Examinons maintenant sommairement le principe général d'après lequel une telle analyse me semble pouvoir s'opérer dans un cas quelconque.

En considérant le mouvement sous le point de vue le plus positif, comme le simple transport d'un corps d'un lieu dans un autre, indépendamment du mode quelconque suivant lequel il peut être produit, il est évident que tout mouvement doit être envisagé, dans le cas le plus général, comme nécessairement composé à la fois de *translation* et de *rotation*. Ce n'est pas, sans doute, qu'il ne puisse réellement exister de translation sans rotation, ou de rotation sans translation; mais on doit regarder l'un et l'autre cas comme étant d'exception, le cas normal consistant en effet dans la coexistence de ces deux sortes de mouvemens, qui s'accompagnent constamment à moins de conditions particulières très-précises, et par suite fort rares, relativement aux circonstances du phénomène. Cela est tellement vrai, que la seule vérification de l'un de ces mouvemens est habituellement regardée avec raison par les géomètres, qui connaissent toute la portée de cette observation élémentaire, comme un puissant motif, non d'affirmer, mais de présumer très-vraisemblablement l'existence de l'autre. Ainsi, par exemple, la seule connaissance du mouvement de rotation du soleil sur son axe, parfaitement constaté depuis Galilée, serait *à priori* pour un géomètre une preuve presque certaine d'un mouvement de translation de cet astre accompagné de toutes ses planètes, quand même les astronomes n'auraient point commencé déjà à reconnaître effectivement, par des observations directes, la réalité de ce transport, dans un sens encore peu déterminé. Pareillement, c'est d'après une semblable considération qu'on admet communément, avec raison, outre le motif d'analogie, l'existence d'un mouvement de rotation dans les planètes même à l'égard desquelles on n'a point encore pu le constater directement, par cela seul qu'elles ont un mouvement de translation bien connu autour du soleil.

Il résulte de cette première analyse que les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps, sollicité par des forces quelconques, doivent avoir pour objet, les unes de détruire tout mouvement de translation, les autres d'anéantir tout mouvement de rotation. Voyons maintenant, d'après le même point de vue, afin de compléter cet aperçu général, quel doit être *a priori* le nombre des équations de chaque espèce.

Quant à la translation, il suffit de considérer que, pour empêcher un corps de marcher dans un sens quelconque, il faut évidemment l'en empêcher selon trois axes principaux situés dans des plans différens, et qu'on suppose d'ordinaire perpendiculaires entr'eux. En effet, quelle progression serait possible, par exemple, dans un corps qui ne pourrait avancer ni de l'est à l'ouest ou de l'ouest à l'est, ni du nord au sud ou du sud au nord, ni enfin du haut en bas ou du bas en haut? Toute progression dans un autre sens quelconque, pouvant évidemment se concevoir comme composée de progressions partielles correspondantes dans ces trois sens principaux, serait dès lors devenue nécessairement impossible. D'un autre côté, il est clair qu'on ne doit pas considérer moins de trois mouvemens élémentaires indépendans, car le corps pourrait se mouvoir dans le sens d'un des axes, sans avoir aucune translation dans le sens d'aucun des deux autres. On conçoit ainsi que, en général, trois équations de condition seront nécessaires et suffisantes pour établir, dans un système quelconque, l'équilibre de translation; et chacune d'elles sera spécialement destinée à détruire un des trois mouvemens de translation élémentaires que le corps pourrait prendre.

On peut présenter une considération exactement analogue relativement à la rotation : il n'y a de nouvelle difficulté que celle d'apercevoir distinctement une image mécanique plus compliquée. La rotation d'un corps dans un plan ou autour d'un axe quelconque, pouvant toujours se concevoir décomposée en trois rotations élémentaires dans les trois plans coordonnés ou autour des trois axes, il est clair que, pour empêcher toute rotation dans un corps, il faut aussi l'empêcher de tourner séparément par rapport à chacun de ces trois plans ou de ces trois axes. Trois équations sont donc, pareillement, nécessaires et suffisantes pour établir l'équilibre de rotation; et l'on aperçoit, avec la même facilité que dans le cas précédent, la destination mécanique propre à chacune d'elles.

