérieur à la surface. La méthode ordinaire des *maxima* et *minima* suffit pour former, d'après cette notion, les deux équations de la normale, en appliquant cette méthode à l'expression de la distance entre deux points, l'un situé sur la surface, l'autre extérieur, dont le premier conçu comme variable, est ensuite supposé fixe quand les conditions analytiques ont été exprimées, tandis que le second, primitivement constant, est alors envisagé comme mobile, et décrit la droite cherchée. Les équations de la normale une fois obtenues, on en déduit aisément celle du plan tangent. Cette ingénieuse manière de l'établir est également due à Monge.

La question fondamentale que nous venons d'examiner devient, comme dans le cas des courbes, la base d'un grand nombre de recherches relatives à la détermination du plan tangent, lorsqu'on remplace le point de contact donné par d'autres conditions équivalentes. Le plan tangent ne peut point évidemment être déterminé par un seul point donné extérieur, comme l'est la tangente : il faut l'assujétir à contenir une droite donnée ; à cela près, l'analogie est parfaite, et les deux questions se résolvent de la même manière. Il en est de même si le plan tangent doit être parallèle à un plan donné, ce qui fixe la valeur des deux constantes qui assignent sa direction, et par suite détermine les coordonnées du point de contact, dont ces constantes sont, pour chaque surface désignée, des fonctions connues. Enfin on peut aussi trouver comme dans

les courbes, la relation analytique qui exprime généralement le simple phénomène du contact entre un plan et une surface, sans spécifier le lieu de ce contact ; d'ou résulte pareillement la solution de plusieurs questions relatives aux plans taugens, entr'autres celle qui consiste à déterminer un plan qui touche à la fois trois surfaces quelconques données, recherche analogue à celle de la tangente commune à deux courbes.

La théorie générale des contacts plus ou moins intimes qui peuvent exister entre deux surfaces quelconques par suite des relations plus ou moins nombreuses de leurs équations, se forme d'après une méthode exactement semblable à celle indiquée dans la leçon précédente relativement aux courbes, en exprimant, à l'aide de la série de Taylor pour les fonctions de deux variables, la distance verticale des deux surfaces en un second point voisin de leur point d'intersection, et dont les coordonnées horizontales auraient reçu deux accroissemens h et k entièrement indépendans l'un de l'autre. La considération de cette distance, développée selon les puissances croissantes de h et k, et dans l'expression de laquelle on suprimera successivement les termes du premier degré en h et k, ensuite ceux du second, etc, déterminera les conditions analytiques des contacts de différens ordres que peuvent avoir les deux surfaces suivant le plus ou moins grand nombre de constantes arbitraires contenues dans l'équation générale de celle qu'on regarde comme variable. Mais, malgré la conformité de méthode, cette théorie présentera avec celle des courbes une différence fondamentale relativement au nombre de ces conditions, par suite de la nécessité où l'on se trouve dans ce cas de considérer deux accroissemens indépendans au lieu d'un seul. Il en résulte, en effet, que, afin que chaque contact ait lieu dans tous les sens possibles autour du point commun, on doit annuler séparément tous les différens termes du même degré correspondant, et, dont le nombre augmentera d'autant plus que ce degré ou l'ordre du contact sera plus élevé. Ainsi, après la condition de l'égalité des deux ordonnées verticales z nécessaire pour la simple intersection, on trouvera que le contact du premier ordre exige, en outre, deux relations distinctes, consistant dans l'égalité respective des deux fonctions dérivées partielles du premier ordre propres à chaque ordonnée verticale. En passant au contact du second ordre, il faudra ajouter encore trois nouvelles conditions, à cause des trois termes distincts du second degré en h et k dans l'expression de la distance, et dont la suppression complète exigera l'égalité respective des trois fonctions dérivées partielles du second ordre relatives

au z de chaque surface. On trouvera de la même manière que le contact du troisième ordre donne lieu en outre à quatre autres relations, et ainsi de suite, le nombre des dérivées partielles de chaque ordre restant constamment égal au nombre de termes en h et k du degré correspondant. Il est aisé d'en conclure, en général, que le nombre total des conditions distinctes nécessaires au contact de l'ordre n, a pour valeur $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, tandis que dans les courbes, il était simplement égal à $n+1$.

