des plus grands géomètres, cette seconde section générale si étendue, si essentielle, et si difficile de la mathématique concrète, a pu être élevée à cet éminent degré de perfection théorique qu'elle a atteint de nos jours dans l'admirable traité de Lagrange, et qui nous présente toutes les questions abstraites qu'elle est susceptible d'offrir, ramenées, d'après un principe unique, à ne plus dépendre que de recherches purement analytiques, comme nous l'avons déjà reconnu pour les problèmes géométriques. Ce sera l'objet des trois leçons suivantes; la première consacrée à la *statique*, la seconde à la dynamique, et la troisième, à l'examen des théorèmes généraux de la mécanique rationnelle.

SEIZIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de la statique.

L'ensemble de la mécanique rationnelle peut être traité d'après deux méthodes générales essentiellement distinctes et inégalement parfaites, suivant que la statique est conçue d'une manière directe, ou qu'elle est considérée comme un cas particulier de la dynamique. Par la première méthode, on s'occupe immédiatement de découvrir un principe d'équilibre suffisamment général, qu'on applique ensuite à la détermination des conditions d'équilibre de tous les systèmes de forces possibles. Par la seconde, au contraire, on cherche d'abord quel serait le mouvement résultant de l'action simultanée des diverses forces quelconques proposées, et on en déduit les relations qui doivent exister entre ces forces pour que ce mouvement soit nul.

La statique étant nécessairement d'une nature plus simple que la dynamique, la première méthode a pu seule être employée à l'origine de la mécanique rationnelle. C'est, en effet, la seule qui fût connue des anciens, entièrement étrangers à toute idée de dynamique, même la plus élémentaire. Archimède, vrai fondateur de la statique, et auquel sont dues toutes les notions essentielles que l'antiquité possédait à cet égard, commence à établir la condition d'équilibre de deux poids suspendus aux deux extrémités d'un levier droit, c'est-à-dire la nécessité que ces poids soient en raison inverse de leurs distances au point d'appui du lévier; et il s'efforce ensuite de ramener autant que possible à ce principe unique la recherche des relations d'équilibre propres à d'autres systèmes de forces. Pareillement, quant à la statique des fluides, il pose d'abord son célèbre principe, consistant en ce que tout corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du fluide déplacé; et ensuite il en déduit, dans un grand nombre de cas, la théorie de la stabilité des corps flottans. Mais le principe du levier n'avait point par lui-même une assez grande généralité pour qu'il fût possible de l'appliquer réellement à la détermination des conditions d'équilibre de tous les systèmes de forces. Par quelques ingénieux artifices qu'on ait successivement essayé d'en étendre l'usage, on n'a pu effectivement y ramener que les systèmes composés de forces parallèles. Quant aux forces dont les directions concourent, on a d'abord essayé de suivre une marche analogue, en imaginant de nouveaux principes directs d'équilibre spécialement propres à ce cas plus général, et parmi lesquels il faut surtout remarquer l'heureuse idée de Stévin, relative à l'équilibre du système de deux poids posés sur deux plans inclinés adossés. Cette nouvelle idée-mère eût peut-être suffi strictement pour combler la lacune que laissait dans la statique le principe d'Archimède, puisque Stévin était parvenu à en déduire les rapports d'équilibre entre trois forces appliquées en un même point, dans le cas du moins où deux de ces forces sont à angles droits; et il avait même remarqué que les trois forces sont alors entre elles comme les trois côtés d'un triangle dont les angles seraient égaux à ceux formés par ces trois forces. Mais, la dynamique ayant été fondée dans le même temps par Galilée, les géomètres cessèrent de suivre l'ancienne marche statique directe, préférant procéder à la recherche des conditions d'équilibre d'après les lois dès lors connues de la composition des forces. C'est par cette dernière méthode que Varignon découvrit la véritable théorie générale de l'équilibre d'un système de forces appliquées en un même point, et que plus tard d'Alembert établit enfin, pour la première fois, les équations d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées aux différens points d'un corps solide de forme invariable. Cette méthode est encore aujourd'hui la plus universellement employée.

Au premier abord, elle semble peu rationnelle, puisque, la dynamique étant plus compliquée que la statique, il ne paraît nullement convenable de faire dépendre celle-ci de l'autre. Il serait, en effet, plus philosophique de ramener au contraire, s'il est possible, la dynamique à la statique, comme on y est parvenu depuis. Mais on doit néanmoins reconnaître que, pour traiter complétement la statique comme un cas particulier de la dynamique, il suffit d'avoir formé seulement la partie la plus élémentaire de celle-ci, la théorie des mouvemens uniformes, sans avoir aucun besoin de la théorie des mouvemens variés. Il importe d'expliquer avec précision cette distinction fondamentale.