En appliquant l'analyse précédente à l'ensemble des six équations générales rapportées au commencement de cette leçon, pour l'équilibre d'un corps solide animé de forces quelconques, il est aisé de reconnaître que les trois premières sont relatives à l'équilibre de translation, et les trois autres à l'équilibre de rotation. Dans le premier groupe, la première équation empêche la translation suivant l'axe des x, la seconde suivant l'axe des y, et la troisième suivant l'axe des z. Dans le second groupe, la première équation empêche le corps de tourner suivant le plan des x, y, la seconde suivant le plan des x, z, et la troisième suivant le plan des y, z. On conçoit nettement par là comment la coexistence de toutes ces équations établit nécessairement l'équilibre.

Cette décomposition serait encore utile pour réduire, dans chaque cas, les équations d'équilibre au nombre strictement nécessaire, quand on vient à particulariser plus ou moins le système de forces considéré, au lieu de le supposer entièrement quelconque. Sans entrer ici dans aucun détail spécial à ce sujet, il suffira de dire, conformément au point de vue précédent, que, la particularisation du système proposé restreignant plus ou moins les mouvemens possibles, soit quant à la translation, soit quant à la rotation, après avoir d'abord exactement déterminé dans chaque cas, ce qui sera toujours facile, en quoi consiste cette restriction, il faudra supprimer, comme superflues, les équations d'équilibre relatives aux translations ou aux rotations qui ne peuvent avoir lieu, et conserver seulement celles qui se rapportent aux mouvemens restés possibles. C'est ainsi que, suivant la limitation plus ou moins grande du système de forces particulier que l'on considère, il peut, au lieu de six équations nécessaires en général pour l'équilibre, n'en plus subsister que trois, ou deux, ou même une seule, qu'il sera par là facile d'obtenir dans chaque cas.

On doit faire des remarques parfaitement analogues quant aux restrictions de mouvemens qui résulteraient, non de la constitution spéciale du système des forces, mais des gênes plus ou moins étroites auxquelles le corps pourrait être assujetti dans certains cas, et qui produiraient des effets semblables. Il suffirait également alors de voir nettement quels mouvemens sont rendus impossibles par la nature des conditions imposées, et de supprimer les équations d'équilibre qui s'y rapportent, en conservant celles relatives aux mouvemens restés libres. C'est ainsi, par exemple, que, dans le cas d'un système quelconque de forces, on trouverait que les trois dernières équations suffisent pour l'équilibre, si le corps est retenu par un point fixe autour duquel il peut tourner librement en tout sens, tout mouvement de translation étant alors devenu impossible; de même on verrait les équations d'équilibre être au nombre de deux, ou même se réduire à une seule, s'il y avait à la fois deux points fixes, suivant que le corps pourrait ou non glisser le long de l'axe qui les joint; et enfin on arriverait à reconnaître que l'équilibre existe nécessairement sans aucune condition, quelles que soient les forces du système, si le corps solide présente trois points fixes non en ligne droite. Enfin on pourrait encore employer le même ordre de considérations lorsque les points, au lieu d'être rigoureusement fixes, seraient seulement astreints à demeurer sur des courbes ou des surfaces données.

L'esprit de l'analyse que je viens d'esquisser est, comme on le voit, entièrement indépendant de la méthode quelconque d'après laquelle auront été obtenues les opérations de l'équilibre. Mais les diverses méthodes générales sont loin cependant de se prêter avec la même facilité à l'application de cette règle. Celle qui s'y adapte le mieux, c'est incontestablement la méthode statique proprement dite, fondée, comme nous l'avons vu, sur le principe des vitesses virtuelles. On doit mettre, en effet, au nombre des propriétés caractéristiques de ce principe, la netteté parfaite avec laquelle il analyse naturellement le phénomène de l'équilibre, en considérant distinctement chacun des mouvemens élémentaires que permettent les forces du système, et fournissant aussitôt une équation d'équilibre spécialement relative à ce mouvement. La méthode dynamique ne présente point cet avantage important. Il faut reconnaître toutefois que, dans la manière dont M. Poinsot l'a conçue, elle se trouve à cet égard considérablement améliorée, puisque la seule distinction des conditions d'équilibre relatives aux forces et de celles qui concernent les couples, distinction qui s'établit alors nécessairement, réalise par elle-même la détermination séparée entre l'équilibre de translation et l'équilibre de rotation. Mais la méthode dynamique ordinaire, exclusivement

usitée en statique avant la réforme de M. Poinsot, et que j'ai caractérisée dans son ensemble au commencement de cette leçon, ne remplit nullement cette condition essentielle, sans laquelle néanmoins il me paraît impossible de concevoir nettement l'expression analytique des lois générales de l'équilibre.

