expressément, à cause des mouvemens latéraux dont une telle hypothèse fait complétement abstraction, et dont l'existence sensible impose nécessairement la loi d'étudier isolément le mouvement de chaque molécule. La science générale de l'hydrodynamique ne peut donc réellement être encore envisagée que comme étant à sa naissance, même relativement aux liquides, et à plus forte raison à l'égard des gaz. Mais il importe éminemment de reconnaître, d'un autre côté, que tous les grands travaux qui restent à faire sous ce rapport consistent essentiellement dans les progrès de la seule analyse mathématique, les équations fondamentales du mouvement des fluides étant irrévocablement établies.

Après avoir considéré sous ses divers aspects principaux le caractère général de la méthode en mécanique rationnelle, et indiqué comment toutes les questions qu'elle peut offrir se réduisent à des recherches purement analytiques, il nous reste maintenant, pour compléter l'examen philosophique de cette science fondamentale, à envisager, dans la leçon suivante, les résultats principaux obtenus par l'esprit humain en procédant ainsi, c'est-à-dire les propriétés générales les plus remarquables de l'équilibre et du mouvement.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

SOMMAIRE. Considérations sur les théorèmes généraux de mécanique rationnelle.

Le but et l'esprit de cet ouvrage, aussi bien que son étendue naturelle, nous interdisent nécessairement ici tout développement spécial relatif à l'application des équations fondamentales de l'équilibre et du mouvement, à la solution effective d'aucun problème mécanique particulier. Néanmoins, on ne se formerait qu'une idée incomplète du caractère philosophique de la mécanique rationnelle envisagée dans son ensemble, si, après avoir convenablement étudié la méthode, on ne considérait enfin les grands résultats théoriques de la science, c'est-à-dire les principales propriétés générales de l'équilibre et du mouvement découvertes jusqu'ici par les géomètres, et qui nous restent maintenant à examiner. Ces diverses propriétés ont été conçues dans l'origine comme autant de véritables *principes*, dont chacun était destiné primitivement à procurer la solution d'un certain ordre de nouveaux problèmes mécaniques, supérieurs aux méthodes connues jusqu'alors. Mais, depuis que l'ensemble de la mécanique rationnelle a pris son caractère systématique définitif, chacun de ces anciens *principes* a été ramené à n'être plus qu'un simple *théorème* plus ou moins général, résultat nécessaire des théories fondamentales de la statique et de la dynamique abstraites : c'est seulement sous ce point de vue philosophique que nous devons les envisager ici. Commençons par ceux qui se rapportent à la statique.

Le théorème le plus remarquable qui ait été déduit jusqu'à présent des équations générales de l'équilibre est la célèbre propriété, primitivement découverte par Torricelli, relativement à l'équilibre des corps pesans. Elle consiste proprement en ce que, quand un système quelconque de corps pesans est dans sa situation d'équilibre, son centre de gravité est nécessairement placé au point le plus bas ou le plus haut possible, comparativement à toutes les positions qu'il pourrait prendre d'après toute autre situation du système. Torricelli a d'abord présenté cette propriété comme immédiatement vérifiée par les conditions

d'équilibre connues de tous les systèmes de poids considérés jusqu'alors. Mais les considérations générales d'après lesquelles il a tenté ensuite de la démontrer directement sont réellement peu satisfaisantes, et offrent un exemple sensible de la nécessité de se défier, dans les sciences mathématiques, de toute idée dont le caractère n'est point parfaitement précis, quelque plausible qu'elle puisse d'ailleurs paraître. En effet le raisonnement de Torricelli consiste essentiellement à remarquer que la tendance naturelle du poids étant de descendre, il y aura nécessairement équilibre si le centre de gravité se trouve placé le plus bas possible. L'insuffisance de cette considération est évidente, puisqu'elle n'explique point pourquoi il y a également équilibre quand le centre de gravité est placé le plus haut possible, et qu'elle tendrait même à démontrer que ce second cas d'équilibre ne peut exister, tandis que, sous le point de vue théorique, il est aussi réel que le premier, quoique, par le défaut de stabilité, on ait rarement occasion de l'observer dans la pratique. Ainsi, pour choisir un exemple très-simple, la loi d'équilibre d'un pendule exige que le centre de gravité du poids soit placé sur la verticale menée par le point de suspension, ce qui offre une vérification palpable du théorème de Torricelli ; mais, quand on fait abstraction de la stabilité, il est évident que ce centre de gravité peut d'ailleurs être indifféremment au-dessus ou au-dessous du point de suspension, l'équilibre ayant également lieu dans les deux cas.