A cet effet, observons d'abord qu'il existe, en général, deux sortes de forces : 1° les forces que j'appelle *instantanées*, comme les impulsions, qui n'agissent sur un corps qu'à l'origine du mouvement, en l'abandonnant à lui-même aussitôt qu'il est en marche; 2° les forces qu'on appelle

assez improprement *accélératrices*, et que je préfère nommer *continues*, comme les attractions, qui agissent sans cesse sur le mobile pendant toute la durée du mouvement. Cette distinction équivaut évidemment à celle des mouvemens *uniformes* et des mouvemens *variés ;* car il est clair, en vertu de la première des trois lois fondamentales du mouvement exposées dans la leçon précédente, que toute force instantanée doit nécessairement produire un mouvement uniforme, tandis que toute force continue doit, au contraire, par sa nature, imprimer au mobile un mouvement indéfiniment varié. Cela posé, on conçoit fort aisément, *à priori*, comme je l'ai déjà indiqué plusieurs fois, que la partie de la dynamique relative aux forces instantanées ou aux mouvemens uniformes doit être, sans aucune comparaison, infiniment plus simple que celle qui concerne les forces continues ou les mouvemens variés, et dans laquelle consiste essentiellement toute la difficulté de la dynamique. La première partie présente une telle facilité, qu'elle peut être traitée dans son ensemble comme une conséquence immédiate des trois lois fondamentales du mouvement, ainsi que je l'ai expressément remarqué à la fin de la leçon précédente. Or il est maintenant aisé de concevoir, en thèse générale, que c'est seulement de cette première partie de la dynamique qu'on a besoin pour constituer la statique comme un cas particulier de la dynamique.

En effet, le phénomène d'équilibre, dont il s'agit alors de découvrir les lois, est évidemment, par sa nature, un phénomène instantané, qui doit être étudié sans aucun égard au temps. La considération du temps ne s'introduit que dans les recherches relatives à ce qu'on appelle la *stabilité* de l'équilibre; mais ces recherches ne font plus, à proprement parler, partie de la statique, et rentrent essentiellement dans la dynamique. En un mot, suivant l'aphorisme ordinaire déjà cité, on fait toujours, en statique, abstraction du temps. Il en résulte qu'on y peut regarder comme instantanées toutes les forces que l'on considère, sans que les théories cessent pour cela d'avoir toute la généralité nécessaire. Car, à chaque époque de son action, une force continue peut toujours évidemment être remplacée par une force instantanée mécaniquement équivalente, c'est-à-dire susceptible d'imprimer au mobile une vitesse égale à celle que lui donne effectivement en cet instant la force proposée. A la vérité, il faudra, dans le moment infiniment petit suivant, substituer à cette force instantanée une nouvelle force de même nature, pour représenter le changement effectif de la vitesse, de telle sorte que,

en dynamique, où l'on doit considérer l'état du mobile dans les divers instans successifs, on retrouvera nécessairement par la variation de ces forces instantanées la difficulté fondamentale inhérente à la nature des forces continues, et qui n'aura fait que changer de forme. Mais, en statique, où il ne s'agit d'envisager les forces que dans un instant unique, on n'aura point à tenir compte de ces variations, et les lois générales de l'équilibre, ainsi établies en considérant toutes les forces comme instantanées, n'en seront pas moins applicables à des forces continues, pourvu qu'on ait soin, dans cette application, de substituer à chaque force continue la force instantanée qui lui correspond en ce moment.

On conçoit donc nettement par là comment la statique abstraite peut être traitée avec facilité comme une simple application de la partie la plus élémentaire de la dynamique, celle qui se rapporte aux mouvemens uniformes. La manière la plus convenable d'effectuer cette application consiste à remarquer que, lorsque des forces quelconques sont en équilibre, chacune d'entre elles, considérée isolément, peut être regardée comme détruisant l'effet de l'ensemble de toutes les autres Ainsi la recherche des conditions de l'équilibre se réduit, en général, à exprimer que l'une quelconque des forces du système, est égale et directement opposée à la *résultante* de toutes les autres. La difficulté ne consiste donc, dans cette méthode, qu'à déterminer cette résultante, c'est-à-dire à *composer* entre elles les forces proposées. Cette composition s'effectue immédiatement pour le cas de deux forces d'après la troisième loi fondamentale du mouvement, et l'on en déduit ensuite la composition d'un nombre quelconque de forces. La question élémentaire présente, comme on sait, deux cas essentiellement distincts, suivant que les deux forces à composer agissent dans des directions convergentes ou dans des directions parallèles. Chacun de ces deux cas peut être traité comme dérivant de l'autre, d'où résulte parmi les géomètres une certaine divergence dans la manière d'établir les lois élémentaires de la composition des forces, suivant le cas que l'on choisit pour point de départ. Mais, sans contester la possibilité rigoureuse de procéder autrement, il me semble plus rationnel, plus philosophique et plus strictement conforme à l'esprit de cette manière de traiter la statique, de commencer par la composition des forces qui concourent, d'où l'on déduit naturellement celle des forces parallèles comme cas particulier, tandis que la déduction inverse ne peut se faire qu'à l'aide de considérations indirectes, qui, quelque ingénieuses qu'elles puissent

être, présentent nécessairement quelque chose de forcé.