Par suite de cette seule différence essentielle, la théorie des surfaces est loin d'offrir à cet égard la même facilité et de comporter la même perfection que celle des courbes. Quand on se borne au contact du premier ordre, il y a parité complète, puisque ce contact n'exige que trois conditions, auxquelles on peut toujours satisfaire à l'aide des trois constantes arbitraires que renferme l'équation générale d'un plan; de là résulte, comme cas particulier, la théorie des plans tangens, exactement analogue à celle des tangentes aux courbes, et présentant la même utilité pour étudier la forme d'une surface quelconque. Mais il n'en est plus ainsi lorsqu'on considère le contact du second ordre, afin de mesurer la courbure des surfaces. Il serait naturel alors de comparer toutes les surfaces à la sphère, la seule qui présente une courbure uniforme, comme on compare toutes les courbes au cercle. Or, le contact du second ordre entre deux surfaces exigeant six conditions, tandis que l'équation la plus générale d'une sphère contient seulement quatre constantes arbitraires, il n'est pas possible de trouver, en chaque point d'une surface quelconque, une sphère qui soit complétement osculatrice en tous sens, au lieu que nous avons vu un arc de courbe infiniment petit pouvoir toujours être assimilé à un certain arc de cercle. D'après cette impossibilité de mesurer la courbure d'une surface en chaque point à l'aide d'une seule sphère, les géomètres ont déterminé les coordonnées du centre et le rayon d'une sphère qui, au lieu d'être osculatrice en tout sens indistinctement, le serait seulement dans une certaine direction particulière, correspondante à un rapport donné entre les deux accroissemens h et k. Il suffit alors, en effet, pour établir ce contact du second ordre *relatif*, d'ajouter, aux trois conditions ordinaires du contact du premier ordre, la condition unique qui résulte de la suppression totale des termes du second degré en h et k envisagés collectivement, sans qu'il soit nécessaire de les annuler chacun séparément; le nombre des relations se trouve par là seulement égal à celui des constantes disponibles renfermées dans l'équation générale de la sphère, qui est ainsi déterminée. Ce procédé se réduit proprement à étudier la courbure d'une surface en chaque point par celle des différentes courbes que tracerait sur cette surface une suite de plans menés par la normale correspondante.

D'après la formule générale qui exprime le rayon de courbure de chacune de ces sections normales en fonction de sa direction, Euler, auquel est essentiellement due toute cette théorie, a découvert plusieurs théorèmes importans relatifs à une surface quelconque. Il a d'abord aisément établi que, parmi toutes les sections normales d'une surface en un même point, on en pouvait distinguer deux principales, dont la courbure, comparée à celle de toutes les autres, était un *minimum* pour la première, et un *maximum* pour la seconde, et dont les plans présentent cette circonstance remarquable d'être constamment perpendiculaires entre eux. Il a fait voir ensuite que, quelle que pût être la surface proposée, et sans qu'il fût même nécessaire de la définir, la courbure de ces deux sections principales suffisait seule pour déterminer complétement celle d'une autre section normale quelconque, à l'aide d'une formule invariable et très-simple, d'après l'inclinaison du plan de cette section sur celui de la section de plus grande ou de plus petite courbure.

En considérant cette formule comme l'équation polaire d'une certaine courbe plane, il en a déduit une ingénieuse construction, éminemment remarquable par sa généralité et par sa simplicité. Elle consiste en ce que, si l'on construit une ellipse telle que les distances d'un de ses foyers aux deux extrémités du grand axe soient égales aux deux rayons de courbure *maximum* et *minimum*, le rayon de courbure de toute autre section normale sera égal à celui des rayons vecteurs de l'ellipse qui fera avec l'axe un angle double de l'inclinaison du plan de cette section sur celui d'une des sections principales. Cette ellipse se change en une hyperbole construite de la même manière, quand les deux sections principales ne tournent pas leur concavité dans le même sens : enfin elle devient une parabole, lorsque la surface est du genre de celles qui peuvent être engendrées par une ligne droite, ou qu'elle présente une *inflexion* au point que l'on considère. De cette belle propriété fondamentale, on a conclu plus tard un grand nombre de théorèmes secondaires plus ou moins intéressans, que ce n'est pas ici le lieu d'indiquer. Je dois seulement signaler le théorème essentiel par lequel Meunier a complété le travail d'Euler, en rattachant la courbure de toutes les courbes quelconques qui peuvent être tracées sur une surface en un même point, à celle des sections

