force accélératrice, ainsi que l'a supposé Huyghens, auquel est due la base de cette théorie. La force centrifuge est dès lors évidemment proportionnelle au sinus-verse de l'arc de cercle décrit dans un instant infiniment petit, convenablement comparé au temps correspondant, d'où il est facile de conclure, comme l'a fait Huyghens, qu'elle a pour expression le carré de la vitesse constante avec laquelle le mobile décrit le cercle divisé par le rayon de ce cercle. Ce résultat une fois obtenu, en le combinant avec une autre notion fondamentale due à Huyghens, on en déduit immédiatement la valeur de la force centrifuge dans une courbe quelconque. Il suffit, pour cela, de concevoir que la détermination de cette force exigeant seulement la considération simultanée de deux élémens consécutifs de la courbe proposée, le mouvement peut être continuellement envisagé comme ayant lieu dans le cercle osculateur correspondant, puisque ce cercle présente relativement à la courbe deux élémens successifs communs. On peut donc directement transporter à une courbe quelconque l'expression de la force centrifuge trouvée primitivement pour le cas du cercle, et établir, comme dans la première méthode, mais bien plus simplement, qu'elle est généralement égale au carré de la vitesse divisé par le rayon du cercle osculateur. Cette manière de

procéder présente l'avantage de donner une idée plus nette de la force centrifuge.

Le cas du mouvement dans une courbe déterminée étant ainsi traité préalablement avec toute la généralité convenable, il est aisé d'y ramener celui d'un corps entièrement libre, décrivant la trajectoire qui doit naturellement résulter de l'action simultanée de certaines forces accélératrices quelconques. Il suffit, en effet, suivant l'indication précédemment exprimée, de concevoir le corps comme assujéti à rester sur la courbe qu'il décrira réellement, ce qui revient évidemment au même, puisqu'il importe peu, en dynamique, le corps ne pouvant point véritablement parcourir toute autre courbe, qu'il y soit contraint par la nature des forces dont il est animé, ou par des conditions de liaison spéciales. Dès lors ce mouvement donnera naissance à une véritable force centrifuge, exprimée par la formule générale trouvée ci-dessus. Maintenant il est clair que, si la force continue totale dont le mobile est animé a été d'abord conçue comme décomposée à chaque instant en deux autres, l'une dirigée suivant la tangente à la trajectoire, et l'autre selon la normale située dans le plan osculateur, cette dernière doit nécessairement être égale et directement opposée à la force centrifuge. Or, cette composante normale ayant pour expression la force continue totale multipliée par le cosinus de l'angle que sa direction forme avec la normale, en égalant cette valeur à celle de la force centrifuge, on formera une équation fondamentale d'où l'on pourra déduire les équations générales du mouvement curviligne précédemment obtenues par une autre méthode. On n'aura, pour cela, d'autre transformation à faire que d'introduire dans cette équation, au lieu de la force continue totale et de sa direction, ses composantes selon les trois axes coordonnés, et de remplacer, dans la formule qui exprime la force centrifuge, la vitesse et le rayon de courbure par leurs valeurs générales en fonction des coordonnées. L'équation ainsi obtenue se décomposera naturellement en trois, si l'on considère que, devant avoir lieu pour quelque système que ce soit de forces accélératrices et pour une trajectoire quelconque, elle doit se vérifier séparément par rapport à chacune des trois coordonnées, envisagées momentanément comme trois variables entièrement indépendantes. Ces trois équations se trouveront être exactement identiques à celles rapportées ci-dessus. Quoique cette manière de les obtenir soit bien moins directe, et qu'elle exige un plus grand appareil analytique, j'ai cependant cru nécessaire de l'indiquer distinctement, parce qu'elle me semble propre à éclairer, sous un rapport fort

important, la théorie ordinaire du mouvement curviligne, en rendant sensible l'existence de la force centrifuge, même dans le cas d'un corps libre, notion sur laquelle la méthode habituellement adoptée aujourd'hui laisse communément beaucoup d'incertitude et d'obscurité.

