dire quand on tient compte de la flexibilité et de l'élasticité, ce qui établit, sous le rapport analytique, une filiation naturelle qui fait passer, par une succession de recherches presqu'insensible, des systèmes dont la forme est rigoureusement invariable à ceux où elle est au contraire éminemment variable.

Après avoir examiné sommairement comment la statique rationnelle, envisagée dans son ensemble, a pu être élevée enfin à ce haut degré de perfection spéculative où toutes les questions qu'elle est susceptible de présenter, constamment traitées d'après un principe unique directement établi, sont uniformément réduites à de simples problèmes d'analyse mathématique, nous devons maintenant entreprendre la même étude relativement à la dernière branche de la mécanique générale, nécessairement plus étendue, plus compliquée, et par suite plus difficile, celle qui a pour objet la théorie du mouvement. Ce sera le sujet de la leçon suivante.



## DIX-SEPTIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Vue générale de la dynamique.

L'objet essentiel de la dynamique consiste, comme nous l'avons vu, dans l'étude des mouvemens variés produits par les forces *continues*, la théorie des mouvemens uniformes dus aux forces *instantanées* n'étant entièrement qu'une simple conséquence immédiate des trois lois fondamentales du mouvement. Dans cette dynamique des mouvemens variés ou des forces continues on distingue ordinairement et avec raison deux cas généraux, suivant qu'on considère le mouvement d'un point ou celui d'un corps. Sous le point de vue le plus positif, cette distinction revient à concevoir que, dans certains cas, toutes les parties du corps prennent exactement le même mouvement, en sorte qu'il suffit alors en effet de déterminer le mouvement d'une seule molécule, chacune se mouvant comme si elle était isolée, sans aucun égard aux conditions de liaison du système; tandis que, dans le cas le plus général, chaque portion du corps ou chaque corps du système prenant un mouvement distinct, il faut examiner ces divers effets et connaître l'influence qu'exercent sur eux les relations qui caractérisent le système considéré. La seconde théorie étant évidemment plus compliquée que la première, c'est par celle-ci qu'il convient nécessairement de commencer l'étude spéciale de la dynamique, même quand on les déduit toutes deux de principes uniformes. Tel est aussi l'ordre que nous adopterons ici dans l'indication de nos considérations philosophiques.

Relativement au mouvement d'un point, nous savons déjà que la question générale consiste à déterminer exactement toutes les circonstances du mouvement curviligne composé, résultant de l'action simultanée de diverses forces continues quelconques, en supposant entièrement connu le mouvement rectiligne que prendrait le mobile sous l'influence exclusive de chaque force envisagée isolément. Nous avons également constaté que ce problème était susceptible, comme tout autre, d'être considéré en sens inverse, lorsqu'on se proposait, au contraire, de découvrir par quelles forces le corps est sollicité, d'après les circonstances caractéristiques directement connues du mouvement composé.



Mais, avant d'entrer dans l'examen philosophique de ces deux questions générales, nous devons d'abord arrêter notre attention sur une théorie préliminaire fort importante, celle du mouvement varié envisagé en lui-même, c'est-à-dire conformément à l'expression ordinaire, la théorie du mouvement rectiligne produit par une seule force continue, agissant indéfiniment selon la même direction. Cette théorie élémentaire est indispensable pour établir les notions fondamentales qui se reproduisent sans cesse dans toutes les parties de la dynamique. Voici en quoi elle consiste essentiellement, d'après notre manière de concevoir la mécanique rationnelle.