La véritable démonstration générale du théorème de Torricelli consiste à le déduire du principe fondamental des vitesses virtuelles, qui le fournit immédiatement avec la plus grande facilité. Il suffit, en effet, pour cela, d'appliquer directement ce principe à l'équilibre d'un système quelconque de corps pesans, à l'égard duquel il donne aussitôt l'équation

$$\int P\,dz = 0,$$

où P désigne un quelconque des poids, et z la hauteur verticale de son centre de gravité. Or, d'après la définition générale du centre de gravité de tout système de poids, on a évidemment en nommant $P_{\prime}$ le poids total du système, et $z_{\prime}$ l'ordonnée verticale de son centre de gravité, la relation

$$\int P\,dz = P_{\prime}\,dz_{\prime}.$$

Ainsi l'équation des vitesses virtuelles devient, dans ce cas, $dz_{\prime} = 0$; ce qui, conformément à la théorie analytique générale des *maxima* et *minima*, démontre immédiatement que la hauteur

verticale du centre de gravité du système est alors un *maximum* ou un *minimum*, comme l'indique le théorème de Torricelli.

Cette importante propriété, indépendamment du grand intérêt qu'elle présente sous le point de vue physique, peut même être avantageusement employée pour faciliter la solution générale de plusieurs problèmes essentiels de statique rationnelle, relativement aux corps pesans. Ainsi, par exemple, elle suffit à l'entière résolution de la célèbre question de la *chaînette*, c'est-à-dire de la figure que prend une chaîne pesante suspendue à deux points fixes, et ensuite librement abandonnée à la seule influence de la gravité, en la supposant parfaitement flexible, et de plus inextensible. En effet, le théorème de Torricelli indiquant alors que le centre de gravité doit être placé le plus bas possible, le problème appartient immédiatement à la théorie générale des isopérimètres, indiquée dans la huitième leçon, puisqu'il se réduit à déterminer, parmi toutes les courbes de même contour tracées entre les deux points fixes donnés, quelle est celle qui jouit de cette propriété caractéristique, que la hauteur verticale de son centre de gravité totale soit un *minimum*, condition qui suffit pour déterminer complétement, à l'aide du calcul des variations, l'équation différentielle, et ensuite l'équation finie de la courbe cherchée. Il en est de même dans quelques autres questions intéressantes relatives à l'équilibre des poids.

Le théorème de Torricelli a éprouvé plus tard une importante généralisation par les travaux de Maupertuis, qui, sous le nom de *loi du repos*, a découvert une propriété très-étendue de l'équilibre, dont celle ci-dessus considérée n'est plus qu'un simple cas particulier. C'est seulement à la pesanteur terrestre, ou à la gravité proprement dite, que s'applique la loi trouvée par Torricelli. Celle de Maupertuis s'étend, au contraire, à toutes les forces attractives qui peuvent faire tendre les corps d'un système quelconque vers des centres fixes, ou les uns vers les autres, suivant une fonction quelconque de la distance, indépendante de la direction, ce qui comprend toutes les grandes forces naturelles. On sait que, dans ce cas, l'expression $P\delta p + P'\delta p' +$ etc., qui forme le premier membre de l'équation générale des vitesses virtuelles, se trouve nécessairement être toujours une différentielle exacte. Par conséquent, le principe des vitesses virtuelles consiste alors proprement en ce que la variation de son intégrale est nulle, ce qui indique évidemment, d'après la théorie fondamentale des *maxima* et *minima*, que cette intégrale $\int P\delta p$ est constamment, dans le cas d'équilibre, un *maximum* ou un *minimum*.