Après avoir considéré les diverses manières principales de parvenir aux lois exactes de l'équilibre abstrait pour un système quelconque des forces, en supposant les corps dans cet état complétement passif que nous avions d'abord reconnu, quoique purement hypothétique, être strictement indispensable à l'établissement des principes fondamentaux de la mécanique rationnelle; nous devons maintenant examiner comment les géomètres ont pu tenir compte des propriétés générales naturelles aux corps réels, et auxquelles il faut nécessairement avoir égard dans toute application effective de la mécanique abstraite. La seule que l'on sache jusqu'ici prendre en considération d'une manière vraiment complète, c'est la pesanteur terrestre. Voyons comment on a pu l'introduire, en effet, dans les équations statiques. Cet important examen constitue, sans doute, dans l'ordre strictement logique de nos études philosophiques, une anticipation vicieuse sur la partie de ce cours relative à la physique proprement dite, où nous envisagerons spécialement la science de la pesanteur. Mais la théorie des centres de gravité, à laquelle se réduit essentiellement cette étude statique de la pesanteur terrestre, joue un rôle trop étendu et trop important dans toutes les parties de la mécanique rationnelle, pour que nous puissions nous dispenser de l'indiquer ici, à l'exemple de tous les géomètres, quoique ce ne soit pas strictement régulier. Du reste, je dois faire observer à ce sujet qu'on éviterait presqu'entièrement tout ce qu'il y a vraiment d'irrationnel dans cette disposition scientifique, sans se priver néanmoins des avantages capitaux que présente la résolution préalable d'une telle question, si on contractait l'habitude de classer la théorie des centres de gravité parmi les recherches de pure géométrie, comme je l'ai proposé à la fin de la treizième leçon.

Pour tenir compte de la pesanteur terrestre, dans les questions statiques, il suffit, comme on sait, de se représenter, sous ce rapport, chaque corps homogène comme un système de forces parallèles et égales, appliquées à toutes les molécules du corps, et dont il faut déterminer complétement la résultante, qu'on introduira dès lors sans aucune difficulté parmi les forces extérieures primitives. En réalité, ce parallélisme et cette égalité des pesanteurs moléculaires ne sont effectivement que des approximations, puisque, de fait, toutes ces forces concourraient au centre de la terre si cette planète était rigoureusement sphérique, et que leur intensité absolue, indépendamment des inégalités qui tiennent à la force centrifuge produite par le mouvement de rotation de la terre, varie en raison inverse des carrés des distances des molécules correspondantes au centre de notre globe. Mais, quand il ne s'agit que des masses terrestres à notre disposition, auxquelles sont ordinairement destinées ces applications de la statique, les dimensions n'en sont jamais assez grandes pour que le défaut de parallélisme et d'égalité entre les pesanteurs des diverses molécules de chaque masse, doive être réellement pris en considération. On suppose donc alors, avec raison, toutes ces forces rigoureusement parallèles et égales, ce qui simplifie extrêmement la question de leur composition. En effet, leur résultante est, dès ce moment, égale à leur somme, et agit suivant une droite parallèle à leur direction commune, en sorte que son intensité et sa direction sont immédiatement connues. Toute la difficulté se réduit donc à trouver son point d'application, c'est-à-dire ce qu'on appelle le *centre de gravité* du corps. D'après les propriétés générales du point d'application de la résultante dans un système quelconque de forces parallèles, la distance de ce point à un plan quelconque est égale à la somme des momens de de toutes les forces du système par rapport à ce même plan, divisée par la somme de ces forces elles-mêmes. En appliquant cette formule au centre de gravité, et ayant égard à la simplification que produit alors l'égalité de toutes les forces proposées, on trouve que la distance du centre de gravité à un plan quelconque est égale à la somme des distances de tous les points du corps considéré, divisée par le nombre de ces points; c'est-à-dire, que cette distance est, ce ce qu'on appelle proprement la moyenne arithmétique entre les distances de tous les points proposés. Cette considération fondamentale réduit évidemment la notion du centre de gravité à être purement géométrique, puisqu'en le cherchant ainsi comme *centre des moyennes distances*, suivant la dénomination très-rationnelle des anciens géomètres, la question ne conserve plus aucune trace de son origine mécanique, et consiste seulement dans ce problème de géométrie générale: Étant donné un système quelconque de points disposés entr'eux d'une manière déterminée, trouver un point dont la distance à un plan quelconque soit moyenne entre les distances de tous les points donnés à ce même plan. Il y aurait, comme je l'ai déjà indiqué, des avantages impor-