Nous avons précédemment remarqué que, dans la question dynamique directe, il fallait nécessairement supposer connu l'effet de chaque force unique, la véritable inconnue du problème général étant l'effet déterminé par le concours de toutes les forces. Cette observation est incontestable. Mais, d'après cela, quel peut être l'objet de cette partie préliminaire de la dynamique qu'on destine à l'étude du mouvement résultant de l'action d'une seule force continue? La contradiction apparente ne tient qu'aux expressions peu exactes qu'on emploie ordinairement, et d'après lesquelles une telle question semblerait aussi distincte et aussi directe que les véritables questions dynamiques, tandis qu'elle n'est réellement qu'un préliminaire. Pour en concevoir nettement le vrai caractère, il faut observer que le mouvement varié produit par une seule force continue peut être défini de plusieurs manières, qui dépendent les unes des autres, et qui, par conséquent, ne sauraient jamais être données simultanément, quoique chacune puisse être séparément la plus convenable, d'où résulte la nécessité de savoir passer, en général, de l'une quelconque d'entre elles à toutes les autres : c'est dans ces transformations que consiste proprement la théorie générale préliminaire du mouvement varié, désignée fort inexactement sous le nom d'étude de l'action d'une force unique. Ces diverses définitions équivalentes d'un même mouvement varié résultent de la considération simultanée des trois fonctions fondamentales distinctes, quoique co-relatives, qu'on y peut envisager, l'espace, la vitesse et la force, conçus comme dépendant du temps écoulé. La loi du mouvement peut être immédiatement donnée par la relation entre l'espace parcouru et le temps écoulé, et alors il importe d'en déduire la *vitesse acquise* par le mobile à chaque instant, c'est-à-dire celle du mouvement uniforme qui aurait lieu si, la force continue cessant tout à coup d'agir, le corps ne se mouvait plus qu'en vertu de l'impulsion naturelle résultant, d'après



la loi d'inertie, du mouvement déjà effectué : il est également intéressant de déterminer aussi quelle est, à chaque instant, l'intensité de la force continue, comparée à celle d'une force accélératrice constante bien connue, telle, par exemple, que la gravité terrestre, la seule force de ce genre qui nous soit assez familière pour servir habituellement de type convenable. Dans d'autres occasions, au contraire, le mouvement pourra être naturellement défini par la loi qui règle la variation de la vitesse en raison du temps, et d'où il faudra conclure celle relative à l'espace, ainsi que celle qui concerne la force. Il en serait de même si la définition primitive du mouvement consistait dans la loi de la force continue, qui pourrait n'être pas toujours immédiatement donnée en fonction du temps, mais quelquefois par rapport à l'espace, comme par exemple lorsqu'il s'agit de la gravitation universelle, ou d'autres fois relativement à la vitesse, ainsi qu'on le voit pour la résistance des milieux. Enfin, si l'on considère cet ordre de questions sous le point de vue le plus étendu, il faut concevoir, en général, que la définition d'un mouvement varié peut être donnée par une équation quelconque, pouvant contenir à la fois ces quatre variables dont une seule est indépendante, le temps, l'espace, la vitesse, et la force ; le problème consistera à déduire de cette équation la détermination distincte des trois lois caractéristiques relatives à l'espace, à la vitesse et à la force, en fonction du temps, et, par suite, en corélation mutuelle. Ce problème général se réduit constamment à une recherche purement analytique, à l'aide des deux formules dynamiques fondamentales qui expriment, en fonction du temps, la vitesse et la force, quand on suppose connue la loi relative à l'espace.

La méthode infinitésimale conduit à ces deux formules avec la plus grande facilité. Il suffit en effet, pour les obtenir, de considérer, suivant l'esprit de cette méthode, le mouvement comme uniforme pendant la durée d'un même intervalle de temps infiniment petit, et comme uniformément accéléré pendant deux intervalles consécutifs. Dès lors, la vitesse, supposée momentanément constante, d'après la première considération, sera naturellement exprimée par la différentielle de l'espace divisée par celle du temps; et, de même, la force continue, d'après la seconde considération, sera évidemment mesurée par le rapport entre l'accroissement infiniment petit de la vitesse, et le temps employé à produire cet accroissement. Ainsi, en appelant $t$ le temps écoulé, $e$ l'espace parcouru, $v$ la vitesse acquise et $\varphi$ l'intensité de la force continue à chaque instant, la corrélation générale et néces-



saire de ces quatre variables simultanées sera exprimée analytiquement par les deux formules fondamentales,

$$v = \frac{de}{dt} \qquad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2}.$$

D'après ces formules, toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations, ou, le plus souvent, dans des intégrations. En considérant le cas le plus général, où la définition primitive du mouvement proposé serait donnée seulement par une équation entre les quatre variables, le problème analytique consistera dans l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, relative à la fonction $e$, et qui pourra être fréquemment inexécutable, vu l'extrême imperfection actuelle du calcul intégral.