C'est en cela que consiste la loi de Maupertuis, considérée sous le point de vue le plus général, et déduite ainsi directement avec une extrême simplicité du principe fondamental des vitesses virtuelles, qui doit nécessairement renfermer implicitement toutes les propriétés auxquelles peut donner lieu la théorie de l'équilibre. Le théorème de Maupertuis a été présenté par Lagrange sous un aspect plus concret et plus remarquable, en le rattachant à la notion des *forces vives*, dont nous nous occuperons plus bas. Lagrange, considérant que l'intégrale $\int P\delta p$ envisagée par Maupertuis est nécessairement toujours, d'après la théorie analytique générale du mouvement, le complément de la somme des forces vives du système à une certaine constante, en a conclu que cette somme de forces vives est un *minimum* lorsque l'intégrale précédente est un *maximum*, et réciproquement. D'après cela, le théorème de Maupertuis peut être envisagé plus simplement comme consistant en ce que la situation d'équilibre d'un système quelconque est constamment celle dans laquelle la somme des forces vives se trouve être un *maximum* ou un *minimum*. Il est évident que, dans le cas particulier de la pesanteur terrestre, cette loi coïncide exactement avec celle de Torricelli, la force vive étant alors égale, comme on sait, au produit du poids par la hauteur verticale du centre de gravité, laquelle doit donc devenir nécessairement un *maximum* ou un *minimum*, s'il y a équilibre.

Une autre propriété générale très-remarquable de l'équilibre, qui peut être regardée comme le complément indispensable du théorème de Torricelli et de Maupertuis, consiste dans la distinction fondamentale des cas de *stabilité* ou d'*instabilité* de l'équilibre. On sait que l'équilibre peut être *stable* ou *instable*, c'est-à-dire que le corps, infiniment peu écarté de sa situation d'équilibre, peut tendre à y revenir, et y retourne en effet après un certain nombre d'oscillations bientôt anéanties par la résistance du milieu, les frottemens, etc., ou bien qu'il tend, au contraire, à s'en éloigner de plus en plus, pour ne s'arrêter que dans une nouvelle position d'équilibre stable. Ce que nous appelons physiquement l'état de *repos* d'un corps n'est réellement autre chose que l'*équilibre stable*, car le *repos* abstrait, tel que les géomètres le conçoivent, lorsqu'ils supposent un corps qui ne serait sollicité par aucune force, ne saurait évidemment exister dans la nature, où il ne peut y avoir que des équilibres plus ou moins durables. L'équilibre *instable*, au contraire, constitue effectivement ce que le vulgaire appelle proprement *équilibre*, qui désigne toujours un état plus ou moins passager et artificiel.

La propriété générale que nous considérons maintenant, et dont la démonstration complète est due à Lagrange, consiste en ce que, dans un système quelconque, l'équilibre est *stable* ou *instable*, suivant que l'intégrale envisagée par Maupertuis, et qui a été indiquée ci-dessus, se trouve être un *minimum* ou un *maximum;* ou, ce qui revient au même, comme nous l'avons dit, suivant que la somme des forces vives est un *maximum* ou un *minimum*. Ce beau théorème de mécanique, appliqué au cas le plus simple et le plus remarquable, à celui de l'équilibre des corps pesans considéré par Torricelli, apprend alors que le système est dans un état d'équilibre stable, quand le centre de gravité est placé le plus bas possible, et dans un état d'équilibre instable quand, au contraire, le centre de gravité est placé le plus haut possible, ce qu'il est aisé de vérifier directement pour les systèmes les moins compliqués. Ainsi, par exemple, l'équilibre d'un pendule est évidemment stable, quand le centre de gravité du poids se trouve être situé au dessus du point de suspension, et instable quand il est au dessous. De même, un ellipsoïde de révolution, posé sur un plan horizontal, est en équilibre stable quand il repose sur le sommet de son petit axe, et en équilibre instable quand c'est sur le sommet de son grand axe. La seule observation aurait suffi sans doute pour distinguer les deux états dans des cas aussi simples. Mais la théorie la plus profonde a été nécessaire pour dévoiler aux géomètres que cette distinction fondamentale était également applicable aux systèmes les plus composés, en montrant que lorsque l'intégrale relative à la somme des momens virtuels est un *minimum*, le système ne peut faire autour de sa situation d'équilibre que des oscillations très-petites et dont l'étendue est déterminée, tandis que, si cette intégrale est, au contraire, un *maximum*, ces oscillations peuvent acquérir et acquièrent en effet une étendue finie et quelconque. Il est d'ailleurs inutile d'avertir que, par leur nature, ces propriétés, ainsi que les précédentes, ont lieu dans les fluides tout aussi bien que dans les solides, ce qui est également le caractère de toutes les propriétés mécaniques générales à l'examen desquelles nous avons destiné cette leçon.