normales, les seules qu'Euler eût considérées. Ce théorème consiste en ce que le centre de courbure de toute section oblique peut être envisagé comme la projection sur le plan de cette section, du centre de courbure correspondant à la section normale qui passerait par la même tangente : d'où Meunier a déduit une construction fort simple, d'après laquelle, par l'emploi d'un cercle analogue à l'ellipse d'Euler, on détermine la courbure des sections obliques, connaissant celle des sections normales; en sorte que, par la combinaison des deux théorèmes, la seule courbure des deux sections normales *principales* suffit pour obtenir celle de toutes les autres courbes qu'on peut tracer sur une surface d'une manière quelconque en chaque point considéré.

La théorie précédente permet d'étudier complétement, point par point, la courbure d'une surface quelconque. Afin de lier plus aisément entre elles les considérations relatives aux divers points d'une même surface, les géomètres ont cherché à déterminer ce qu'ils appellent les *lignes de courbure* d'une surface, c'est-à-dire, celles qui jouissent de la propriété que les normales consécutives à la surface peuvent y être regardées comme comprises dans un même plan. En chaque point d'une surface quelconque, il existe deux de ces lignes, qui se trouvent être constamment perpendiculaires entre elles, et dont les directions coïncident à leur origine avec celles des deux sections normales *principales* considérées ci-dessus, ce qui peut dispenser d'envisager distinctement ces dernières. La détermination de ces lignes de courbure s'effectue très-simplement sur les surfaces les plus usuelles, telles que les surfaces cylindriques, coniques, et de révolution. Cette nouvelle considération fondamentale est d'ailleurs devenue le point de départ de plusieurs autres recherches générales moins importantes, comme celle des *surfaces de courbure*, qui sont les lieux géométriques des centres de courbure des diverses sections *principales*; celle des surfaces développables formées par les normales à la surface menées aux différens points de chaque ligne de courbure, etc.

Pour terminer l'examen de la théorie de la courbure, il me reste à indiquer sommairement ce qui se rapporte aux *courbes à double courbure*, c'est-à-dire, à celles qui ne peuvent être contenues dans un plan.

Quant à la détermination de leurs tangentes, elle n'offre évidemment aucune difficulté. Si la courbe est donnée analytiquement par les équations de ses projections sur deux des plans coordonnées, les équations de sa tangente seront simplement celles des tangentes à ces deux projections, ce qui fait rentrer la question dans le cas des courbes planes. Si, sous un point de vue plus général, la définition analytique de la courbe consiste, ainsi que l'indique la douzième leçon, dans le système des équations des deux surfaces quelconques dont elle serait l'intersection, on regardera la tangente comme étant l'intersection des plans tangens à ces deux surfaces, et le problème sera ramené à celui du plan tangent, résolu ci-dessus.

La courbure des courbes de cette nature donne lieu à l'établissement d'une notion nouvelle fort importante. En effet, dans une courbe plane, la courbure se trouve être suffisamment appréciée en mesurant l'inflexion plus ou moins grande des élémens consécutifs les uns sur les autres, qui est estimée indirectement par le rayon du cercle osculateur. Mais il n'en est nullement ainsi dans une courbe qui n'est point plane. Les élémens consécutifs n'étant plus alors contenus dans un même plan, on ne peut avoir une idée exacte de la courbure qu'en considérant distinctement les angles qu'ils forment entre eux et aussi les inclinaisons mutuelles des plans qui les comprennent. Il faut donc, avant tout, commencer par fixer ce qu'on doit entendre à chaque instant par *le plan* de la courbe, c'est-à-dire, celui que déterminent trois points infiniment voisins, et qu'on appelle, pour cette raison, le plan *osculateur*, qui change continuellement d'un point à un autre. La position de ce plan une fois obtenue, la mesure de la courbure ordinaire, à l'aide du cercle osculateur, ne présente plus évidemment aucune difficulté nouvelle. Quant à la seconde courbure, elle est estimée par l'angle plus ou moins grand que forment entre eux deux plans osculateurs consécutifs, et dont il est aisé de trouver généralement l'expression analytique. Pour établir plus d'analogie entre la théorie de cette courbure et celle de la première, on pourrait également la regarder comme mesurée indirectement d'après le rayon de la sphère *osculatrice* qui passerait par quatre points infiniment voisins de la courbe proposée, et dont l'équation se formerait de la même manière que celle du plan osculateur. On l'apprécie ordinairement par la courbure maximum que présente, au point considéré, la surface développable qui est le lieu géométrique de toutes les tangentes à la courbe proposée.