Après avoir établi les lois élémentaires de la composition des forces, les géomètres, avant de les appliquer à la recherche des conditions de l'équilibre, leur font éprouver ordinairement une importante transformation, qui, sans être complétement indispensable, présente néanmoins, sous le rapport analytique, la plus haute utilité, par l'extrême simplification qu'elle introduit dans l'expression algébrique des conditions d'équilibre. Cette transformation consiste dans ce qu'on appelle la théorie des *momens*, dont la propriété essentielle est de réduire analytiquement toutes les lois de la composition des forces à de simples additions et soustractions. La dénomination de *momens*, entièrement détournée aujourd'hui de sa signification première, ne désigne plus maintenant que la considération abstraite du produit d'une force par une distance. Il faut distinguer, comme on sait, deux sortes de *momens*, les momens par rapport à un point, qui indiquent le produit d'une force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction, et les momens par rapport à un plan, qui désignent le produit de la force par la distance de son point d'application à ce plan. Les premiers ne dépendent évidemment que de la direction de la force, et nullement de son point d'application; ils sont spécialement appropriés par leur nature à la théorie des forces non parallèles : les seconds au contraire, ne dépendent que du point d'application de la force, et nullement de sa direction ; ils sont donc essentiellement destinés à la théorie des forces parallèles. Nous aurons occasion d'indiquer plus bas par quelle heureuse idée fondamentale M. Poinsot est parvenu à attribuer généralement, et de la manière la plus naturelle, une signification concrète directe à l'un et à l'autre genre de momens, qui n'avaient réellement avant lui qu'une valeur abstraite.

La notion des momens une fois établie, leur théorie élémentaire consiste essentiellement dans ces deux propriétés générales très-remarquables, qu'on déduit aisément de la composition des forces: 1° si l'on considère un système de forces toutes situées dans un même plan, et disposées d'ailleurs d'une manière quelconque, le moment de leur résultante, par rapport à un point quelconque de ce plan, est égal à la somme algébrique des momens de toutes les composantes par rapport à ce même point, en attribuant à ces divers momens le signe convenable, d'après le sens suivant lequel chaque force tendrait à faire tourner son bras de lévier autour de l'origine des momens supposée fixe; 2° en considérant un système de

forces parallèles disposées d'une manière quelconque dans l'espace, le moment de leur résultante par rapport à un plan quelconque est égal à la somme algébrique des momens de toutes les composantes par rapport à ce même plan, le signe de chaque moment étant alors naturellement déterminé, conformément aux règles ordinaires, d'après le signe propre à chacun des facteurs dont il se compose. Le premier de ces deux théorèmes fondamentaux a été découvert par un géomètre auquel la mécanique rationnelle doit beaucoup, et dont la mémoire a été dignement relevée par Lagrange d'un injuste oubli, Varignon. La manière dont Varignon établit ce théorème dans le cas de deux composantes, d'où résulte immédiatement le cas général, est même spécialement remarquable. En effet, regardant le moment de chaque force par rapport à un point comme évidemment proportionnel à l'aire du triangle qui aurait ce point pour sommet et pour base la droite qui représente la force, Varignon, d'après la loi du parallélogramme des forces, présente d'abord le théorème des momens sous une forme géométrique très-simple, en démontrant que si, dans le plan d'un parallélogramme, on prend un point quelconque, et que l'on considère les trois triangles ayant ce point pour sommet commun, et pour bases les deux côtés contigus du parallélogramme et la diagonale correspondante, le triangle construit sur la diagonale sera constamment équivalent à la somme où à la différence des triangles construits sur les deux côtés; ce qui est en soi, comme l'observe avec raison Lagrange, un beau théorème de géométrie, indépendamment de son utilité en mécanique.