Considérons maintenant les théorèmes généraux de mécanique relatifs au mouvement.

Depuis que ces propriétés ont cessé d'être envisagées comme autant de *principes*, et qu'on n'y a vu que de simples résultats nécessaires des théories dynamiques fondamentales, la manière la plus directe et la plus convenable de les établir consiste à les présenter, ainsi que l'a fait Lagrange,

comme des conséquences immédiates de l'équation générale de la dynamique, déduite de la combinaison du principe d'Alembert avec le principe des vitesses virtuelles, telle que nous l'avons exposée dans la leçon précédente. On doit mettre au nombre des avantages les plus sensibles de cette méthode, comme Lagrange l'a justement remarqué, cette facilité qu'elle offre pour la démonstration de ces grands théorèmes de dynamique dans leur plus grande généralité, démonstration à laquelle on ne pouvait autrement parvenir que par des considérations indirectes et fort compliquées. Néanmoins la nature de ce cours nous interdit d'indiquer spécialement ici chacune de ces démonstrations, et nous devons nous borner à considérer seulement les divers résultats.

Le premier théorème général de dynamique est celui que Newton a découvert relativement au mouvement du centre de gravité d'un système quelconque, et qui est habituellement connu sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*. Newton a reconnu le premier et démontré par des considérations extrêmement simples, au commencement de son grand traité des *principes mathématiques de la philosophie naturelle*, que l'action mutuelle des corps d'un système les uns sur les autres, soit par attraction, soit par impulsion, en un mot d'une manière quelconque, en ayant convenablement égard à l'égalité constante et nécessaire entre la réaction et l'action, ne peut nullement altérer l'état du centre de gravité, en sorte que, s'il n'y a pas d'autres forces accélératrices que ces actions réciproques, et si les forces extérieures du système se réduisent seulement à des forces instantanées, le centre de gravité restera toujours immobile ou se mouvera uniformément en ligne droite. D'Alembert a, depuis, généralisé cette propriété, et prouvé que, quelqu'altération que puisse introduire l'action mutuelle des corps du système dans le mouvement de chacun d'eux, le centre de gravité n'en est jamais affecté, et que son mouvement a constamment lieu comme si toutes les forces du système y étaient directement appliquées parallèlement à leur direction, quelles que soient les forces extérieures de ce système, et en supposant seulement qu'il ne présente aucun point fixe. C'est ce qu'il est aisé de démontrer, en développant, dans la formule générale de la dynamique, les équations relatives au mouvement de translation, qui, par la propriété analytique fondamentale du centre de gravité, se trouvent coïncider avec celles qu'aurait fourni le mouvement isolé de ce centre si la masse totale du système y eût été supposée con-

densée, et qu'on l'eût conçue animée de toutes les forces extérieures du système. Le principal avantage de ce beau théorème est de pouvoir ainsi, en ce qui concerne le mouvement du centre de gravité, faire rentrer le cas d'un corps ou d'un système quelconque dans celui d'une molécule unique. Comme le mouvement de translation d'un système doit être estimé par le mouvement de son centre de gravité, on parvient donc de cette manière à réduire la seconde partie de la dynamique à la première pour tout ce qui se rapporte aux mouvemens de translation, d'où résulte, ainsi qu'il est aisé de le sentir, une importante simplification dans la solution de tout problème dynamique particulier, puisqu'on peut alors négliger, dans cette partie de la recherche, les effets de l'action mutuelle de tous les corps proposés, dont la détermination constitue ordinairement la principale difficulté de chaque question.