Nous devons passer maintenant à l'indication des questions de géométrie générale à trois dimensions qui dépendent du calcul intégral; elles comprennent la quadrature des surfaces courbes, et la cubature des volumes correspondans.

Relativement à la quadrature des surfaces courbes, il faut, pour établir l'équation différentielle

générale, concevoir la surface partagée en élémens plans infinimens petits dans tous les sens, par quatre plans perpendiculaires deux à deux aux axes des coordonnées x et y. Chacun de ces élémens, situé dans le plan tangent correspondant, aurait évidemment pour projection horizontale, le rectangle formé par les différentielles des deux coordonnées horizontales, et dont l'aire serait $dxdy$. Cette aire donnera celle de l'élément lui-même, d'après un théorème élémentaire fort simple, en la divisant par le cosinus de l'angle que fait le plan tangent avec le plan des x, y. On trouvera ainsi que l'expression de cet élément est généralement :

$$d^2 S = dx\,dy \sqrt{\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} + 1}$$

C'est donc par la double intégration de cette formule différentielle à deux variables qu'on connaîtra, dans chaque cas particulier, l'aire de la surface proposée, autant que pourra le permettre l'imperfection actuelle du calcul intégral. Les limites de chaque intégrale successive seront déterminées par la nature des surfaces dont l'intersection avec celle que l'on considère devra circonscrire l'étendue à mesurer, en sorte que, dans l'application de cette méthode générale, il faudra apporter un soin particulier à la manière de fixer les constantes arbitraires ou les fonctions arbitraires introduites par l'intégration.

Relativement à la cubature des volumes terminés par les surfaces courbes, le système de plans à l'aide duquel nous venons de différentier l'aire, peut aussi servir immédiatement à décomposer le volume en élémens polyèdres. Il est clair, en effet, que l'espace infiniment petit du second ordre compris entre ces quatre plans, doit être envisagé, suivant l'esprit de la méthode infinitésimale, comme égal au parallélipipède rectangle ayant pour hauteur l'ordonnée verticale z du point que l'on considère et pour base le rectangle $dxdy$, puisque leur différence est évidemment un infiniment petit du troisième ordre, moindre que $dzdydz$. D'après cela, un des plus simples théorèmes de la géométrie élémentaire fournira directement, pour l'expression différentielle du volume cherché, l'équation générale

$$d^2 V = z\,dx\,dy;$$

d'où l'on déduira, par une double intégration, dans chaque cas particulier, la valeur effective de ce volume, en ayant le même égard que précédemment à la détermination des limites de chaque intégrale, conformément à la nature des surfaces qui devront circonscrire latéralement le volume proposé.

Sans entrer ici dans aucun détail relatif à la solution définitive de l'une ou de l'autre de ces

deux questions fondamentales, il peut être utile de remarquer, d'après les équations différentielles précédentes, une analogie générale et singulière qui existe nécessairement entre elles, et qui permettrait de transformer toute recherche relative à la quadrature en une recherche correspondante relative à la cubature. On voit, en effet, que les deux équations différentielles ne diffèrent que par le changement de z en $\sqrt{\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1}$ en passant de la seconde à la première. Ainsi l'aire d'une surface courbe quelconque peut être regardée comme numériquement égale au volume d'un corps terminé par une surface dont l'ordonnée verticale aurait à chaque instant pour valeur la sécante de l'angle que fait avec le plan horizontal le plan tangent correspondant à la surface primitive, les limites étant d'ailleurs supposées respectivement les mêmes.

Pour terminer l'examen philosophique de la géométrie générale à trois dimensions, il me reste à considérer sommairement la belle conception fondamentale établie par Monge relativement à la classification analytique des surfaces en familles naturelles, qui doit être regardée comme le perfectionnement le plus important qu'ait reçu la science géométrique depuis Descartes et Leibnitz.