A l'aide de cette théorie des momens, on parvient à exprimer aisément les relations analytiques qui doivent exister entre les forces dans l'état d'équilibre, en considérant d'abord, pour plus de facilité, les deux cas particuliers d'un système de forces toutes situées d'une manière quelconque dans un même plan, et d'un système quelconque de forces parallèles. Chacun de ces deux systèmes exige, en général, trois équations d'équilibre, qui consistent : 1° pour le premier, en ce que la somme algébrique des produits de chaque force, soit par le cosinus, soit par le sinus de l'angle qu'elle fait avec une droite fixe prise arbitrairement dans le plan soit séparément nulle, ainsi que la somme algébrique des momens de toutes les forces par rapport à un point quelconque de ce plan ; 2° pour le second, en ce que la somme algébrique de toutes les forces proposées soit nulle, ainsi que la somme algébrique de leurs momens pris séparément par rapport à deux plans différens parallèles à la direction commune de ces forces. Après avoir traité ces deux cas préliminaires, il est facile d'en déduire celui d'un système de forces tout-à-fait quelconque. Il suffit, pour cela, de concevoir chaque force du système décomposée en deux, l'une située dans un plan fixe quelconque, l'autre perpendiculaire à ce plan. Le sytème proposé se trouvera dès lors remplacé par l'ensemble de deux systèmes secondaires plus simples, l'un composé de forces dirigées toutes dans un même plan, l'autre de forces toutes perpendiculaires à ce plan et conséquemment parallèles entre elles. Comme ces deux systèmes partiels ne sauraient évidemment se faire équilibre l'un à l'autre, il faudra donc, pour que l'équilibre puisse avoir lieu dans le système général primitif, qu'il existe dans chacun d'eux en particulier, ce qui ramène la question aux deux questions préliminaires déjà traitées. Telle est du moins la manière la plus simple de concevoir, en traitant la statique par la méthode dynamique, la recherche générale des conditions analytiques de l'équilibre pour un système quelconque de forces; quoiqu'il fût d'ailleurs possible évidemment, en compliquant la solution, de résoudre directement le problème dans son entière généralité, de façon à y faire rentrer au contraire, comme une simple application, les deux cas préliminaires. Quelque marche qu'on juge à pro-pos d'adopter, on trouve pour l'équilibre d'un système quelconque de forces, les six équations suivantes :

$$S P \cos \alpha = o, \quad S P \cos \beta = o, \quad S P \cos \gamma = o,$$

$$S P (y \cos \alpha - x \cos \beta) = o, \quad S P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = o,$$

$$S P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = o;$$

en désignant par P l'intensité de l'une quelconque des forces du système, par α, β, γ, les angles que forme sa direction avec trois axes fixes rectangulaires choisis arbitrairement, et par x, y, z, les coordonnées de son point d'application relativement à ces trois axes. J'emploie ici la caractéristique S pour désigner la somme des produits semblables, propres à toutes les forces du système P, P', P'', etc.

Telle est, en substance, la manière de procéder à la détermination des conditions générales de l'équilibre, en concevant la statique comme un cas particulier de la dynamique élémentaire. Mais, quelque simple que soit en effet cette méthode, il serait évidemment plus rationnel et plus satisfaisant de revenir, s'il est possible, à la méthode des anciens, en dégageant la statique de toute considération dynamique, pour procéder directement à la recherche des lois de l'équilibre envisagé en lui-même, à l'aide d'un principe d'é-

quilibre suffisamment général, établi immédiatement. C'est effectivement ce que les géomètres ont tenté, quand une fois les équations générales de l'équilibre ont été découvertes par la méthode dynamique. Mais ils ont surtout été déterminés à établir une méthode statique directe, par un motif philosophique d'un ordre plus élevé et en même temps plus pressant que le besoin de présenter la statique sous un point de vue logique plus parfait. C'est maintenant ce qu'il nous importe éminemment d'expliquer, puisque telle est la marche qui a conduit Lagrange à imprimer à l'ensemble de la mécanique rationnelle cette haute perfection philosophique qui la caractérise désormais.

Ce motif fondamental résulte de la nécessité où l'on se trouve pour traiter, en général, les questions les plus difficiles et les plus importantes de la dynamique, de les faire rentrer dans de simples questions de statique. Nous examinerons spécialement, dans la leçon suivante, le célèbre principe général de dynamique découvert par d'Alembert, et à l'aide duquel toute recherche relative au mouvement d'un corps ou d'un système quelconque, peut être convertie immédiatement en un problème d'équilibre. Ce principe, qui, sous le point de vue philosophique, n'est vraiment, comme je l'ai déjà indiqué dans la leçon précédente, que la plus grande généralisation possible de la seconde loi fondamentale du mouvement, sert depuis près d'un siècle de base permanente à la solution de tous les grands problèmes de dynamique, et doit évidemment désormais recevoir de plus en plus une telle destination, vu l'admirable simplification qu'il apporte dans les recherches les plus difficiles. Or il est clair qu'une semblable manière de procéder oblige nécessairement à traiter à son tour la statique par une méthode directe, sans la déduire de la dynamique, qui ainsi est, au contraire, entièrement fondée sur elle. Ce n'est pas qu'il y ait, à proprement parler, aucun véritable cercle vicieux à persister encore dans la marche ordinaire exposée ci-dessus, puisque la partie élémentaire de la dynamique, sur laquelle seule on a fait reposer la statique, se trouve, en réalité, être complétement distincte de celle qu'on ne peut traiter qu'en la réduisant à la statique. Mais il n'en est pas moins évident que l'ensemble de la mécanique rationnelle ne présente alors, en procédant ainsi, qu'un caractère philosophique peu satisfaisant, à cause de l'alternative fréquente entre le point de vue statique et le point de vue dynamique. En un mot, la science, mal coordonnée, se trouve, par là, manquer essentiellement d'unité.