Ayant suffisamment étudié, dans ce qui précède, le caractère général de la partie de la dynamique relative au mouvement d'un point, ou, ce qui revient au même, d'un corps dont toutes les molécules se meuvent identiquement, nous devons maintenant examiner, sous un semblable point de vue, la partie de la dynamique la plus difficile et la plus étendue, celle qui se rapporte au cas plus réel du mouvement d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, et dont les mouvemens propres sont altérés par les conditions dépendantes de leur liaison. Je considérerai soigneusement, dans la leçon suivante, les résultats généraux obtenus jusqu'ici par les géomètres, relativement à cet ordre de recherches. Je dois donc me borner strictement ici à caractériser la méthode générale d'après laquelle on est parvenu à convertir tous les problèmes de cette nature en de pures questions d'analyse.

Dans cette dernière partie de la dynamique, il faut préalablement établir une nouvelle notion élémentaire, relativement à la mesure des forces.

En effet, les forces considérées jusqu'ici étant toujours appliquées à une molécule unique, ou du moins agissant toutes sur un même corps, leur intensité se trouvait être suffisamment mesurée, en ayant seulement égard à la vitesse plus ou moins grande qu'elles pouvaient imprimer au mobile à chaque instant. Mais, quand on vient à envisager simultanément les mouvemens de plusieurs corps différens, cette manière de mesurer les forces devient évidemment insuffisante, puisqu'on ne saurait se dispenser de tenir compte de la masse de chaque mobile, aussi bien que de sa vitesse. Pour la prendre convenablement en considération, les géomètres ont établi cette notion fondamentale, que les forces susceptibles d'imprimer à diverses masses une même vitesse sont exactement entre elles comme ces masses; ou, en d'autres termes, que les forces sont proportionnelles aux masses, aussi bien que nous les avons reconnues, dans la quinzième leçon, d'après la troisième loi physique du mouvement, être proportionnelles aux vitesses. Tous les phénomènes relatifs à la communication du mouvement par le choc, ou de toute autre manière, ont constamment confirmé la supposition de cette nouvelle proportionnalité. Il en résulte évidemment que lorsqu'il faut comparer, dans le cas le plus général, des forces qui impriment à des masses inégales des

vitesses différentes, chacune d'elles doit être mesurée d'après le produit de la masse sur laquelle elle agit par la vitesse correspondante. Ce produit, auquel les géomètres ont donné communément le nom de *quantité de mouvement*, détermine exactement, en effet, la force d'impulsion d'un corps dans le choc, la *percussion* proprement dite, ainsi que la *pression* qu'un corps peut exercer contre tout obstacle fixe à son mouvement. Telle est la nouvelle notion élémentaire relative à la mesure générale des forces, dont il serait peut-être convenable de faire une quatrième et dernière loi fondamentale du mouvement, en tant du moins que cette notion n'est point réellement susceptible, comme quelques géomètres l'ont pensé, d'être logiquement déduite des notions précédentes, et ne saurait être solidement établie que sur des considérations physiques qui lui soient propres.

Cette notion préliminaire étant établie, examinons maintenant la conception générale d'après laquelle peut être traitée la dynamique d'un système quelconque de corps soumis à l'action de forces quelconques. La difficulté caractéristique de cet ordre de questions consiste essentiellement dans la manière de tenir compte de la liaison des différens corps du système, en vertu de laquelle leurs réactions mutuelles altéreront nécessairement les mouvemens propres que chaque corps prendrait, s'il était seul, par l'influence des forces qui le sollicitent, sans qu'on sache nullement *a priori* en quoi peut consister cette altération. Ainsi, pour choisir un exemple très-simple, et néanmoins important, dans le célèbre problème du mouvement d'un pendule composé, qui a été primitivement le principal sujet des recherches des géomètres sur cette partie supérieure de la dynamique, il est évident que, par suite de la liaison établie entre les corps ou les molécules les plus rapprochés du point de suspension, et les corps ou les molécules qui en sont les plus éloignés, il s'exercera une réaction telle que ni les uns ni les autres n'oscilleront comme s'ils étaient libres, le mouvement des premiers étant retardé, et celui des derniers étant accéléré en vertu de la nécessité où ils se trouvent d'osciller simultanément, sans qu'aucun principe dynamique déjà établi puisse faire connaître la loi qui détermine ces réactions. Il en est de même dans tous les autres cas relatifs au mouvement d'un système de corps. On épouve donc évidemment ici le besoin de nouvelles conceptions dynamiques. Les géomètres, obéissant, à ce sujet, à l'habitude imposée presque constamment par la faiblesse de l'esprit humain, ont d'abord traité cette nouvelle série de recherches, en créant pour ainsi dire un nou-