La conception fondamentale de Lagrange, relativement à l'analyse transcendante, l'ayant nécessairement obligé à se priver des facilités qu'offre l'emploi de la méthode infinitésimale pour l'établissement des deux formules dynamiques précédentes, il a été conduit à présenter cette théorie sous un nouveau point de vue, dont on n'a pas communément, ce me semble, assez apprécié l'importance, et qui me paraît singulièrement propre à éclaircir la véritable nature de ces notions élémentaires. Lagrange a montré dans sa *théorie des fonctions analytiques* que cette considération dynamique consistait réellement à concevoir un mouvement varié quelconque comme composé à chaque instant d'un certain mouvement uniforme et d'un autre mouvement uniformément varié, en l'assimilant au mouvement vertical d'un corps pesant lancé avec une impulsion initiale. Mais, pour donner à cette lumineuse conception toute sa valeur philosophique, je crois devoir la présenter sous un point de vue plus étendu que ne l'a fait Lagrange, comme donnant lieu à une théorie complète de l'assimilation des mouvemens, exactement semblable à la théorie générale des contacts des courbes et des surfaces, exposée dans les treizième et quatorzième leçons.

A cet effet, supposons deux mouvemens rectilignes quelconques, définis par les équations $e = f(t)$, $E = F(t)$; que les deux mobiles soient parvenus au bout du temps $t$ à une même situation; et considérons leur distance mutuelle après un certain temps $t + h$. Cette distance, qui sera égale à la différence des valeurs correspondantes



des deux fonctions $f$ et $F$ aura évidemment pour expression, d'après la formule de Taylor, la série

$$(f'(t) - F'(t))\,h + (f''(t) - F''(t))\,\frac{h^2}{1.2.} + (f'''(t) - F'''(t))\,\frac{h^3}{1.2.3.} + \text{etc.}$$

A l'aide de cette série, on pourra, par des considérations entièrement analogues à celles employées dans la théorie des courbes, se faire une idée nette de l'assimilation plus ou moins parfaite des deux mouvemens, suivant les relations analytiques plus ou moins étendues des deux fonctions primitives $f$ et $F$. Si leurs dérivées du premier ordre ont une même valeur, il existera entre les deux mouvemens ce qu'on pourrait appeler une *asimilation du premier ordre*, semblable au contact du premier ordre dans les courbes, et qu'on pourra caractériser, sous le rapport concret, en disant alors que le mouvement des deux corps sera le même pendant un instant infiniment petit. Si, en outre, les deux dérivées du second ordre prennent encore la même valeur, l'assimilation des mouvemens deviendra plus intime, et s'élèvera au second ordre; elle consistera physiquement alors en ce que les deux mobiles auront le même mouvement pendant deux instans infiniment petits consécutifs. Parcillement, en ajoutant à ces deux premières relations l'égalité des troisièmes dérivées, on établira, entre les mouvemens considérés, une *assimilation du troisième ordre*, qui les fera coïncider pendant trois *instans* consécutifs, et ainsi de suite indéfiniment. Le degré de similitude des deux mouvemens, déterminé analytiquement par le nombre de fonctions dérivées successives qui auront respectivement la même valeur, aura toujours pour interprétation concrète la coïncidence des deux mobiles pendant un nombre égal d'instans consécutifs; comme nous avons vu l'ordre du contact des courbes mesuré géométriquement par la communauté d'un nombre correspondant d'élémens successifs. Si la loi caractéristique de l'un des mouvemens proposés contient, dans son expression analytique, quelques constantes arbitraires, on pourra l'*assimiler* à un autre mouvement quelconque jusqu'à un *ordre* marqué par le nombre de ces constantes, qui seront alors déterminées d'après les équations destinées à établir, suivant la théorie précédente, ce degré d'intimité entre les deux mouvemens.

Cette conception fondamentale conduit à apercevoir la possibilité, du moins sous le point de vue abstrait, d'acquérir une connaissance de plus en plus approfondie d'un mouvement varié quelconque, en le comparant successivement à une suite de mouvemens connus, dont la loi