On ne se fait pas communément une assez juste idée de l'entière généralité théorique des grands résultats de la mécanique rationnelle, qui sont nécessairement applicables, par eux-mêmes, à tous les ordres de phénomènes naturels, puisque nous avons reconnu que les lois fondamentales sur lesquelles repose tout l'édifice systématique de la science ne souffrent d'exception dans aucune classe quelconque de phénomènes, et constituent les faits les plus généraux de l'univers réel, quoiqu'on paraisse ordinairement, dans ce genre de conceptions, avoir seulement en vue le monde inorganique. Aussi est-il à propos, ce me semble, de faire remarquer formellement ici, au sujet de cette première propriété générale du mouvement, que le théorème a également lieu dans les corps vivans comme dans les corps inanimés. Quelle que puisse être, en effet, la nature des phénomènes qui caractérisent les corps vivans, ils ne sauraient consister tout au plus qu'en certaines actions particulières des molécules les unes sur les autres, qui ne s'observeraient point dans les corps bruts, sans qu'on doive douter d'ailleurs que la réaction y soit toujours, aussi bien qu'en tout autre cas, égale au contraire à l'action. Ainsi, par la nature même du théorème que nous venons de considérer, il doit nécessairement se vérifier aussi bien pour les corps vivans que pour les corps bruts, puisque le mouvement du centre de gravité est indépendant de ces actions intérieures mutuelles. Il en résulte, par exemple, qu'un corps vivant, quel que soit le jeu interne de ses organes, ne saurait de lui-même déplacer son centre de gravité, quoiqu'il puisse faire exécuter à quelques-uns de ses points certains mouvemens partiels autour de ce centre. Ne vérifie-t-on pas clairement, en effet, que la locomotion totale d'un corps vivant serait entièrement impossible sans le secours extérieur que lui fournit la ré-

sistance et le frottement du sol sur lequel il se meut, ou du fluide qui le contient? On peut faire des remarques exactement analogues, relativement à toutes les autres propriétés dynamiques générales qui nous restent à considérer, et pour chacune desquelles je me dispenserai, par conséquent, d'indiquer spécialement son applicabilité nécessaire aux corps vivans aussi bien qu'aux corps inertes.

Le second théorème général de dynamique consiste dans le célèbre et important *principe des aires*, dont la première idée est due à Képler, qui découvrit et démontra fort simplement cette propriété pour le cas du mouvement d'une molécule unique, ou en d'autres termes, d'un corps dont tous les points se meuvent identiquement. Képler établit, par les considérations les plus élémentaires, que si la force accélératrice totale dont une molécule est animée tend constamment vers un point fixe, le rayon vecteur du mobile décrit autour de ce point des aires égales en temps égaux, de telle sorte que l'aire décrite au bout d'un temps quelconque croît proportionnellement à ce temps. Il fit voir en outre que, réciproquement, si une semblable relation a été vérifiée dans le mouvement d'un corps par rapport à un certain point, c'est une preuve suffisante de l'action sur ce corps d'une force dirigée sans cesse vers ce point. Cette belle propriété se déduit d'ailleurs très-aisément des équations générales du mouvement curviligne d'une molécule, exposées dans la leçon précédente, en plaçant l'origine des coordonnées au centre des forces, et considérant l'expression de l'aire décrite sur l'un quelconque des plans coordonnés par la projection correspondante du rayon vecteur du mobile. Cette découverte de Képler est d'autant plus remarquable qu'elle a eu lieu avant que la dynamique eût été réellement créée par Galilée. Nous aurons occasion de remarquer, dans la partie astronomique de ce cours, que Képler ayant reconnu que les rayons vecteurs des planètes décrivent autour du soleil des aires proportionnelles aux temps, ce qui constitue la première de ses trois grandes lois astronomiques, en conclut ainsi que les planètes sont continuellement animées d'une tendance vers le soleil, dont il était réservé à Newton de découvrir la loi.

Mais, quelle que soit l'importance de ce premier théorème des aires, qui est ainsi une des bases essentielles de la mécanique céleste, on ne doit plus y voir aujourd'hui que le cas particulier le plus simple du grand théorème général des aires, découvert presque simultanément et sous des formes différentes par d'Arcy, par Daniel

Bernouilli et par Euler, vers le milieu du siècle dernier. La découverte de Képler n'était relative qu'au mouvement d'un point : celle de d'Arcy se rapporte au mouvement de tout système quelconque de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, ce qui constitue un cas, non-seulement plus compliqué, mais même essentiellement différent, à cause de ces actions mutuelles. Le théorème consiste alors en ce que, par suite de ces influences réciproques, l'aire que décrira séparément le rayon vecteur de chaque molécule du système à chaque instant autour d'un point quelconque pourra bien être altérée, mais que la somme algébrique des aires ainsi décrites par les projections sur un plan quelconque des rayons vecteurs de toutes les molécules, en donnant à chacune de ces aires le signe convenable d'après la règle ordinaire, ne souffrira aucun changement, en sorte que, s'il n'y a pas d'autres forces accélératrices dans le système que ces actions mutuelles, cette somme des aires décrites demeurera invariable en un temps donné, et croîtra par conséquent proportionnellement au temps. Quand le système ne présente aucun point fixe, cette propriété remarquable a lieu relativement à un point quelconque de l'espace; tandis qu'elle se vérifie seulement en prenant le point fixe pour centre des aires, si le système en offre un. Enfin, lorsque les corps du système sont animés de forces accélératrices extérieures, si ces forces tendent constamment vers un même point, le théorème des aires subsiste encore, mais uniquement à l'égard de ce point. Cette dernière partie de la proposition générale fournit évidemment comme cas particulier, le théorème de Képler, en supposant que le système se réduise à une seule molécule.