Quand on se propose d'étudier, sous un point de vue général, les propriétés spéciales des diverses surfaces, la première difficulté qui se présente consiste dans l'absence d'une bonne classification, déterminée par les caractères géométriques les plus essentiels, et d'ailleurs suffisamment simple. Dès la fondation de la géométrie analytique, les géomètres ont été involontairement conduits à classer les surfaces, comme les courbes, par la forme et le degré de leurs équations, seule considération qui s'offrît d'elle-même à l'esprit pour servir de base à une distinction dont l'importance n'avait d'abord été nullement sentie. Mais il est aisé de voir que ce principe de classification, convenablement applicable aux équations du premier et du second degré, ne remplit aucune des conditions principales auxquels doit satisfaire un tel travail. En effet, on sait que Newton, en discutant l'équation générale du troisième degré à deux variables, pour se borner à la simple énumération des diverses courbes planes qu'elle peut représenter, a reconnu que, bien qu'elles fussent toutes nécessairement indéfinies en tout sens, on devait en distinguer 74 espèces particulières, aussi différentes les unes des autres que le sont entre elles les trois courbes du second degré. Quoique personne n'ait analysé sous le même point de vue l'équation générale du quatrième degré à deux va-

riables, il n'est pas douteux qu'elle ne dût faire naître un nombre beaucoup plus considérable encore de courbes distinctes ; et ce nombre devrait évidemment augmenter avec une prodigieuse rapidité d'après le degré de l'équation. Si maintenant l'on passe aux équations à trois variables, qui, vu leur plus grande complication, présentent nécessairement bien plus de variété, il est incontestable que le nombre des surfaces vraiment distinctes qu'elles peuvent exprimer doit être encore plus multiplié, et croître beaucoup plus rapidement d'après le degré. Cette multiplicité devient telle, qu'on s'est toujours borné à analyser ainsi les équations des deux premiers degrés, aucun géomètre n'ayant tenté pour les surfaces du troisième degré ce qu'a exécuté Newton pour les courbes correspondantes. Il suit donc de cette considération évidente que, quand même l'imperfection de l'algèbre ne s'opposerait pas à l'emploi indéfini d'un procédé semblable, la classification générale des surfaces par le degré et la forme de leurs équations serait entièrement impraticable. Mais ce motif n'est pas le seul qui doive faire rejeter une telle classification ; il n'est point même le plus important. En effet, cette manière de disposer les surfaces, outre l'impossibilité de la suivre, se trouve directement contraire à la principale destination de toute bonne classification quelconque, consistant à rapprocher le plus les uns des autres les objets qui offrent les relations les plus importantes, et à éloigner ceux dont les analogies ont peu de valeur. L'identité du degré de leurs équations est, pour les surfaces, un caractère d'une valeur géométrique très-médiocre, qui n'indique pas même exactement le nombre des points nécessaires à l'entière détermination de chacune. La propriété commune la plus importante à considérer entre des surfaces consiste évidemment dans leur mode de génération; toutes celles qui sont engendrées de la même manière devant offrir nécessairement une grande analogie géométrique, tandis qu'elles ne sauraient avoir que de très-faibles ressemblances si elles sont engendrées d'après des modes essentiellement différens. Ainsi, par exemple, toutes les surfaces cylindriques, quelle que soit la forme de leur base, constituent une même famille naturelle, dont les divers individus présentent un grand nombre de propriétés communes de première importance : il en est de même pour toutes les surfaces coniques, et aussi pour toutes les surfaces de révolution, etc. Or, cet ordre naturel se trouve complétement détruit par la classification fondée sur le degré des équations. Car des surfaces assujéties à un même mode de génération, les surfaces cylindriques, par exemple, peuvent fournir des équations de

tous les degrés imaginables, à raison de la seule différence secondaire de leurs bases ; tandis, que d'un autre côté, des équations d'un même degré quelconque expriment souvent des surfaces de nature géométrique opposée, les unes cylindriques, les autres coniques, ou de révolution, etc. Une telle classification analytique est donc radicalement vicieuse, comme séparant ce qui doit être réuni, et rapprochant ce qui doit être distingué. Cependant, la géométrie générale étant entièrement fondée sur l'emploi des considérations et des méthodes analytiques, il est indispensable que la classification puisse prendre aussi un caractère analytique.

Tel était donc l'état précis de la difficulté fondamentale, si heureusement vaincue par Monge: les familles naturelles entre les surfaces étant clairement établies sous le point de vue géométrique d'après le mode de génération, il fallait découvrir un genre de relations analytiques destiné à présenter constamment une interprétation abstraite de ce caractère concret. Cette découverte capitale était rigoureusement indispensable pour achever de constituer la théorie générale des surfaces.