analytique dépende d'un nombre de plus en plus grand de constantes arbitraires, et qui pourront, par conséquent, avoir avec lui une coïncidence de plus en plus prolongée. Mais, de même que nous avons vu la théorie générale des contacts des lignes, appliquée à la mesure de la courbure les unes par les autres, devoir se réduire effectivement à la comparaison d'une courbe quelconque d'abord avec une ligne droite et ensuite avec un cercle, ces deux lignes étant les seules qu'on puisse regarder comme assez connues pour servir utilement de type à l'égard des autres, pareillement la théorie dynamique relative à la mesure des mouvemens les uns par les autres doit être réellement limitée à la comparaison effective de tout mouvement varié, d'abord avec un mouvement uniforme où l'espace est proportionnel au temps, et ensuite avec un mouvement uniformément varié où l'espace croît en raison du carré du temps; ou bien, afin de tout embrasser en une seule considération, avec un mouvement composé d'un mouvement uniforme, et d'un autre uniformément varié, tel que celui d'un corps pesant animé d'une impulsion initiale. Ces deux mouvemens élémentaires sont, en effet, comme le remarque Lagrange, les seuls dont nous ayons réellement une notion assez familière pour que nous puissions les appliquer avec succès à la mesure de tous les autres. En établissant cette assimilation, on trouve, d'après la théorie précédente, que tout mouvement varié peut être à chaque instant comparé à celui d'un corps pesant qui aurait reçu une vitesse initiale égale à la première dérivée de l'espace parcouru envisagé comme une fonction du temps écoulé, et qui serait animé d'une gravité mesurée par la seconde dérivée de cette même fonction, ce qui nous fait rentrer dans les deux formules fondamentales obtenues ci-dessus par la méthode infinitésimale. Le mouvement proposé coïncidera pendant un instant infiniment petit avec le mouvement uniforme exprimé dans la première partie de cette comparaison, et pendant deux instans consécutifs avec le mouvement uniformément accéléré qui correspond à la seconde partie. On se formera donc ainsi une idée nette du mouvement du mobile à chaque moment, et de la manière dont il varie d'un moment à l'autre, ce qui est strictement suffisant.

Quoique la conception de Lagrange, telle que je l'ai généralisée, conduise finalement aux mêmes résultats que la théorie ordinaire, il est aisé de sentir cependant sa supériorité rationnelle, puisque ces deux théorèmes fondamentaux, dans lesquels on avait vu jusqu'alors le terme absolu des efforts de l'esprit humain, relativement à l'étude



des mouvemens variés, peuvent être envisagés maintenant comme une simple application particulière d'une méthode très-générale, qui nous permet abstraitement d'entrevoir une mesure beaucoup plus parfaite de tout mouvement varié, quoique de puissans motifs de convenance nous obligent à considérer seulement la mesure primitivement adoptée. On conçoit, d'après ce qui précède, que si la nature nous offrait un exemple simple et familier d'un mouvement rectiligne dans lequel l'espace croîtrait proportionnellement au cube du temps, en ajoutant à nos notions dynamiques ordinaires la considération habituelle de ce mouvement, nous obtiendrions une connaissance plus approfondie de la nature d'un mouvement varié quelconque, qui pourrait alors avoir avec le triple mouvement ainsi composé une assimilation du troisième ordre, ce qui nous permettrait d'envisager directement, par une seule vue de l'esprit, l'état du mobile pendant trois instans consécutifs, tandis que nous sommes maintenant forcés de nous arrêter à deux instans. Sous le rapport analytique, au lieu de nous borner aux deux premières fonctions dérivées de l'espace relativement au temps, cette méthode reviendrait à considérer simultanément la troisième dérivée, qui aurait dès lors aussi une signification dynamique, dont elle est actuellement dépourvue. Dans cette supposition, de même que nous concevons habituellement la force accélératrice pour nous représenter les changemens de la vitesse, nous aurions pareillement une considération dynamique propre à nous figurer les variations de la force continue. Notre étude générale des mouvemens variés deviendrait encore plus parfaite si, étendant cette hypothèse, il existait en outre un mouvement connu dans lequel l'espace fût proportionnel à la quatrième puissance du temps, et ainsi de suite. Mais en réalité, parmi les mouvemens simples où l'espace parcouru se trouve croître proportionnellement à une puissance entière et positive du temps écoulé, l'observation ne nous faisant connaître que le mouvement uniforme produit par une impulsion unique et le mouvement uniformément accéléré qui résulte de la pesanteur terrestre suivant la découverte de Galilée, nous sommes contraints de nous arrêter aux deux premiers degrés de la théorie précédente pour la mesure générale des mouvemens variés quelconques. Telle est la véritable explication philosophique de la méthode universellement adoptée, estimée à sa valeur réelle.

J'ai cru devoir insister sur cette explication, parce que cette conception fondamentale me semble n'être pas encore appréciée d'une manière convenable, quoiqu'elle soit la base de la dynamique tout entière.