Dans l'application de ce théorème, on remplace ordinairement la somme des aires correspondantes à toutes les molécules du système par la somme équivalente des produits de la masse de chaque corps par l'aire qui s'y rapporte, ce qui dispense de partager le système en molécules de même masse.

Telle est la forme sous laquelle le théorème général des aires a été découvert par d'Arcy; c'est celle qu'on emploie habituellement. Comme l'aire décrite par le rayon vecteur de chaque corps dans un instant infiniment petit, est évidemment proportionnelle au produit de la vitesse de ce corps par sa distance au point fixe que l'on considère, on peut substituer à la somme des aires la somme des *momens* par rapport à ce point de toutes les forces du système projetées sur un même plan quelconque. Sous ce point de vue, le théorème des aires présente, suivant la remarque

de Laplace, une propriété générale du mouvement analogue à une de celles de l'équilibre, puisqu'il consiste alors en ce que cette somme des momens, nulle dans le cas de l'équilibre, est constante dans le cas du mouvement. C'est ainsi que ce théorème a été trouvé par Euler et par Daniel Bernouilli.

Quelle que soit l'interprétation concrète qu'on juge convenable de lui donner, il est une simple conséquence analytique directe de la formule générale de la dynamique. Il suffit, pour l'en déduire, de développer cette formule en formant les équations qui se rapportent au mouvement de rotation, et dans lesquelles on apercevra immédiatement l'expression analytique du théorème des aires ou des momens, en ayant égard aux conditions ci-dessus indiquées. Sous le rapport analytique, on peut dire que l'utilité de ce théorème consiste essentiellement à fournir dans tous les cas trois intégrales premières des équations générales du mouvement qui sont par elles-mêmes du second ordre, ce qui tend à faciliter singulièrement la solution définitive de chaque problème dynamique particulier.

Le théorème des aires suffit pour déterminer, dans le mouvement général d'un système quelconque, tout ce qui se rapporte aux mouvemens de rotation, comme le théorème du centre de gravité détermine tout ce qui est relatif aux mouvemens de translation. Ainsi, par la seule combinaison de ces deux propriétés générales, on pourrait procéder à l'étude complète du mouvement d'un système quelconque de corps, soit quant à la translation, soit quant à la rotation.

Je ne dois pas négliger de signaler sommairement ici, au sujet du théorème des aires, la clarté inespérée et la simplicité admirable que M. Poinsot y a introduites en y appliquant sa conception fondamentale relative aux mouvemens de rotation, que nous avons considérée sous le point de vue statique dans la seizième leçon. En substituant aux aires, ou aux momens considérés jusqu'alors par les géomètres, les couples qu'engendrent les forces proposées, M. Poinsot a fait éprouver à cette théorie un perfectionnement philosophique très-important, qui ne me paraît pas encore avoir été suffisamment senti. Il a donné ainsi une valeur concrète, un sens dynamique propre et direct, à ce qui n'était auparavant qu'un simple énoncé géométrique d'une partie des équations fondamentales du mouvement. Une aussi heureuse transformation générale est destinée, sans doute, à accroître nécessairement les ressources de l'esprit humain pour l'élaboration des idées dynamiques, en tout ce qui concerne la théorie des mouvemens de rotation. On peut voir

dans le beau mémoire de M. Poinsot sur les propriétés des momens et des aires, qui se trouve annexé à sa *Statique*, avec quelle facilité il est parvenu, d'après cette lumineuse conception, non-seulement à rendre élémentaire une théorie jusqu'alors fondée sur la plus haute analyse, mais à découvrir à cet égard de nouvelles propriétés générales très-remarquables, que nous ne devons point considérer ici, et qu'il eût été difficile d'obtenir par les méthodes antérieures.