La considération, que Monge a employée pour y parvenir, consiste dans cette observation générale, aussi simple que directe : les surfaces assujéties à un même mode de génération sont nécessairement caractérisées par une certaine propriété commune de leur plan tangent en un point quelconque; en sorte qu'en exprimant analytiquement cette propriété d'après l'équation générale du plan tangent à une surface quelconque, on formera une équation différentielle représentant à la fois toutes les surfaces de cette famille.

Ainsi, par exemple, toute surface cylindrique présente ce caractère exclusif : que le plan tangent en un point quelconque de la surface est constamment parallèle à la droite fixe qui indique la direction des génératrices. D'après cela, il est aisé de voir que les équations de cette droite étant supposées être

$$x = az, \quad y = bz,$$

l'équation générale du plan tangent établie ci-dessus donnera, pour l'équation différentielle commune à toutes les surfaces cylindriques,

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1.$$

De même, relativement aux surfaces coniques, elles sont toutes caractérisées sous ce point de vue par la propriété nécessaire que leur plan tangent en un point quelconque passe constamment par le sommet du cône. Si donc α, β, γ, désignent les coordonnées de ce sommet, on trouvera immédiatement

$$(x - \alpha) \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{dz}{dy} = z - \gamma,$$

pour l'équation différentielle représentant la famille entière des surfaces coniques.

Dans les surfaces de révolution, le plan tangent en un point quelconque est toujours perpendiculaire au plan *méridien*, c'est-à-dire à celui qui passe par ce point et par l'axe de la surface. Afin d'exprimer analytiquement cette propriété d'une manière plus simple, supposons que l'axe de révolution soit pris pour celui des z : l'équation différentielle commune à toute cette famille de surfaces, sera

$$y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0.$$

Il serait superflu de citer ici un plus grand nombre d'exemples pour établir clairement, en général, que, quel que soit le mode de génération, toutes les surfaces d'une même famille naturelle sont susceptibles d'être représentées analytiquement par une même équation *aux différences partielles* contenant des constantes arbitraires, d'après une propriété commune de leur plan tangent.

Afin de compléter cette correspondance fondamentale et nécessaire entre le point de vue géométrique et le point de vue analytique, Monge a considéré en outre les équations finies qui sont les intégrales de ces équations différentielles, et qu'on peut d'ailleurs presque toujours facilement obtenir aussi par des recherches directes. Chacune de ces équations finies doit, comme on le sait par la théorie générale de l'intégration, contenir une fonction arbitraire, si l'équation différentielle est seulement du premier ordre; ce qui n'empêche pas que de telles équations, quoique beaucoup plus générales que celles dont on s'occupe ordinairement, ne présentent un sens nettement déterminé, soit sous le rapport géométrique, soit sous le simple rapport analytique. Cette fonction arbitraire correspond à ce qu'il y a d'indéterminé dans la génération des surfaces proposées, à la base, par exemple, si les surfaces sont cylindriques ou coniques, à la courbe méridienne, si elles sont de révolution, etc. (1). Dans certains cas même, l'équation finie d'une famille de sur-

(1) On trouve, par exemple, soit d'après les considérations directes de géométrie analytique, soit en résultat des méthodes d'intégration, que les surfaces cylindriques et les surfaces coniques ont pour équations finies

$$x - az = \varphi(y - bz), \quad \frac{x - \alpha}{z - \gamma} = \varphi\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)$$

φ désignant une fonction entièrement arbitraire.

faces contient à la fois deux fonctions arbitraires, affectées à des combinaisons distinctes des coordonnées variables; c'est ce qui a lieu lorsque l'équation différentielle correspondante doit être du second ordre; sous le point de vue géométrique, cette indétermination plus grande indique une famille plus générale, et néanmoins caractérisée. Telle est, par exemple, la famille des surfaces développables, qui comprend, comme subdivisions, toutes les surfaces cylindriques, toutes les surfaces coniques, et une infinité d'autres familles analogues, et qui peut cependant être nettement définie, dans sa plus grande généralité, comme étant l'*enveloppe* de l'espace parcouru par un plan qui se meut en restant toujours tangent à deux surfaces fixes quelconques, ou comme le lieu géométrique de toutes les tangentes à une même courbe quelconque à double courbure. Ce groupe naturel de surfaces a, pour équation différentielle invariable, cette équation très-simple, découverte par Euler, entre les trois dérivées partielles du second ordre,

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}$$

L'équation finie contient donc nécessairement deux fonctions arbitraires distinctes, qui correspondent géométriquement aux deux surfaces indéterminées sur lesquelles doit glisser le plan générateur, ou aux deux équations quelconques de la courbe directrice.