tans à concevoir habituellement ainsi la notion générale du centre de gravité, en faisant complétement abstraction de toute considération de pesanteur, car cette idée simple et purement géométrique est précisément celle qu'on doit s'en former dans la plupart des théories principales de la mécanique rationnelle, surtout quand on envisage les grandes propriétés dynamiques du centre des moyennes distances, où l'idée hétérogène et surabondante de la gravité introduit ordinairement une complication et une obscurité vicieuses. Cette manière de concevoir la question conduit naturellement, il est vrai, à l'exclure de la mécanique pour la faire rentrer dans la géométrie, comme je l'ai proposé. Si je ne l'ai pas ainsi classée effectivement, c'est uniquement afin de ne m'écarter que le moins possible des habitudes universellement reçues, quoique je fusse très-convaincu qu'une telle transposition serait la seule disposition vraiment rationnelle. Quoi qu'il en soit de cette discussion d'ordre, ce qui importe essentiellement c'est de ne point se méprendre sur la véritable nature de la question, à quelqu'époque et sous quelque dénomination qu'on juge convenable de la traiter.

La seule définition géométrique du centre de gravité donnerait immédiatement le moyen de le déterminer, si le système des points que l'on considère n'était composé que d'un nombre fini de points isolés, car il en résulterait directement alors des formules très-simples et qui n'auraient nullement besoin d'être transformées pour exprimer les coordonnées du point cherché, relativement à trois axes rectangulaires fixes arbitrairement. Mais ces formules fondamentales ne peuvent plus être employées sans transformation, aussitôt qu'il s'agit d'un système composé d'une infinité de points formant un véritable corps continu, ce qui est le cas ordinaire. Car le numérateur et le dénominateur de chaque formule devenant dès lors simultanément infinis, ces formules n'offrent plus aucune signification distincte, et ne sauraient être appliquées qu'après avoir été convenablement transformées. C'est dans cette transformation générale que consiste, sous le rapport analytique, toute la difficulté fondamentale de la question du centre de gravité envisagée sous le point de vue le plus étendu. Or il est clair que le calcul intégral donne immédiatement les moyens de la surmonter, puisque ces deux sommes infinies qui constituent les deux termes de chaque formule, sont évidemment par elles-mêmes de véritables intégrales, dont celle qui exprime le dénominateur commun des trois formules se rapporte aux

élémens géométriques infiniment petits de la masse considérée, et celle qui représente le numérateur propre à chaque formule se rapporte aux produits de ces élémens par leurs coordonnées correspondantes. Il suit de là, pour ne considérer ici que le cas le plus général, qu'en décomposant le corps seulement en élémens infiniment petits dans deux sens par deux séries de plans infiniment rapprochés parallèles les uns au plan des x, z, les autres au plan des y, z, on trouvera aussitôt les formules fondamentales,

$$x_1 = \frac{\iint xz\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}, \quad y_1 = \frac{\iint yz\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}, \quad z_1 = \frac{1}{2}\frac{\iint z^2\,dx\,dy}{\iint z\,dy\,dx}$$

qui feront connaître les trois coordonnées du centre de gravité du volume d'un corps homogène de forme quelconque, limité par une surface dont l'équation en x, y, et z, est supposée donnée. On obtiendra de la même manière, pour le centre de gravité de la surface seule de ce corps, les formules

$$x_1 = \frac{\iint x\,dx\,dy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}$$

$$y_1 = \frac{\iint y\, dx\, dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dx\, dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}$$

$$z_1 = \frac{\iint z\, dx\, dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dx\, dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}$$

La détermination des centres de gravité sera donc réduite ainsi, dans chaque cas particulier, à des recherches purement analytiques, tout-à-fait analogues à celles qu'exigent, comme nous l'avons vu, les quadratures et les cubatures. Seulement, ces intégrations étant, en général, plus compliquées, l'état d'extrême imperfection dans lequel se trouve jusqu'ici le calcul intégral permettra bien plus rarement encore de parvenir à une solution définitive. Mais ces formules générales n'en ont pas moins, par elles-mêmes, une importance capitale, pour introduire la considération du centre de gravité dans les théories générales de la mécanique analytique, ainsi que nous aurons spécialement occasion de le reconnaître bientôt. Il faut d'ailleurs considérer, quant à la question même, que ces formules éprouvent de très-grandes simplifications, quand on vient à supposer que la surface qui termine le corps proposé est

une surface de révolution, ce qui heureusement a lieu dans la plupart des applications vraiment importantes.