Le théorème des aires a été, pour l'illustre Laplace, l'origine de la découverte d'une autre propriété dynamique très-remarquable, celle de ce qu'il a nommé le *plan invariable*, dont la considération est surtout si importante dans la mécanique céleste. La somme des aires projetées par tous les corps du système sur un plan quelconque étant constante en un temps donné, Laplace a cherché la direction du plan à l'égard duquel cette somme se trouvait être la plus grande possible. Or, d'après la manière dont ce plan de la plus grande aire ou du plus grand moment est déterminé, Laplace a démontré que sa direction est nécessairement indépendante de la réaction mutuelle des différentes parties du système, en sorte que, par sa nature, ce plan doit rester continuellement invariable, quelles que puissent jamais être les altérations introduites dans la situation de ces corps par leurs influences réciproques, pourvu qu'il ne survienne aucune nouvelle force extérieure. On conçoit aisément de quelle importance doit être, comme nous l'expliquerons spécialement dans la seconde partie de ce cours, la détermination d'un tel plan relativement à notre système solaire, puisque, en y rapportant tous nos mouvemens célestes, il nous procure l'inappréciable avantage d'avoir un terme de comparaison nécessairement fixe, à travers tous les dérangemens que l'action mutuelle de nos planètes pourra faire subir dans la suite des temps à leurs distances, à leurs révolutions et même aux plans de leurs orbites, ce qui est une première condition évidemment indispensable pour que nous puissions exactement connaître en quoi consistent ces altérations. Malheureusement nous aurons occasion de remarquer que l'incertitude où nous sommes jusqu'ici relativement à la valeur exacte de plusieurs données essentielles, ne nous permet pas encore de déterminer avec toute la précision suffisante la situation de ce plan. Mais cette difficulté d'application n'affecte en aucune manière le caractère de ce beau théorème, considéré sous le point de vue de la mécanique rationnelle, le seul que nous devions adopter ici.

La théorie du plan invariable a été notablement perfectionnée dans ces derniers temps par M. Poinsot, qui a dû naturellement y transporter sa conception propre relativement à la théorie générale des aires ou des momens. Il a d'abord considérablement simplifié la notion fondamentale de ce plan, de façon à la rendre aussi élémentaire qu'il est possible, en montrant qu'un tel plan n'est réellement autre chose que le plan du couple général résultant de tous les couples engendrés par les différentes forces du système, ce qui le définit immédiatement par une propriété dynamique très-sensible, au lieu de la seule propriété géométrique du maximum des aires. Quand une conception quelconque a été vraiment simplifiée dans sa nature, l'élaboration en étant par cela même facilitée, elle ne saurait manquer de prendre plus d'extension et de conduire à des résultats nouveaux : telle est, en effet, la marche ordinaire de l'esprit humain dans les sciences, que les théories les plus fécondes en découvertes n'ont été le plus souvent, à leur origine, qu'un moyen de rendre plus simple la solution de questions déjà traitées. Le travail que nous considérons ici en a offert une nouvelle preuve. Car la théorie de M. Poinsot a permis d'introduire un plus haut degré de précision dans la détermination du plan invariable propre à notre système solaire, en signalant et rectifiant une importante lacune que Laplace y avait laissée. Ce grand géomètre, en calculant la situation du plan du *maximum* des aires, avait cru ne devoir prendre en considération que les aires principales, produites par la circulation des planètes autour du soleil, sans tenir aucun compte de celles dues aux mouvemens des satellites autour des planètes, ou à la rotation de tous ces astres et du soleil lui-même. M. Poinsot vient de prouver la nécessité d'avoir égard à ces divers élémens, sans quoi le plan ainsi déterminé ne pourrait point être regardé comme rigoureusement invariable; et en cherchant la direction du véritable plan invariable aussi exactement que le comporte l'imperfection actuelle de la plupart des données, il a fait voir que ce plan diffère sensiblement de celui trouvé par Laplace; ce qu'il est facile de concevoir par la seule considération de l'aire immense que doit introduire dans le calcul la masse énorme du soleil, quoique sa rotation soit très-lente.