veau principe particulier relativement à chaque question essentielle. Telles ont été l'origine et la destination des diverses propriétés générales du mouvement que nous examinerons dans la leçon suivante, et qui, primitivement envisagées comme autant de *principes* indépendans les uns des autres, ne sont plus aujourd'hui, aux yeux des géomètres, que des théorèmes remarquables fournis simultanément par les équations dynamiques fondamentales. On peut suivre, dans la *Mécanique analytique*, l'histoire générale de cette série de travaux, que Lagrange a présentée d'une manière si profondément intéressante pour l'étude de la marche progressive de l'esprit humain. Cette manière de procéder a été continuellement adoptée jusqu'à d'Alembert, qui a mis fin à toutes ces recherches isolées, en s'élevant à une conception générale sur la manière de tenir compte de la réaction dynamique des corps d'un système en vertu de leurs liaisons, et en établissant par suite les équations fondamentales du mouvement d'un système quelconque. Cette conception, qui a toujours servi depuis, et qui servira indéfiniment de base à toutes les recherches relatives à la dynamique des corps, consiste essentiellement à faire rentrer les questions de mouvement dans de simples questions d'équilibre, à l'aide de ce célèbre principe général auquel l'accord unanmie des géomètres a donné, avec tant de raison, le nom de principe de d'Alembert. Considérons donc maintenant ce principe d'une manière directe.

Lorsque, par les réactions que divers corps exercent les uns sur les autres en vertu de leur liaison, chacun d'eux prend un mouvement différent de celui que les forces dont il est animé lui eussent imprimé s'il eût été libre, on peut évidemment regarder le mouvement naturel comme décomposé en deux, dont l'un est celui qui aura effectivement lieu, et dont l'autre, par conséquent, a été détruit. Le principe de d'Alembert consiste proprement en ce que tous les mouvemens de ce dernier genre, ou, en d'autres termes, les quantités de mouvemens perdues ou gagnées par les différens corps du système dans leur réaction, se font nécessairement équilibre, en ayant égard aux conditions de liaison qui caractérisent le système proposé. Cette lumineuse conception générale a été d'abord entrevue par Jacques Bernouilli dans un cas particulier; car telle est évidemment la considération qu'il emploie pour résoudre le problème du pendule composé, lorsqu'il regarde la quantité de mouvement perdue par le corps le plus rapproché du point de suspension, et la quantité de mouvement gagnée par celui qui en est le plus éloigné, comme devant nécessairement satisfaire à la loi d'équilibre du lévier, relativement au point de suspension, ce qui le conduit à former immédiatement une équation susceptible de déterminer le centre d'oscillation du système de poids le plus simple. Mais cette idée n'était, pour Jacques Bernouilli, qu'un artifice isolé qui n'ôte rien au mérite de la grande conception de d'Alembert, dont la propriété essentielle consiste dans son entière généralité nécessaire.

En considérant le principe de d'Alembert sous le point de vue le plus philosophique, on peut, ce me semble, en reconnaître le véritable germe primitif dans la seconde loi fondamentale du mouvement (voyez la quinzième leçon), établie par Newton sous le nom d'égalité de la réaction à l'action. Le principe de d'Alembert coïncide exactement, en effet, avec cette loi de Newton, quand on envisage seulement un système de deux corps, agissant l'un sur l'autre suivant la ligne qui les joint. Ce principe peut donc être envisagé comme la plus grande généralisation possible de la loi de la réaction égale et contraire à l'action; et cette manière nouvelle de le concevoir me paraît propre à faire ressortir sa véritable nature, en lui donnant ainsi un caractère physique, au lieu du caractère purement logique qui lui avait été imprimé par d'Alembert. En conséquence nous ne verrons désormais dans ce grand principe que notre seconde loi du mouvement étendue à un nombre quelconque de corps, disposés entr'eux d'une manière quelconque.