Telle est donc essentiellement la manière de tenir compte de la pesanteur terrestre dans les applications de la statique abstraite. Quant à la pesanteur universelle, on peut dire que jusqu'ici elle n'a été prise en considération d'une manière vraiment complète, que relativement aux corps sphériques. Ce n'est pas que, lorsque la loi de la gravitation est supposée connue, et surtout en la concevant inversement proportionnelle au carré de la distance, comme dans la véritable pesanteur universelle, on ne puisse aisément construire, à l'aide d'intégrales convenables, des formules qui expriment l'attraction d'un corps de figure et de constitution quelconques sur un point donné, et même sur un autre corps. Mais ces expressions symboliques générales sont demeurées jusqu'ici le plus souvent inapplicables, faute de pouvoir effectuer les intégrations qu'elles indiquent, même quand on suppose, pour simplifier la question, que chaque corps est homogène. Ce n'est encore que par une approximation fort imparfaite qu'on a pu parvenir à la détermination définitive dans le cas très-simple de l'attraction de deux ellipsoïdes, et les approximations n'ont pu être conduites jusqu'au degré de précision convenable, qu'en supposant ces ellipsoïdes très-peu différens de la sphère, ce qui a lieu heureusement pour toutes nos planètes. Il faut d'ailleurs considérer que, dans la réalité, ces formules supposent la connaissance préalable de la loi de la densité à l'intérieur de chaque corps proposé, ce que nous ignorons jusqu'ici complétement.

Dans l'état présent de cette importante et difficile théorie, on peut dire que les théorêmes primitifs de Newton sur l'attraction des corps sphériques constituent effectivement encore la partie la plus utile de cet ordre de notions. Ces propriétés si remarquables, et que Newton a si simplement établies, consistent, comme on sait, en ce que 1° l'attraction d'une sphère dont toutes les molécules attirent en raison inverse du carré de la distance, est la même, sur un point extérieur quelconque, que si la masse entière de cette sphère était toute condensée à son centre; 2° quand un point est placé dans l'intérieur d'une sphère dont les molécules agissent sur lui suivant cette même loi, il n'éprouve absolument aucune attraction de la part de toute la portion du globe qui se trouve à une plus grande distance que lui du centre, du moins, en supposant, si le globe n'est pas homogène, que chacune de ses couches sphériques concentriques présente en tous ses points la même densité.

La pesanteur est la seule force naturelle dont nous sachions réellement tenir compte en statique rationnelle : encore voit-on combien cette étude est encore peu avancée par rapport à la gravité universelle. Quant aux circonstances extérieures générales, dont on a dû également faire d'abord complétement abstraction pour établir les lois rationnelles de la mécanique, comme le frottement, la résistance des milieux, etc., on peut dire que nous ne connaissons encore nullement la manière de les introduire dans les relations fondamentales données par la mécanique analytique, car on n'y est parvenu jusqu'ici qu'à l'aide d'hypothèses fort précaires, et même évidemment inexactes, qui ne peuvent être réellement considérées, dans le plus grand nombre des cas, que comme propres à fournir des exercices de calcul. Du reste, nous devrons naturellement revenir sur ce sujet dans la partie de ce cours relative à la physique proprement dite.

Pour compléter l'examen philosophique de l'ensemble de la statique, il nous reste enfin à considérer sommairement la manière générale d'établir la théorie de l'équilibre, lorsque le corps auquel les forces sont appliquées est supposé se trouver à l'état fluide, soit liquide, soit gazeux.

L'hydrostatique peut être complétement traitée d'après deux méthodes générales parfaitement distinctes, suivant qu'on cherche directement les lois de l'équilibre des fluides d'après des considérations statiques exclusivement propres à cette classe de corps, ou qu'on se borne à les déduire simplement des principes fondamentaux qui ont déjà fourni les équations statiques des corps solides, en ayant seulement égard, comme il convient, aux nouvelles conditions caractéristiques qui résultent de la fluidité.