L'adoption définitive et l'usage universel du principe de d'Alembert rendaient donc indispensable aux progrès futurs de l'esprit humain une refonte radicale du système entier de la mécanique rationnelle, où, la statique étant traitée directement d'après une loi primitive d'équilibre suffisamment générale, et la dynamique rappelée à la statique, l'ensemble de la science pût acquérir un caractère d'unité désormais irrévocable. Telle est la révolution éminemment philosophique exécutée par Lagrange dans son admirable traité de *mécanique analytique*, dont la conception fondamentale servira toujours de base à tous les travaux ultérieurs des géomètres sur les lois de l'équilibre et du mouvement, comme nous avons vu la grande idée mère de Descartes devoir diriger indéfiniment toutes les spéculations géométriques.

En examinant les recherches des géomètres antérieurs sur les propriétés de l'équilibre, pour y puiser un principe direct de statique qui pût offrir toute la généralité nécessaire, Lagrange s'est arrêté à choisir le *principe des vitesses virtuelles*, devenu désormais si célèbre par l'usage immense et capital qu'il en a fait. Ce principe, découvert primitivement par Galilée dans le cas de deux forces, comme une propriété générale que manifestait l'équilibre de toutes les machines, avait été, plus tard, étendu par Jean Bernouilli à un nombre quelconque de forces, constituant un système quelconque; et Varignon avait ensuite remarqué expressément l'emploi universel qu'il était possible d'en faire en statique. La combinaison de ce principe avec celui de d'Alembert a conduit Lagrange à concevoir et à traiter la mécanique rationnelle tout entière comme déduite d'un seul théorème fondamental, et à lui donner ainsi le plus haut degré de perfection qu'une science puisse acquérir sous le rapport philosophique, une rigoureuse unité.

Pour concevoir nettement avec plus de facilité le principe général des vitesses virtuelles, il est encore utile de le considérer d'abord dans le simple cas de deux forces, comme l'avait fait Galilée. Il consiste alors en ce que, deux forces se faisant équilibre à l'aide d'une machine quelconque, elles sont entre elles en raison inverse des espaces que parcouraient dans le sens de leurs directions leurs points d'application, si on supposait que le système vînt à prendre un mouvement infiniment petit: ces espaces portent le nom de *vitesses virtuelles*, afin de les distinguer des vitesses réelles qui auraient effectivement lieu si l'équilibre n'existait pas. Dans cet état primitif, ce principe, qu'on peut très-aisément vérifier relativement à toutes les machines connues, présente déjà une grande utilité pratique, vu l'extrême facilité avec

laquelle il permet d'obtenir effectivement la condition mathématique d'équilibre d'une machine quelconque, dont la constitution serait même entièrement inconnue. En appelant *moment virtuel* ou simplement *moment*, suivant l'acception primitive de ce terme parmi les géomètres, le produit de chaque force par sa *vitesse virtuelle*, produit qui, en effet, mesure alors l'effort de la force pour mouvoir la machine, on peut simplifier beaucoup l'énoncé du principe en se bornant à dire que, dans ce cas, les momens des deux forces doivent être égaux et de signe contraire pour qu'il y ait équilibre; le signe positif ou négatif de chaque *moment* est déterminé d'après celui de la vitesse virtuelle, qu'on estimera, conformément à l'esprit ordinaire de la théorie mathématique des signes, positive ou négative selon que, par le mouvement fictif que l'on imagine, la projection du point d'application se trouverait tomber sur la direction même de la force ou sur son prolongement. Cette expression abrégée du principe des vitesses virtuelles est surtout utile pour énoncer ce principe d'une manière générale, relativement à un système de forces tout-à-fait quelconque. Il consiste alors en ce que la somme algébrique des momens virtuels de toutes les forces, estimés suivant la règle précédente, doit être nulle pour qu'il y ait équilibre; et cette condition doit avoir lieu distinctement par rapport à tous les mouvemens élémentaires que le système pourrait prendre en vertu des forces dont il est animé. En appelant P, P', P'', etc., les forces proposées, et, suivant la notation ordinaire de Lagrange, $\delta\rho$, $\delta\rho'$, $\delta\rho''$, etc., les vitesses virtuelles correspondantes, ce principe se trouve immédiatement exprimé par l'équation