D'après ce principe général, on conçoit que toute question de dynamique pourra être immédiatement convertie en une simple question de statique, puisqu'il suffira de former, dans chaque cas, les équations d'équilibre entre les mouvemens détruits; ce qui donne la certitude nécessaire de pouvoir mettre en équation un problème quelconque de dynamique, et de le faire ainsi dépendre uniquement de recherches analytiques. Mais la forme sous laquelle le principe de d'Alembert a été primitivement conçu n'est point la plus convenable pour effectuer avec facilité cette transformation fondamentale, vu la grande difficulté qu'on éprouve souvent à discerner quels doivent être les mouvemens détruits, comme on peut pleinement s'en convaincre par l'examen attentif du *Traite de dynamique* de d'Alembert, dont les solutions sont ordinairement si compliquées. Hermann, et surtout Euler ont cherché à faire disparaître la considération embarrassante des quantités de mouvement perdues ou gagnées, en remplaçant les mouvemens détruits par les mouvemens primitifs composés avec les mouvemens effectifs pris en sens contraire, ce qui revient évidemment au même, puisque, quand une force a été décomposée en deux, on peut réciproquement substituer à l'une des composantes la combinaison de la résultante avec l'autre composante prise en sens contraire. Dès lors le principe de d'Alembert, envisagé sous ce nouveau point de vue, consiste simplement en ce que les mouvemens effectifs conformes à la liaison des corps du système devront nécessairement, étant pris en sens inverse, faire toujours équilibre aux mouvemens primitifs qui résulteraient de la seule action des forces proposées sur chaque corps supposé libre; ce qui peut d'ailleurs être établi directement, car il est évident que le système serait en équilibre si on imprimait à chaque corps une quantité de mouvement égale et contraire à celle qu'il prendra effectivement. Cette nouvelle forme donnée par Euler au principe de d'Alembert est la plus convenable pour en faire usage, comme ne prenant en considération que les mouvemens primitifs et les mouvemens effectifs, qui sont les véritables élémens du problème dynamique, dont les uns constituent les données et les autres les inconnues. Tel est, en effet, le point de vue définitif sous lequel le principe de d'Alembert a été habituellement conçu depuis.

Les questions relatives au mouvement étant ainsi généralement réduites, de la manière la plus simple possible, à de pures questions d'équilibre, la méthode la plus philosophique pour traiter la dynamique rationnelle consiste à combiner le principe de d'Alembert avec le principe des vitesses virtuelles, qui fournit directement, comme nous l'avons vu dans la leçon précédente, toutes les équations nécessaires à l'équilibre d'un système quelconque. Telle est la combinaison conçue par Lagrange, et si admirablement développée dans sa *Mécanique analytique*, qui a élevé la science générale de la mécanique abstraite au plus haut degré de perfection que l'esprit humain puisse ambitionner sous le rapport logique, c'est-à-dire à une rigoureuse unité, toutes les questions qui peuvent s'y rapporter étant désormais uniformément rattachées à un principe unique, d'après lequel la solution définitive d'un problème quelconque ne présente plus nécessairement que des difficultés analytiques. Pour établir le plus simplement possible la formule générale de la dynamique, concevons que toutes les forces accélératrices du système quelconque proposé aient été décomposées parallèlement aux trois axes des coordonnées, et soient X, Y, Z, les groupes de forces correspondant aux axes des x, y, z; en désignant par m la masse du système, il devra y avoir équilibre, d'après le principe de d'Alembert, entre les quantités primitives de mouvement mX, mY, mZ, et les quantités de mouvement effectives prises en sens contraire, qui seront évidemment exprimées par $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, suivant les trois axes. Ainsi, appliquant à cet ensemble de forces le principe général des vitesses virtuelles, en ayant soin de