Quoiqu'il soit utile de considérer les équations finies des familles naturelles de surfaces, on conçoit néanmoins que l'indétermination des fonctions arbitraires qu'elles renferment inévitablement, doit les rendre peu propres à des travaux analytiques soutenus, pour lesquels il est bien préférable d'employer les équations différentielles, où il n'entre que de simples constantes arbitraires, malgré leur nature indirecte. C'est par là que l'étude générale et régulière des propriétés des diverses surfaces est réellement devenue possible, le point de vue commun ayant pu ainsi être saisi et séparé par l'analyse. On conçoit qu'une telle conception ait permis de découvrir des résultats d'un degré de généralité et d'intérêt infiniment supérieurs à ceux qu'on pouvait obtenir auparavant. Pour ne citer qu'un seul exemple très-simple, qui est fort loin d'être le plus remarquable, c'est par une semblable méthode de géométrie analytique qu'on a pu reconnaître cette singulière propriété de toute équation *homogène* à trois variables, de représenter nécessairement une surface conique dont le sommet est situé à l'origine des coordonnées; de même, parmi les recherches plus

difficiles, il a été possible de déterminer, à l'aide du calcul des variations, le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface développable quelconque, sans qu'il fût nécessaire de la particulariser, etc.

J'ai cru devoir ici accorder quelque développement à l'exposition philosophique de cette belle conception de Monge, qui constitue, sans contredit, son premier titre à la gloire, et dont la haute importance ne me semble point avoir encore été dignement sentie, excepté par Lagrange, si juste appréciateur de tous ses émules. Je regrette même d'être réduit, par les limites naturelles de cet ouvrage, à une indication aussi imparfaite, où je n'ai pu seulement signaler l'heureuse réaction nécessaire de cette nouvelle géométrie sur le perfectionnement de l'analyse, quant à la théorie générale des équations différentielles à plusieurs variables.

En méditant sur cette classification philosophique des surfaces, essentiellement analogue aux méthodes naturelles que les physiologistes ont tenté d'établir en zoologie et en botanique, on est conduit à se demander si les courbes elles-mêmes ne comportent pas une opération semblable. Vu la variété infiniment moindre qui existe entre elles, un tel travail est à la fois moins important et plus difficile, les caractères qui pourraient servir de base n'étant point alors à beaucoup près aussi tranchés. Il a donc été naturel que l'esprit humain s'occupât d'abord de classer les surfaces. Mais on doit sans doute espérer que cet ordre de considérations s'étendra plus tard jusqu'aux courbes. On peut même apercevoir déjà entre elles quelques familles vraiment naturelles, comme celle des paraboles quelconques, et celle des hyperboles quelconques, etc. Néanmoins, il n'a été encore produit aucune conception générale directement propre à déterminer une telle classification.

Ayant ainsi exposé aussi nettement qu'il m'a été possible, dans cette leçon et dans l'ensemble des quatre précédentes, le véritable caractère philosophique de la section la plus générale et la plus simple de la mathématique concrète, je dois maintenant entreprendre le même travail relativement à la science immense et plus compliquée de la mécanique rationnelle. Ce sera l'objet des quatre leçons suivantes.

QUINZIÈME LEÇON.

Sommaire. Considérations philosophiques sur les principes fondamentaux de la mécanique rationnelle.

Les phénomènes mécaniques sont, par leur nature, comme nous l'avons déjà remarqué, à la fois plus particuliers, plus compliqués et plus concrets que les phénomènes géométriques. Aussi, conformément à l'ordre encyclopédique établi dans cet ouvrage, plaçons-nous la mécanique rationnelle après la géométrie dans cette exposition philosophique de la mathématique concrète, comme étant nécessairement d'une étude plus difficile, et par suite moins perfectionnée. Les questions géométriques sont toujours complétement indépendantes de toute considération mécanique, tandis que les questions mécaniques se compliquent constamment des considérations géométriques, la forme des corps devant influer inévitablement sur les phénomènes du mou-