$$P\,\delta\rho + P'\,\delta\rho' + P''\,\delta\rho'' + \text{etc.} = 0,$$

ou, plus brièvement,

$$\int P\,\delta\rho = 0,$$

dans laquelle, par les travaux de Lagrange, la mécanique rationnelle tout entière peut être regardée comme implicitement renfermée. Quant à la statique, la difficulté fondamentale de développer convenablement cette équation générale se réduira essentiellement, lorsque toutes les forces dont il faut tenir compte seront bien connues, à une difficulté purement analytique, qui consistera à rapporter, dans chaque cas, d'après les conditions de liaison caractéristiques du système considéré, toutes les variations infiniment petites δp, $\delta p'$, etc., au plus petit nombre possible de variations réellement indépendantes, afin d'annuler séparément les divers groupes de

termes relatifs à chacune de ces dernières variations, ce qui fournit, pour l'équilibre, autant d'équations distinctes qu'il pourrait exister de mouvemens élémentaires vraiment différens par la nature du système proposé. En supposant que les forces soient entièrement quelconques, et qu'elles soient appliquées aux divers points d'un corps solide, qui ne soit d'ailleurs assujetti à aucune condition particulière, on parvient aussi immédiatement et de la manière la plus simple aux six équations générales de l'équilibre rapportées ci-dessus d'après la méthode dynamique. Si le solide, au lieu d'être complétement libre, doit être plus ou moins gêné, il suffit d'introduire au nombre des forces du système les résistances qui en résultent après les avoir convenablement définies, ce qui ne fera qu'ajouter quelques nouveaux termes à l'équation fondamentale. Il en est de même quand la forme du solide n'est point supposée rigoureusement invariable, et qu'on vient, par exemple, à considérer son élasticité. De semblables modifications n'ont d'autre effet, sous le point de vue logique, que de compliquer plus ou moins l'équation des vitesses virtuelles, qui ne cesse point pour cela de conserver nécessairement son entière généralité, quoique ces conditions secondaires puissent quelquefois rendre presqu'inextricables les difficultés purement analytiques que présente la solution effective de la question pro pos

Tant que le théorème des vitesses virtuelles n'avait été conçu que comme une propriété générale de l'équilibre, on avait pu se borner à le vérifier par sa conformité constante avec les lois ordinaires de l'équilibre déjà obtenues autrement, et dont il présentait ainsi un résumé très-utile par sa simplicité et son uniformité. Mais, pour faire de ce théorème fondamental la base effective de toute la mécanique rationnelle, en un mot, pour la convertir en un véritable principe, il était indispensable de l'établir directement sans le déduire d'aucun autre, ou du moins en ne supposant que des propositions préliminaires susceptibles par leur extrême simplicité d'être présentées comme immédiates. C'est ce qu'a si heureusement exécuté Lagrange par son ingénieuse démonstration fondée sur le principe des mouffles et dans laquelle il parvient à prouver généralement le théorème des vitesses virtuelles avec une extrême facilité, en imaginant un poids unique, qui, à l'aide de mouffles convenablement construites, se trouve remplacer simultanément toutes les forces du système. On a successivement proposé depuis quelques autres démonstrations directes et générales du principe des vitesses virtuelles, mais qui, beaucoup plus compliquées que celle

de Lagrange, ne lui sont, en réalité, nullement supérieures quant à la rigueur logique. Pour nous, sous le point de vue philosophique, nous devons regarder ce théorème général comme une conséquence nécessaire des lois fondamentales du mouvement, d'où elle peut être déduite de diverses manières, et qui devient ensuite le point de départ effectif de la mécanique rationnelle tout entière.

L'emploi d'un tel principe ramenant l'ensemble de la science à une parfaite unité, il devient évidemment fort peu intéressant désormais de connaître d'autres principes plus généraux encore, en supposant qu'on puisse en obtenir. On peut donc regarder comme essentiellement oiseuses par leur nature les tentatives qui pourraient être projetées pour substituer quelque nouveau principe à celui des vitesses virtuelles. Un tel travail ne saurait plus perfectionner nullement le caractère philosophique fondamental de la mécanique rationnelle, qui, dans le traité de Lagrange, est aussi fortement coordonnée qu'elle puisse jamais l'être. On n'y pourrait réellement avoir en vue d'autre utilité effective que de simplifier considérablement les recherches analytiques auxquelles la science est maintenant réduite, ce qui doit paraître presque impossible quand on envisage avec quelle admirable facilité le principe des vitesses virtuelles a été adapté par Lagrange à l'application uniforme de l'analyse mathématique.