La première méthode a dû naturellement commencer par être la seule employée, comme étant primitivement la plus facile, sinon la plus rationnelle. Tel a été effectivement le caractère des travaux des géomètres du dix-septième et du dix-huitième siècle sur cette importante section de la mécanique générale. Divers principes statiques particuliers aux fluides, et plus ou moins satisfaisans, ont été successivement proposés, principalement à l'occasion de la célèbre question dans laquelle les géomètres se proposaient de déterminer *à priori* la véritable figure de la terre, supposée originairement toute fluide, question capitale qui, envisagée dans son ensemble, se rattache en effet, directement ou indirectement, à toutes les théories essentielles de l'hydrostatique. On sait que Huyghens avait d'abord essayé de la résoudre, en prenant pour principe d'équi-

libre la perpendicularité évidemment nécessaire de la pesanteur à la surface libre du fluide. Newton de son côté avait, à la même époque, choisi pour considération fondamentale la nécessité non moins évidente de l'égalité de poids entre les deux colonnes fluides allant du centre, l'une au pôle, l'autre à un point quelconque de l'équateur. Bouguer, en discutant plus tard cette importante question, montra clairement que ces deux manières de procéder étaient également vicieuses, en ce que le principe d'Huyghens et celui de Newton, bien que tous deux incontestables, ne s'accordaient point, dans un grand nombre de cas, à donner la même forme à la masse fluide en équilibre, ce qui mettait pleinement en évidence leur insuffisance commune. Mais Bouguer se trompa gravement à son tour, en croyant que la réunion de ces deux principes, lorsqu'ils s'accordaient à indiquer une même figure, était entièrement suffisante pour l'équilibre. Clairaut, dans son immortel traité *de la figure de la terre*, découvrit, le premier, les véritables lois générales de l'équilibre d'une masse fluide, en partant de la considération évidente de l'équilibre isolé d'un canal quelconque infiniment petit; et, d'après ce *criterium* infaillible, il montra qu'il pouvait exister une infinité de cas dans lesquels la combinaison exigée par Bouguer se trouvait observée sans que cependant l'équilibre eût lieu. Depuis que l'ouvrage de Clairaut eut fondé dans son ensemble l'hydrostatique rationnelle, plusieurs grands géomètres, continuant à adopter la même manière générale de procéder, s'occupèrent d'établir la théorie mathématique de l'équilibre des fluides sur des considérations plus naturelles et plus distinctes que celle employée par son illustre inventeur. On doit principalement distinguer, à cet égard, les travaux de Maclaurin et surtout ceux d'Euler, qui ont donné à cette théorie fondamentale la forme simple et régulière qu'elle a maintenant dans tous les traités ordinaires, en la fondant sur le principe de l'égalité de pression en tout sens, qu'on peut regarder comme une loi générale indiquée par l'observation relativement à la constitution statique des fluides. Ce principe est incontestablement, en effet, le plus convenable qu'on puisse employer dans une telle recherche, lorsqu'on veut traiter directement par quelque considération propre aux fluides la théorie de leur équilibre, dont il fournit immédiatement les équations générales avec une extrême facilité. Il suffit alors, pour les obtenir le plus simplement possible, après avoir conçu la masse fluide partagée en molécules cubiques par trois séries de plans infiniment rapprochés, parallèles aux trois plans coordonnés, d'exprimer que cha-

que molécule est également pressée suivant les trois axes perpendiculaires à ses faces par l'ensemble des forces du système, la pression de la molécule en chaque sens étant égale à la différence des pressions exercées sur les deux faces opposées correspondantes. On trouve ainsi que la loi mathématique de l'équilibre d'un fluide quelconque, par quelques forces qu'il soit sollicité, est exprimée par les trois équations :

$$\frac{dP}{dx}=pX,\ \frac{dP}{dy}=pY,\ \frac{dP}{dz}=pZ,$$

où P exprime la pression supportée par la molécule dont les coordonnées sont x, y, z, et la densité ou pesanteur spécifique p, et X, Y, Z, désignent les composantes totales des forces dont le fluide est animé suivant les trois axes coordonnés. Comme on peut évidemment déduire, de l'ensemble de ces trois équations, la formule

$$P=\int p\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

pour la détermination de la pression en chaque point, quand les forces seront connues ainsi que la loi de la densité, il est possible de donner une autre forme analytique à la loi générale de l'équilibre des fluides, en se bornant à dire que la fonction différentielle, placée ici sous le signe S, doit satisfaire aux conditions connues d'intégrabilité relativement aux trois variables indépendantes x, y, z, ce qui est précisément l'expression très-simple trouvée primitivement par Clairaut quant à la théorie mathématique de l'hydrostatique.