distinguer les variations relatives aux différens axes, on obtiendra l'équation

$$\int m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\int m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\int m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0,$$

qui peut être regardée comme comprenant implicitement toutes les équations nécessaires pour l'entière détermination des diverses circonstances relatives au mouvement d'un système quelconque de corps sollicités par des forces quelconques. Les équations explicites se déduiront convenablement, dans chaque cas, de cette formule générale, en réduisant toutes les variations au plus petit nombre possible, d'après les conditions de liaison qui caractériseront le système proposé, ce qui fournira autant d'équations distinctes qu'il restera de variations réellement indépendantes.

Afin de faire ressortir, sous le point de vue philosophique, toute la fécondité de cette formule, et de montrer qu'elle comprend rigoureusement l'ensemble total de la dynamique, il convient de remarquer qu'on en pourrait même tirer, comme un simple cas particulier, la théorie du mouvement curviligne d'une molécule unique, que nous avons spécialement considérée dans la première partie de cette leçon. En effet il est évident que, si toutes les forces continues proposées agissent sur une seule molécule, la masse m disparaît de l'équation générale précédente, qui, en distinguant séparément le mouvement virtuel relatif à chaque axe, fournit immédiatement les trois équations fondamentales établies ci-dessus pour le mouvement d'un point. Mais, bien qu'on doive considérer cette filiation, sans laquelle on ne concevrait pas toute l'étendue réelle de la formule générale de la dynamique, la théorie du mouvement d'une seule molécule n'exige point véritablement l'emploi du principe de d'Alembert, qui est essentiellement destiné à l'étude dynamique des systèmes de corps. Cette première théorie est trop simple par elle-même, et résulte trop immédiatement des lois fondamentales du mouvement, pour que je n'aie pas cru devoir, conformément à l'usage ordinaire, la présenter d'abord isolément, afin de rendre plus nettes les importantes notions générales auxquelles elle donne naissance, quoique nous devions finir par la faire rentrer, en vue d'une coordination plus parfaite, dans la formule invariable qui renferme nécessairement toutes les théories dynamiques possibles.

Ce serait sortir des limites naturelles de ce cours que d'indiquer ici aucune application spéciale de cette formule générale à la solution effective d'un problème dynamique quelconque, la méthode devant être le seul objet essentiel de nos

considérations philosophiques, sauf l'indication des résultats principaux qu'elle a produits, et dont nous nous occuperons dans la leçon suivante. Je crois cependant devoir rappeler à ce sujet, comme une conception vraiment relative à la *méthode* bien plus qu'à la *science*, la distinction nécessaire, signalée dans la leçon précédente, entre les mouvemens de *translation* et les mouvemens de *rotation*. Pour étudier convenablement le mouvement d'un système quelconque, il faut, en effet, l'envisager comme composé d'une translation commune à toutes ses parties, et d'une rotation propre à chacun de ses points autour d'un certain axe constant ou variable. Par des motifs de simplification analytique dont nous aurons occasion, dans la leçon suivante, d'indiquer l'origine, les géomètres considèrent toujours de préférence le mouvement de rotation d'un système quelconque relativement à son centre de gravité, ou, pour mieux dire, à son centre des moyennes distances, qui présente, sous ce rapport, des propriétés générales très-remarquables, dont la découverte est due à Euler. Dès lors l'analyse complète du mouvement d'un système animé de forces quelconques consiste essentiellement : 1° à déterminer à chaque instant la vitesse du centre de gravité et la direction dans laquelle il se meut, ce qui suffit pour faire connaître, comme nous le constaterons, tout ce qui concerne la translation du système; 2° à déterminer également à chaque instant la direction de l'axe instantané de rotation passant par le centre de gravité, et la vitesse de rotation de chaque partie du système autour de cet axe. Il est clair, en effet, que toutes les circonstances secondaires du mouvement pourront nécessairement être déduites, dans chaque cas, de ces deux déterminations principales.