Telle est donc la manière incomparablement la plus parfaite de concevoir et de traiter la statique, et par suite l'ensemble de la mécanique rationnelle. Dans un ouvrage tel que celui-ci surtout, nous ne pouvions hésiter un seul moment à accorder à cette méthode une préférence éclatante sur tout autre, puisque son principal avantage caractéristique est de perfectionner au plus haut degré la philosophie de cette science. Cette considération doit avoir à nos yeux bien plus d'importance que nous ne pouvons en attribuer en sens inverse aux difficultés propres qu'elle présente encore fréquemment dans les applications, et qui consistent essentiellement dans l'extrême contention intellectuelle qu'elle exige souvent, ce qui peut être regardé comme étant jusqu'à un certain point inhérent à toute méthode très-générale où les questions quelconques sont constamment ramenées à un principe unique. Néanmoins ces difficultés sont assez grandes jusqu'ici pour qu'on ne puisse point encore regarder la méthode de Lagrange comme vraiment élémentaire, de manière à pouvoir dispenser entièrement d'en considérer aucune autre dans un enseignement dogmatique. C'est ce qui m'a déterminé à caractériser d'abord avec quelques développemens la méthode dynamique proprement dite, la seule encore généralement usitée. Mais ces considérations ne peuvent être évidemment que provisoires; les principaux embarras qu'occasione l'emploi de la conception de Lagrange n'ayant réellement d'autre cause essentielle que sa nouveauté. Une telle méthode n'est point indéfiniment destinée sans doute à l'usage exclusif d'un très-petit nombre de géomètres, qui en ont seuls encore une connaissance assez familière pour utiliser convenablement les admirables propriétés qui la caractérisent : elle doit certainement devenir plus tard aussi populaire dans le monde mathématique que la grande conception géométrique de Descartes, et ce progrès général serait vraisemblablement déjà presqu'effectué si les notions fondamentales de l'analyse transcendante étaient plus universellement répandues.

Je ne croirais pas avoir convenablement caractérisé toutes les notions philosophiques essentielles relatives à la statique rationnelle, si je ne faisais maintenant une mention distincte d'une nouvelle conception fort importante, introduite dans la science par M. Poinsot, et que je regarde comme le plus grand perfectionnement qu'ait éprouvé, sous le point de vue philosophique, le système général de la mécanique, depuis la régénération opérée par Lagrange, quoiqu'elle ne soit pas exactement dans la même direction. Il s'agit, comme on voit, de l'ingénieuse et lumineuse théorie des couples, que M. Poinsot a si heureusement créée pour perfectionner directement dans ses conceptions fondamentales la mécanique rationnelle, et dont la portée ne me paraît point avoir été encore suffisamment appréciée par la plupart des géomètres. On sait que ces *couples*, ou systèmes de forces parallèles égales et contraires, avaient à peine été remarqués avant M. Poinsot comme une sorte de paradoxe en statique, et qu'il s'est emparé de cette notion isolée pour en faire immédiatement le sujet d'une théorie fort étendue et entièrement originale relative à la transformation, à la composition et à l'usage de ces groupes singuliers, qu'il a montrés doués de propriétés si remarquables par leur généralité et leur simplicité. Ces propriétés fondamentales consistent essentiellement : 1° sous le rapport de la direction, en ce que l'effet d'un couple dépend seulement de la direction de son plan ou de son axe, et nullement de la position de ce plan, ni de celle du couple dans le plan; 2° quant à l'intensité, en ce que l'effet d'un couple ne dépend proprement ni de la valeur de chacune des forces égales qui le composent, ni du bras de lévier sur lequel elles agissent, mais uniquement du produit de cette force par cette

distance, auquel M. Poinsot a donné avec raison le nom de moment du couple.

En adoptant la méthode dynamique proprement dite pour procéder à la recherche des conditions générales de l'équilibre, M. Poinsot l'a présentée sous un point de vue complétement neuf à l'aide de sa conception des couples, qui l'a considérablement simplifiée et éclaircie. Pour caractériser ici sommairement cette variété de la méthode dynamique, il suffira de concevoir que, en ajoutant en un point quelconque du système deux forces égales à chacune de celles que l'on considère et qui agissent, en sens contraire l'une de l'autre, suivant une droite parallèle à sa direction, on pourra ainsi, sans jamais altérer évidemment l'état du système proposé, le regarder comme remplacé : 1° par un système de forces égales aux forces primitives transportées toutes parallèlement à leurs directions au point unique que l'on aura choisi, et qui, en conséquence, seront généralement réductibles en une seule; 2° par un système de couples ayant pour mesure de leur intensité les momens des forces proposées relativement à ce même point, et dont les plans, passant tous en ce même point, les rendront aussi réductibles généralement à un couple unique. On voit, d'après cela, avec quelle facilité on pourra procéder ainsi à la détermination des relations d'équilibre, puisqu'il suffira de trouver, par les lois connues de la composition des forces convergentes, cette résultante unique, afin d'exprimer qu'elle est nulle; et ensuite, par les lois que M. Poinsot a établies pour la composition des couples, obtenir également ce couple résultant, et l'annuler aussi séparément; car il est clair que, la force et le couple ne pouvant se détruire mutuellement, l'équilibre ne saurait exister qu'en les supposant individuellement nuls.

