puis combien était exacte la découverte de Képler, qui d'ailleurs, avait déjà donné à cet égard les preuves les plus irrécusables, en construisant, d'après ses deux premières lois, les célèbres tables rudolphines, qui représentaient l'ensemble des observations avec bien plus de précision que toutes les tables antérieures.

Troisième loi. Les deux lois précédentes déterminent entièrement la course de chaque planète, considérée séparément, d'après le petit nombre de constantes nécessaires pour la caractériser. Mais, les mouvemens des diverses planètes autour du foyer commun restaient encore complètement isolés les uns des autres, toutes ces constantes paraissant avoir des valeurs essentiellement arbitraires. Képler, qui, de tous les hommes peut-être, a possédé au plus haut degré le génie analogique, chercha (ce que les anciens n'avaient jamais tenté, même grossièrement) à établir entre tous ces mouvemens si différens, une certaine harmonie exacte et fondamentale. Tel est l'objet de sa troisième loi.

Plusieurs philosophes ont pensé (et j'avoue l'avoir d'abord cru moi-même), que les vagues conceptions de la métaphysique sur les harmonies mystiques de l'univers n'avaient pas été inutiles à cette sublime découverte, en excitant les re-

cherches de Képler sur la relation entre les temps périodiques des diverses planètes et leurs moyennes distances. Mais, en examinant plus profondément ce point intéressant de l'histoire de l'esprit humain, il est aisé, ce me semble, de se convaincre du contraire. Long-temps avant Képler, la philosophie métaphysique avait entièrement cessé d'avoir, en astronomie, aucune utilité réelle. Elle n'eût pu servir, en cette occasion, qu'à soutenir la constance de ses travaux, par la persuasion préalable de l'existence certaine d'une harmonie quelconque à cet égard. Or, sous ce rapport, elle était complètement inutile, puisque beaucoup d'astronomes avaient déjà remarqué que les révolutions planétaires sont toujours d'autant plus lentes que les orbites ont plus d'étendue, ce qui suffisait, évidemment, à Képler, pour motiver, à ce sujet, une recherche mathématique. Il est clair, au contraire, que les considérations métaphysiques ont considérablement retardé sa marche, en lui faisant chercher avec une longue obstination, des harmonies qui ne pouvaient avoir aucune réalité. En suivant d'abord la direction positive, comme il finit par le faire, après s'être si long-temps égaré dans ces recherches chimériques, sa découverte n'eût certainement point exigé dix-sept ans de travaux assidus. Ayant préalablement reconnu que les temps périodiques des diverses planètes croissent plus rapidement que leurs moyennes distances au soleil, il suffisait d'essayer successivement, parmi les diverses puissances du demi-grand axe, celle à laquelle la durée de la révolution devait être proportionnelle. L'ensemble des données du problème excluait d'abord les puissances entières, en montrant que les temps périodiques croissent moins rapidement que les quarrés des moyennes distances. Képler était ainsi naturellement conduit à essayer l'exposant $\frac{3}{2}$, le plus simple de tous les exposans entre 1 et 2. C'est par là qu'il découvrit enfin que les quarrés des temps des révolutions sidérales de toutes les diverses planètes sont exactement proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites : loi que les observations postérieures ont toujours entièrement confirmée. On voit que les conceptions métaphysiques furent, en réalité, parfaitement étrangères à sa découverte, et que, loin d'y guider Képler, elles l'en détournèrent long-temps.

Outre la destination fondamentale de cette grande loi pour la mécanique céleste, comme nous l'indiquerons dans la leçon suivante, elle présente évidemment, en géométrie céleste, cette importante propriété directe, de permettre de

déterminer, l'un par l'autre, le temps périodique et la moyenne distance de toutes les diverses planètes, quand ces deux élémens ont été d'abord bien observés à l'égard d'une seule planète quelconque. C'est ainsi, par exemple, qu'on a pu évaluer très promptement la durée de la révolution d'Uranus, une fois que sa distance au soleil a été mesurée, sans avoir besoin d'attendre l'accomplissement si lent d'une révolution entière, qui a seulement servi plus tard à confirmer le résultat primitif. De même, en sens inverse, si l'on venait à découvrir quelque nouvelle planète très rapprochée du soleil, il suffirait d'observer la durée très courte de sa révolution sidérale, pour en conclure immédiatement la valeur de sa distance, dont la détermination directe serait alors embarrassante. Les astronomes font continuellement usage de cette double faculté, que la troisième loi de Képler leur a procurée.