La formule générale de la dynamique, établie ci-dessus, est évidemment, par sa nature, tout aussi directement applicable au mouvement des fluides qu'à celui des solides, pourvu qu'on prenne convenablement en considération les conditions qui caractérisent l'état fluide, soit liquide, soit gazeux, ce que nous avons eu occasion d'indiquer dans la leçon précédente au sujet de l'équilibre. Aussi d'Alembert, après avoir découvert le principe fondamental qui lui a permis, vu les progrès de la statique, de traiter dans son ensemble la dynamique d'un système quelconque, en a-t-il fait immédiatement application à l'établissement des équations générales du mouvement des fluides, entièrement inconnues jusqu'alors. Ces équations s'obtiennent surtout avec une grande facilité d'après le principe des vitesses virtuelles, tel qu'il est exprimé par la formule générale précédente. Cette partie de la dynamique ne laisse donc réellement rien à désirer sous le rapport concret, et

ne présente plus que des difficultés purement analytiques, relatives à l'intégration des équations aux différences partielles auxquelles on parvient. Mais il faut reconnaître que cette intégration générale offrant jusqu'ici des obstacles insurmontables, les connaissances effectives qu'on peut déduire de cette théorie sont encore extrêmement imparfaites, même dans les cas les plus simples; ce qui nous semblera sans doute inévitable, en considérant la grande complication que nous avons déjà reconnue à cet égard dans les questions de pure statique, dont la nature est cependant bien moins complexe. Le seul problème de l'écoulement d'un liquide pesant par un orifice donné, quelque facile qu'il doive paraître, n'a pu encore être résolu d'une manière vraiment satisfaisante. Afin de simplifier suffisamment les recherches analytiques dont il dépend, les géomètres ont été obligés d'adopter la célèbre hypothèse proposée par Daniel Bernouilli, sous le nom de *parallélisme des tranches*, qui permet de ne considérer le mouvement que par tranches, au lieu de devoir l'envisager molécule à molécule. Mais cette hypothèse, qui consiste à regarder chaque section horizontale du liquide comme se mouvant en totalité et prenant la place de la suivante, est évidemment en contradiction formelle avec la réalité dans presque tous les cas, excepté dans un petit nombre de circonstances choisies pour ainsi dire expressément, à cause des mouvemens latéraux dont une telle hypothèse fait complétement abstraction, et dont l'existence sensible impose nécessairement la loi d'étudier isolément le mouvement de chaque molécule. La science générale de l'hydrodynamique ne peut donc réellement être encore envisagée que comme étant à sa naissance, même relativement aux liquides, et à plus forte raison à l'égard des gaz. Mais il importe éminemment de reconnaître, d'un autre côté, que tous les grands travaux qui restent à faire sous ce rapport consistent essentiellement dans les progrès de la seule analyse mathématique, les équations fondamentales du mouvement des fluides étant irrévocablement établies.

Après avoir considéré sous ses divers aspects principaux le caractère général de la méthode en mécanique rationnelle, et indiqué comment toutes les questions qu'elle peut offrir se réduisent à des recherches purement analytiques, il nous reste maintenant, pour compléter l'examen philosophique de cette science fondamentale, à envisager, dans la leçon suivante, les résultats principaux obtenus par l'esprit humain en procédant ainsi, c'est-à-dire les propriétés générales les plus remarquables de l'équilibre et du mouvement.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations sur les théorèmes généraux de mécanique rationnelle.

Le but et l'esprit de cet ouvrage, aussi bien que son étendue naturelle, nous interdisent nécessairement ici tout développement spécial relatif à l'application des équations fondamentales de l'équilibre et du mouvement, à la solution effective d'aucun problème mécanique particulier. Néanmoins, on ne se formerait qu'une idée incomplète du caractère philosophique de la mécanique rationnelle envisagée dans son ensemble, si, après avoir convenablement étudié la méthode, on ne considérait enfin les grands résultats théoriques de la science, c'est-à-dire les principales propriétés générales de l'équilibre et du mouvement découvertes jusqu'ici par les géomètres, et qui nous restent maintenant à examiner. Ces di-