Il faut, sans doute, reconnaître que cette nouvelle manière de procéder n'est point indispensable pour appliquer la méthode dynamique à la détermination des conditions générales de l'équilibre. Mais, outre l'extrême simplification qu'elle introduit dans une telle recherche, nous devons surtout apprécier, quant aux progrès généraux de la science, la clarté inattendue qu'elle y apporte, c'est-à-dire l'aspect éminemment lucide sous lequel elle présente une partie essentielle de ces conditions d'équilibre, toutes celles qui sont relatives aux *momens* des forces proposées, et qui constituent la plus importante moitié des équations statiques. Ces *momens*, qui n'indiquaient jusqu'alors qu'une considération purement abstraite, artificiellement introduite dans la statique pour faciliter l'expression algébrique des lois de l'équilibre, ont pris désormais une

signification concrète parfaitement distincte, et sont entrés aussi naturellement que les forces elles-mêmes dans les spéculations statiques, comme étant la mesure directe des couples auxquels ces forces donnent immédiatement naissance. On conçoit aisément *à priori* quelle facilité cette interprétation générale et élémentaire doit nécessairement procurer pour la combinaison de toutes les idées relatives à la théorie des momens, comme on en voit déjà d'ailleurs la preuve effective dans l'extension et le perfectionnement de cette importante théorie, par les travaux de M. Poinsot lui-même.

Quelles que soient, en réalité, les qualités fondamentales de la conception de M. Poinsot par rapport à la statique, on doit néanmoins reconnaître, ce me semble, que c'est surtout au perfectionnement de la dynamique qu'elle se trouve, par sa nature, essentiellement destinée; et je crois pouvoir assurer, à cet égard, que cette conception n'a point encore exercé jusqu'ici son influence la plus capitale. Il faut la regarder, en effet, comme directement propre à perfectionner sous un rapport très-important les élémens mêmes de la dynamique générale, en rendant la notion des mouvemens de rotation aussi naturelle, aussi familière, et presqu'aussi simple que celle des mouvemens de translation. Car le couple peut être envisagé comme l'élément naturel du mouvement de rotation, aussi bien que la force l'est du mouvement de translation. Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer plus distinctement cette considération, qui sera convenablement reproduite dans les leçons suivantes. Nous devons seulement concevoir, en thèse générale, qu'un usage bien entendu de la théorie des couples établit la possibilité de rendre l'étude des mouvemens de rotation, qui constitue jusqu'ici la partie la plus compliquée et la plus obscure de la dynamique, aussi élémentaire et aussi nette que l'étude des mouvemens de translation. Nous aurons occasion de constater effectivement plus tard à quel degré de simplicité et de clarté M. Poinsot est parvenu à réduire ainsi diverses propositions essentielles, relatives aux mouvemens de rotation, et qui n'étaient établies avant lui que de la manière la plus pénible et la plus indirecte, principalement en ce qui concerne les propriétés des *aires*, dont il a même sensiblement augmenté l'étendue et régularisé l'application sous divers rapports importans, surtout, en dernier lieu, quant à la détermination de ce qu'on appelle le *plan invariable*.

Pour compléter ces considérations philosophiques sur l'ensemble de la statique, je crois devoir ajouter ici l'indication sommaire d'une dernière notion générale, qu'il me paraît utile d'introduire

dans la théorie de l'équilibre, de quelque manière qu'on ait d'ailleurs jugé convenable de l'établir.

Quand on veut se faire une juste idée de la nature des diverses équations qui expriment les conditions de l'équilibre d'un système quelconque de forces, il est, ce me semble, insuffisant de se borner à constater que l'ensemble de ces équations est indispensable pour l'équilibre, et l'établit inévitablement. Il faut, de plus, pouvoir assigner nettement la signification statique distinctement propre à chacune de ces équations envisagée isolément, c'est-à-dire déterminer avec précision en quoi chacune contribue séparément à la production de l'équilibre, analyse à laquelle on ne s'attache point ordinairement, quoiqu'elle soit, sans doute, importante. Par quelque méthode qu'on procède à l'établissement des équations statiques, il est clair *à priori* que l'équilibre ne peut résulter que de la destruction de tous les mouvemens élémentaires que le corps pourrait prendre en vertu des forces dont il est animé, si ces forces n'avaient point entr'elles les relations nécessaires pour se contrebalancer exactement. Ainsi chaque équation prise à part doit nécessairement anéantir un de ces mouvemens, en sorte que l'ensemble de ces équations produise l'équilibre, par l'impossibilité où se trouve dès-lors le corps de se mouvoir d'aucune manière.