L'étude de l'équilibre des fluides donne constamment lieu à une nouvelle question générale fort importante qui leur est propre, celle qui consiste à déterminer, dans le cas d'équilibre, la figure de la surface qui limite la masse fluide. La solution abstraite de cette question est implicitement comprise dans la formule fondamentale précédente, puisqu'il suffit évidemment de supposer que la pression est nulle ou du moins constante, pour caractériser les points de la surface, ce qui donne indistinctement

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

quant à l'équation différentielle générale de cette surface. Toute la difficulté concrète se réduit donc essentiellement, en chaque cas, à connaître la loi réelle relative à la variation de la densité dans l'intérieur de la masse fluide proposée, à moins qu'elle ne soit homogène, détermination qui présente des obstacles tout-à-fait insurmontables dans les applications les plus importantes. Si l'on en fait abstraction, la question ne présente dès lors qu'une recherche analytique plus ou moins compliquée, consistant dans l'intégra-

tion, le plus souvent encore inconnue, de l'équation précédente. On doit remarquer d'ailleurs que cette équation est, par sa nature, assez générale pour qu'on puisse l'appliquer même à l'équilibre d'une masse fluide qui serait animée d'un mouvement de rotation déterminé, comme l'exige surtout la grande question de la figure des planètes. Il suffit alors en effet de comprendre, parmi les forces du système proposé, les forces centrifuges qui résultent de ce mouvement de rotation.

Telle est, par aperçu, la manière générale d'établir la théorie mathématique de l'équilibre des fluides, en la fondant directement sur des principes statiques particuliers à ce genre de corps. On conçoit, comme je l'ai déjà indiqué, que cette méthode ait dû d'abord être seule employée; car, à l'époque des premières recherches, les différences caractéristiques entre les solides et les fluides devaient nécessairement paraître trop considérables pour qu'aucun géomètre pût alors se proposer d'appliquer à ceux-ci les principes généraux uniquement destinés aux autres, en ayant seulement égard, dans cette déduction, à quelques nouvelles conditions spéciales. Mais, quand les lois fondamentales de l'hydrostatique ont enfin été obtenues, et que l'esprit humain, cessant d'être préoccupé de la difficulté de leur établissement, a pu mesurer avec justesse la diversité réelle qui existe entre la théorie des fluides et celle des solides, il était impossible qu'il ne cherchât point à les ramener toutes deux aux mêmes principes essentiels, et qu'il ne reconnût pas, en thèse générale, l'applicabilité nécessaire des règles fondamentales de la statique à l'équilibre des fluides, pourvu qu'on tînt compte convenablement de la variabilité de forme qui les caractérise. En un mot, la science ne pouvait rester sous ce rapport dans son état primitif, où l'on accordait une importance évidemment exagérée aux conditions propres aux fluides. Mais, pour subordonner l'hydrostatique à la statique proprement dite, et augmenter ainsi par une plus grande unité la perfection rationnelle de la science, il était indispensable que la théorie abstraite de l'équilibre fût préalablement traitée d'après un principe statique suffisamment général, qui seul pouvait être directement appliqué aux fluides aussi bien qu'aux solides, car on ne pouvait point recourir, à cet effet, aux équations d'équilibre proprement dites, dans la formation desquelles on avait toujours eu, nécessairement, plus ou moins égard à l'invariabilité du système. Cette condition inévitable a été remplie, lorsque Lagrange a conçu la manière de fonder la statique, et par suite toute la mécanique rationnelle, sur

le seul principe des vitesses virtuelles. Ce principe est évidemment, en effet, par sa nature, tout aussi directement applicable aux fluides qu'aux solides, et c'est là une de ses propriétés les plus précieuses. Dès lors l'hydrostatique, philosophiquement classée à son rang naturel, n'a plus été, dans le traité de Lagrange, qu'une division secondaire de la statique. Quoique cette manière de la concevoir n'ait pas encore pu devenir suffisamment familière, et que la méthode hydrostatique directe soit restée jusqu'ici la seule usuelle, il n'est pas douteux que la méthode de Lagrange finira par être habituellement et exclusivement adoptée, comme étant celle qui imprime à la science son véritable caractère définitif, en la faisant dériver tout entière d'un principe unique.