Pour compléter l'indication des propriétés dynamiques les plus importantes relatives au mouvement de rotation, il convient maintenant de signaler ici les beaux théorèmes découverts par Euler sur ce qu'il a nommé les *momens d'inertie* et les *axes principaux*, qu'on doit mettre au nombre des résultats généraux les plus importans de la mécanique rationnelle. Euler a donné le nom de *moment d'inertie* d'un corps à l'intégrale qui exprime la somme des produits de la masse de

chaque molécule par le carré de sa distance à l'axe autour duquel le corps tourne, intégrale dont la considération doit évidemment être très-essentielle, puisqu'elle peut être naturellement regardée comme la mesure exacte de l'énergie de rotation du corps. Quand la masse proposée est homogène, ce moment d'inertie se détermine comme les autres intégrales analogues relatives à la forme d'un corps; lorsque, au contraire, cette masse est hétérogène, il faut de plus connaître la loi de la densité dans les diverses couches qui la composent, et, à cela près, l'intégration n'est alors seulement que plus compliquée. Cette notion étant établie, Euler, comparant, en général, les momens d'inertie d'un même corps quelconque par rapport à tous les axes de rotation imaginables passant en un point donné, détermina les axes relativement auxquels le moment d'inertie doit être un *maximum* ou un *minimum*, en considérant surtout ceux qui se coupent au centre de gravité, et qui se distinguent en ce qu'ils produisent nécessairement des momens moindres que si, avec la même direction, ils étaient placés partout ailleurs. Il découvrit ainsi qu'il existe constamment, en un point quelconque d'un corps, et particulièrement au centre de gravité, trois axes rectangulaires, tels que le moment d'inertie du corps est un *maximum* à l'égard de l'un d'entre eux, et un *minimum* à l'égard d'un autre. Ces axes sont d'ailleurs caractérisés par une autre propriété commune qui leur sert habituellement aujourd'hui de définition analytique, et qui constitue, en effet, pour l'analyse, le principal avantage que l'on trouve à rapporter le mouvement du corps à ces trois axes. Cette propriété consiste en ce que, lorsque ces trois axes sont pris pour ceux des coordonnées x, y, z, les intégrales $\int xzdm$, $\int xydm$, $\int yzdm$ (m exprimant la masse du corps), sont nulles relativement au corps tout entier, ce qui simplifie notablement les équations générales du mouvement de rotation. Mais le principal théorème dynamique découvert par Euler à l'égard de ces axes, et d'après lequel il les a justement appelés *axes principaux de rotation*, consiste dans la stabilité des rotations qui leur correspondent; c'est-à-dire, que si le corps a commencé à tourner autour d'un de ces axes, cette rotation persistera indéfiniment de la même manière, ce qui n'aurait pas lieu pour tout autre axe quelconque, la rotation instantanée s'exécutant en général autour d'un axe continuellement variable. Ce système des axes principaux est généralement unique dans chaque corps : cependant, si tous les momens d'inertie étaient constamment égaux entre eux, la direction de ces axes deviendrait totalement indéterminée, pourvu qu'on les choisît toujours per-

pendiculaires entre eux, ce qui a lieu, par exemple, dans une sphère homogène, où l'on peut regarder comme des axes permanens de rotation tous les systèmes d'axes rectangulaires passant par le centre. Il y aurait encore un certain degré d'indétermination si le corps était un solide de révolution, l'axe géométrique étant alors un des axes dynamiques principaux ; mais les deux autres pouvant évidemment être pris à volonté dans un plan perpendiculaire au premier. La détermination des axes principaux présente souvent de grandes difficultés en considérant des corps de figure et de constitution quelconques ; mais elle s'effectue avec une extrême facilité dans les cas peu compliqués, que la mécanique céleste nous présente heureusement comme les plus communs. Par exemple dans un ellipsoïde homogène, ou même seulement composé de couches semblables et concentriques d'inégale densité, mais dont chacune est homogène, les trois diamètres conjugués rectangulaires sont eux-mêmes les axes dynamiques principaux : le moment d'inertie du corps est un *maximum* relativement du plus petit de ces diamètres, et un *minimum* à l'égard du plus grand. Quand les axes principaux d'un corps ou d'un système sont déterminés ainsi que les momens d'inertie correspondans, si le système ne tourne pas autour de l'un de ces axes, Euler a établi des