Après l'examen général de cette importante théorie préliminaire, je passe maintenant à considérer sommairement le caractère philosophique de la véritable dynamique rationnelle directe, c'est-à-dire de l'étude du mouvement curviligne produit par l'action simultanée de diverses forces continues quelconques, en continuant à supposer d'abord que le mobile soit regardé comme un point, ou, ce qui revient au même, que toutes les molécules du corps prenant exactement le même mouvement, chacune se meuve isolément sans être affectée par sa liaison avec les autres.

On doit distinguer, en général, dans le mouvement curviligne d'une molécule soumise à l'action de forces quelconques, deux cas très-différens, suivant qu'elle est d'ailleurs entièrement libre, de manière à devoir décrire la trajectoire qui résultera naturellement de la combinaison des forces proposées, ou que, au contraire, elle est astreinte à se mouvoir sur une seule courbe ou sur une surface donnée. La théorie fondamentale du mouvement curviligne peut être établie dans son ensemble suivant deux modes fort distincts, en prenant pour base l'un ou l'autre de ces deux cas, car chacun d'eux peut être traité directement et se trouve en même temps susceptible de se rattacher à l'autre, les deux considérations étant presqu'également naturelles selon le point de vue où l'esprit se place. En partant du premier cas, il suffira, pour en déduire le second, de regarder la résistance, tant active que passive, de la courbe ou de la surface sur laquelle le corps est assujetti à rester, comme une nouvelle force à joindre à celles du système proposé, ainsi que nous avons vu qu'on a coutume de le faire en statique. Si, au contraire, on préfère d'établir d'abord la théorie du second cas, on y ramènera ensuite le premier, en considérant le mobile comme forcé à décrire la courbe qu'il doit effectivement parcourir, ce qui suffira entièrement pour former les équations fondamentales, malgré que cette courbe soit alors primitivement inconnue. Quoique cette dernière méthode ne soit point ordinairement employée, il convient, je crois, de les caractériser ici toutes deux, pour donner le plus complétement possible une juste idée de la théorie générale du mouvement curviligne, car chacune d'elles a, ce me semble, des avantages importans qui lui sont propres. Considérons d'abord la première.

Examinant, en premier lieu, le mouvement curviligne d'une molécule entièrement libre soumise à l'action de forces continues quelconques, on peut former de deux manières distinctes les équations fondamentales de ce mouvement, en les déduisant par deux modes différens de la théorie du mouvement rectiligne. Le premier mode, qui a d'abord été le plus employé par les géomètres, quoique, sous le rapport analytique, il ne soit pas le plus simple, consiste à décomposer à chaque instant la résultante totale des forces continues qui agissent sur le mobile en deux forces, l'une dirigée selon la tangente à la trajectoire qu'il décrit, l'autre suivant la normale. Considérons alors pendant un instant infiniment petit, le mouvement comme rectiligne et ayant lieu dans la direction de la tangente, d'après la première loi fondamentale du mouvement. La progression du corps en ce sens ne sera évidemment due qu'à la première de ces deux composantes, à laquelle, par conséquent, on pourra appliquer la formule élémentaire rapportée ci-dessus par le mouvement rectiligne. Cette composante, qui est d'ailleurs égale à la force accélératrice totale multipliée par le cosinus de son inclinaison sur la tangente, sera donc exprimée par la seconde fonction dérivée de l'arc de la courbe relativement au temps. En développant cette équation par les formules géométriques connues, et introduisant dans le calcul les composantes de la force accélératrice totale parallèlement aux trois axes coordonnés rectangulaires, on parvient finalement aux trois équations fondamentales ordinaires du mouvement curviligne Le second mode, plus simple et plus régulier, dû à Euler, et depuis généralement adopté, consiste à obtenir immédiatement ces équations en décomposant directement le mouvement du corps à chaque instant, ainsi que la force continue totale dont il est animé, en trois autres dans le sens des trois axes coordonnés. D'après la troisième loi fondamentale du mouvement, le mouvement selon chaque axe étant indépendant des mouvemens suivant les deux autres n'est dû qu'à la composante totale des forces accélératrices parallèlement à cet axe, en sorte que le mouvement curviligne se trouve ainsi continuellement remplacé par le système de trois mouvemens rectilignes, à chacun desquels on peut aussitôt appliquer la théorie dynamique préliminaire indiquée ci-dessus. En nommant $X$, $Y$, $Z$, les composantes totales, parallèlement aux trois axes des $x$, des $y$, et des $z$, des forces continues qui agissent à chaque instant $dt$ sur la molécule dont les coordonnées sont $x, y, z$, on obtient ainsi immédiatement les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \ \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \ \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

auxquelles on ne parvient que par un assez long calcul en suivant le premier mode.