Pour se représenter nettement, en général, comment le principe des vitesses virtuelles peut conduire aux équations fondamentales de l'équilibre des fluides, il suffit de considérer que tout ce qu'une telle application exige de particulier consiste seulement à comprendre parmi les forces quelconques du système une force nouvelle, la pression exercée sur chaque molécule, qui introduira un terme de plus dans l'équation générale, ou, plus exactement, qui donnera lieu à trois nouveaux momens virtuels, si l'on distingue, comme il convient, les variations séparément relatives à chacun des trois axes coordonnés. En procédant ainsi, on parviendra immédiatement aux trois équations générales de l'équilibre des fluides, qui ont été rapportées ci-dessus d'après la méthode hydrostatique proprement dite. Si le fluide considéré est liquide, il faudra concevoir le système assujéti à cette condition caractéristique de pouvoir changer de forme, sans cependant jamais changer de volume. Cette condition d'incompressibilité s'introduira d'autant plus naturellement dans l'équation générale des vitesses virtuelles, qu'elle peut s'exprimer immédiatement, comme l'a fait Lagrange, par une formule analytique analogue à celle des termes de cette équation, en exprimant que la variation du volume est nulle, ce qui même a permis à Lagrange de se représenter abstraitement cette incompressibilité comme l'effet d'une certaine force nouvelle, dont il suffit d'ajouter le moment virtuel à ceux des forces du système. Si l'on veut établir, au contraire, la théorie de l'équilibre pour les fluides gazeux, il faudra remplacer la condition de l'incompressibilité par celle qui assujétit le volume du fluide à varier suivant une fonction déterminée de la pression, par exemple en raison inverse de cette pression, conformément à la loi physique sur laquelle Mariotte a fondé toute la mécanique des

gaz. Cette nouvelle circonstance donnera lieu à une équation analogue à celle des liquides, quoique plus compliquée. Seulement cette dernière section de la théorie générale de l'équilibre, outre les grandes difficultés analytiques qui lui sont propres, se ressentira nécessairement, dans les applications, de l'incertitude où l'on est encore sur la véritable loi des gaz relativement à la fonction de la pression qui exprime réellement la densité, car la loi de Mariotte, si précieuse par son extrême simplicité, ne peut malheureusement être regardée que comme une approximation, qui, suffisamment exacte pour des circonstances moyennes, ne saurait être étendue rigoureusement à un cas quelconque.

Tel est le caractère fondamental de la méthode incontestablement la plus rationnelle qu'on puisse employer pour former la théorie abstraite de l'équilibre des fluides, et que nous devons regarder, surtout dans cet ouvrage, comme constituant désormais la conception définitive de l'hydrostatique. Cette conception paraîtra d'autant plus philosophique que, dans la statique ainsi traitée, on trouve une suite de cas en quelque sorte intermédiaires entre les solides et les fluides, lorsqu'on considère les questions relatives aux corps solides susceptibles de changer de forme jusqu'à un certain degré d'après des lois déterminées, c'est-à-dire quand on tient compte de la flexibilité et de l'élasticité, ce qui établit, sous le rapport analytique, une filiation naturelle qui fait passer, par une succession de recherches presqu'insensible, des systèmes dont la forme est rigoureusement invariable à ceux où elle est au contraire éminemment variable.

Après avoir examiné sommairement comment la statique rationnelle, envisagée dans son ensemble, a pu être élevée enfin à ce haut degré de perfection spéculative où toutes les questions qu'elle est susceptible de présenter, constamment traitées d'après un principe unique directement établi, sont uniformément réduites à de simples problèmes d'analyse mathématique, nous devons maintenant entreprendre la même étude relativement à la dernière branche de la mécanique générale, nécessairement plus étendue, plus compliquée, et par suite plus difficile, celle qui a pour objet la théorie du mouvement. Ce sera le sujet de la leçon suivante.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de la dynamique.

L'objet essentiel de la dynamique consiste, comme nous l'avons vu, dans l'étude des mouvemens variés produits par les forces *continues*, la théorie des mouvemens uniformes dus aux forces *instantanées* n'étant entièrement qu'une simple conséquence immédiate des trois lois fondamentales du mouvement. Dans cette dynamique des mouvemens variés ou des forces continues on distingue ordinairement et avec raison deux cas généraux, suivant qu'on considère le mouvement d'un point ou celui d'un corps. Sous le point de vue le plus positif, cette distinction revient à concevoir que, dans certains cas, toutes les parties du corps prennent exactement le même mouvement, en sorte qu'il suffit alors en effet de déterminer le mouvement d'une seule molécule, chacune se mouvant comme si elle était isolée, sans aucun égard aux conditions de liaison du