Telles sont les équations différentielles fondamentales du mouvement curviligne, d'après lesquelles les questions quelconques de dynamique relatives à un corps dont toutes les molécules prennent exactement le même mouvement se réduisent immédiatement à des problèmes purement analytiques, lorsque les données ont été convenablement exprimées. En considérant d'abord la question générale directe, qui est la plus importante, on se propose, connaissant la loi des forces continues dont le corps est animé, de déterminer toutes les circonstances de son mouvement effectif. Pour cela, de quelque manière que cette loi soit donnée, ou en fonction du temps, ou en fonction des coordonnées, ou en fonction de la vitesse, il suffira en général d'intégrer ces trois équations du second ordre, ce qui donnera lieu à des difficultés analytiques plus ou moins élevées, que l'imperfection du calcul intégral pourra rendre fréquemment insurmontables. Les six constantes arbitraires successivement introduites par cette intégration se détermineront d'ailleurs en ayant égard aux circonstances de l'état initial du mobile, dont les équations différentielles n'ont pu conserver aucune trace. On obtiendra ainsi les trois coordonnées du corps en fonction du temps, de manière à pouvoir assigner exactement sa position à chaque instant; et on trouvera ensuite les deux équations caractéristiques de la courbe qu'il décrit, en éliminant le temps entre ces trois expressions. Quant à la vitesse acquise par le mobile à une époque quelconque, on pourra dès lors la déterminer aussi d'après les valeurs de ses trois composantes, dans le sens des axes, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Il est d'ailleurs utile de remarquer, à cet égard, que cette vitesse $v$ sera souvent susceptible d'être immédiatement calculée par une combinaison fort simple des trois équations différentielles fondamentales, qui donne évidemment la formule générale

$$v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz),$$

à l'aide de laquelle une seule intégration suffira pour la détermination directe de la vitesse, lorsque l'expression placée sous le signe $\int$ satisfera aux conditions connues d'intégrabilité relativement aux trois variables $x, y, z$, envisagées comme indépendantes. Cette propriété n'a pas lieu, sans doute, relativement à toutes les forces continues possibles, ni même par rapport à toutes celles que nous présentent en effet les phénomènes naturels, puisque, par exemple, elle ne saurait se vérifier pour les forces qui représentent la résistance des milieux, ou les frottemens, ou, en général, quant à toutes celles dont la loi primitive dépend du temps ou de la vitesse elle-même. La remarque précédente n'en est pas moins regardée avec raison par les géomètres comme ayant une extrême importance pour simplifier les recherches analytiques auxquelles se réduisent les problèmes de dynamique, car la condition énoncée se vérifie constamment, ainsi qu'il est aisé de le prouver, dans un cas particulier fort étendu, qui comprend toutes les grandes applications de la dynamique rationnelle à la mécanique céleste, c'est-à-dire celui où toutes les forces continues dont le corps est animé sont des tendances vers des centres fixes, agissant suivant une fonction quelconque de la distance du corps à chaque centre, mais indépendamment de la direction.



Si, prenant maintenant en sens inverse la théorie générale du mouvement curviligne d'une molécule libre, on se propose de déterminer, au contraire, d'après les circonstances caractéristiques du mouvement effectif, la loi des forces accélératrices qui ont pu le produire, la question sera nécessairement beaucoup plus simple sous le rapport analytique, puisqu'elle ne consistera essentiellement qu'en des différentiations. Car il sera toujours possible alors, par des recherches préliminaires plus ou moins compliquées, qui ne pourront porter que sur des considérations purement géométriques, de déduire, de la définition primitive du mouvement proposé, les valeurs des trois coordonnées du mobile à chaque instant en fonction du temps écoulé; et dès lors, en différentiant deux fois ces trois expressions, on obtiendra les composantes des forces continues suivant les trois axes, d'où l'on pourra conclure immédiatement la loi de la force accélératrice totale, de quelque nature qu'elle soit. C'est ainsi que nous verrons, dans la seconde section de ce cours, les trois lois géométriques fondamentales trouvées par Képler pour les mouvemens des corps célestes qui composent notre système solaire, nous conduire nécessairement à la loi de gravitation universelle, qui devient ensuite la base de toute la mécanique générale de l'univers.

Après avoir établi la théorie du mouvement curviligne d'une molécule libre, il est aisé d'y faire rentrer le cas où cette molécule est assujétie, au contraire, à rester sur une courbe donnée. Il suffit, comme je l'ai indiqué, de comprendre alors, parmi les forces continues auxquelles la molécule est primitivement soumise, la résistance totale exercée par la courbe proposée, ce qui permettra évidemment de considérer le mobile comme entièrement libre. Toute la difficulté propre à ce second cas se réduit donc essentiellement à analyser avec exactitude cette résistance. Or il faut, à cet effet, distinguer d'abord, dans la résistance de la courbe, deux parties très-différentes qu'on pourrait appeler, pour les caractériser nettement, l'une *statique*, l'autre *dynamique*. La résistance *statique* est celle qui aurait lieu lors même que le corps serait immobile; elle provient de la pression exercée sur la courbe proposée par les forces accélératrices dont il est animé; ainsi on l'obtiendra en déterminant la composante de la force continue totale suivant la normale à la courbe donnée au point que l'on considère. La résistance *dynamique* a une origine toute différente; elle n'est engendrée que par le mouvement, et résulte de la tendance perpétuelle du corps à abandonner la courbe qu'il est forcé de décrire, pour continuer à suivre, en vertu de la première loi fondamentale du mouvement, la direction de la tangente. Cette seconde résistance, qui se manifeste dans le passage du corps d'un élément de la courbe à l'élément suivant, est évidemment dirigée à chaque instant selon la normale à la courbe située dans le plan osculateur, et pourra, par conséquent, n'avoir pas la même direction que la résistance statique, si le plan osculateur ne contient pas la droite suivant laquelle agit la force accélératrice totale. C'est à cette résistance dynamique qu'on donne, en général, le nom de *force centrifuge*, tenant à ce que les seules forces accélératrices considérées d'abord par les géomètres étaient des forces *centripètes*, ou des tendances vers des centres fixes. Quant à son intensité, en concevant cette force centrifuge comme une nouvelle force accélératrice, elle sera mesurée par la composante normale que produit, dans chaque instant infiniment petit, la vitesse du mobile, lorsqu'il passe d'un élément de la courbe à un autre. On trouve aisément ainsi, après avoir éliminé les infinitésimales auxiliaires introduites d'abord naturellement par cette considération, que la force centrifuge est continuellement égale au carré de la vitesse effective du mobile divisé par le rayon de courbure correspondant de la courbe proposée. Du reste, cette expression fondamentale, aussi bien que la direction même de la force centrifuge, pourraient être entièrement obtenues par le calcul, en introduisant préalablement cette force, d'une manière complétement indéterminée, dans les trois équations différentielles générales du mouvement curviligne rapportées ci-dessus. Quoi qu'il en soit, après avoir déterminé la résistance dynamique, on la composera convenablement avec la résistance statique, et, en faisant entrer la résistance totale parmi les forces proposées, le problème sera immédiatement ramené au cas précédent. La question la plus remarquable de ce genre consiste dans l'étude du mouvement oscillatoire d'un corps pesant sur une courbe quelconque (et particulièrement sur un cercle ou sur une cycloïde), dont l'examen philosophique doit naturellement être renvoyé à la partie de ce cours qui concerne la physique proprement dite.



Il serait superflu de considérer distinctement ici le cas où le mobile, au lieu de devoir décrire une courbe donnée, serait seulement assujéti à rester sur une certaine surface. C'est essentiellement par les mêmes considérations qu'on ramène ce nouveau cas, d'ailleurs peu important dans les applications, à celui d'un corps libre. Il n'y a d'autre différence réelle qu'en ce qu'alors la trajectoire du mobile n'est pas d'abord entièrement déterminée, et qu'on est obligé, pour la connaître, de joindre à l'équation de la surface proposée une autre équation fournie par l'étude dynamique du problème.

Considérons maintenant, par aperçu, le second mode général distingué précédemment pour construire la théorie fondamentale du mouvement curviligne d'une molécule isolée, en partant, au contraire, du cas où la molécule est préalablement assujétie à décrire une courbe donnée.

Toute la difficulté réelle consiste alors à établir directement le théorème fondamental relatif à la mesure de la forme centrifuge. Or c'est ce qu'on peut faire aisément, en considérant d'abord le mouvement uniforme du corps dans un cercle, en vertu d'une impulsion initiale, et sans aucune