Telles sont les trois lois générales qui serviront éternellement de base à la géométrie céleste pour l'étude rationnelle des mouvemens planétaires, et qui régissent aussi, exactement de la même manière, les mouvemens des satellites autour de leurs planètes, en plaçant l'origine des aires ou le foyer de l'ellipse au centre de la planète correspondante. Depuis que l'admirable génie de Képler nous les a dévoilées, le nombre total des astres de notre monde, sans même y comprendre les comètes, a plus que triplé ; et cette multiplicité d'épreuves aussi inattendues n'a fait que confirmer successivement de plus en plus leur profonde justesse. Leur ensemble a réduit toute notre détermination des mouvemens de translation de ces corps, à un simple problème de géométrie (dont les difficultés abstraites sont d'ailleurs considérables), qui n'emprunte plus à l'observation directe que les données fondamentales strictement indispensables : ce qui a imprimé à l'astronomie un caractère profondément rationnel. Ces données sont, pour chaque astre, au nombre de six : 1°. deux, déjà envisagées dans la vingt-unième leçon, relativement au plan de l'orbite, déterminé habituellement par la longitude de l'un ou l'autre nœud, et par l'inclinaison à l'écliptique; 2°. la longitude du périhélie, qui fixe la direction de l'orbite dans son plan; 3°. le rapport de la distance focale au grand axe, qui caractérise la forme de l'ellipse décrite; 4°. la moyenne distance au soleil, c'est-à-dire le demi-grand axe de cette ellipse, qui définit entièrement sa grandeur; 5°. enfin, la durée de la révolution sidérale, indiquant suffisamment la vitesse moyenne

de l'astre. Nous devons regarder, dans cette leçon, tous ces élémens fondamentaux comme rigoureusement constans, l'étude des légères variations qu'ils subissent progressivement étant le principal objet définitif de la mécanique céleste, quoique plusieurs aient d'abord été appréciées, avec plus ou moins d'exactitude, par la simple observation directe. D'après ces élémens, il suffit de connaître une seule position de chaque astre, pour que toute sa course se trouve être géométriquement définie : ce que les astronomes font ordinairement, en se bornant à indiquer la longitude de l'astre à une époque donnée.

Quoiqu'il soit évident, en thèse générale, que l'étude des mouvemens intérieurs de notre monde est ainsi entièrement tombée sous le ressort de la géométrie abstraite, il n'en est pas moins indispensable de considérer ici la nature spéciale de ce grand problème géométrique, suivant les principaux cas généraux qu'il doit présenter, sans entrer d'ailleurs dans aucun détail de solution, incompatible avec l'esprit et la destination de cet ouvrage. Il faut distinguer, à cet effet, trois cas essentiels, que je range ici dans l'ordre astronomique de leur difficulté croissante : le cas des planètes proprement dites, celui des satellites, et enfin celui des comètes. Nous devons nous borner ici à caractériser nettement les différences essentielles que présente à cet égard le problème général de la géométrie céleste. En outre, on doit reconnaître préalablement que, par sa nature, ce problème se décompose toujours en deux questions distinctes, inverses l'une de l'autre : 1°. étant donnés les élémens astronomiques de l'orbite, déterminer tout ce qui concerne la course entière de l'astre, ce qui est la recherche la plus ordinaire à l'égard des astres anciennement connus ; 2°. réciproquement, comme on doit surtout le faire envers tout astre nouvellement étudié, trouver les valeurs de tous ces divers élémens, d'après l'observation d'une partie suffisamment étendue de la course de l'astre. Il importe fort peu d'ailleurs laquelle de ces deux questions essentielles sera placée avant l'autre.

Problème des planètes. La difficulté bien moindre que présente l'étude géométrique des mouvemens des planètes proprement dites résulte uniquement de la faible excentricité de leurs orbites, et de la petite inclinaison des plans correspondans, seuls caractères essentiels qui, aux yeux des astronomes, les distinguent réellement des comètes. Ces deux circonstances caractéristiques facilitent beaucoup la solution précise

du problème, en permettant, dans les divers développemens analytiques qu'elle exige, de s'en tenir aux premières puissances des inclinaisons et des excentricités. En même temps, sous le point de vue mécanique, les perturbations étant, en général, comme nous le verrons, bien plus petites, par une suite nécessaire de ces mêmes conditions, on conçoit que la solution doit naturellement avoir plus d'exactitude.

En supposant d'abord que tous les élémens astronomiques de la planète soient donnés, il est clair que, partant d'une position connue, on pourra calculer, par la combinaison des deux premières lois de Képler, en quel lieu se trouvera l'astre à telle époque, ou, au contraire, en combien de temps il se transportera de telle situation à telle autre. La difficulté consiste essentiellement dans cette question relative à la théorie de l'ellipse : trouver l'angle compris entre deux rayons vecteurs qui forment un secteur elliptique dont l'aire est donnée, ou, réciproquement, passer de l'angle à l'aire. Ce problème fondamental, si justement désigné sous le nom de *Problème de Képler,* ne peut être résolu que par approximation dans l'état présent de l'analyse mathématique, car il dépend d'une intégration qu'on ne sait point jusqu'ici effectuer en termes finis. Les astronomes emploient encore, à cet égard, des transformations géométriques essentiellement semblables à celles imaginées par Képler.

Une ellipse, dont le foyer est donné, étant suffisamment déterminée par trois quelconques de ses points, il est clair, en considérant maintenant la question inverse, que trois positions exactement observées d'une planète, doivent permettre de remonter à la connaissance de tous ses élémens astronomiques. Cette seconde recherche générale est susceptible d'une solution parfaitement rigoureuse, quoique, d'ailleurs, elle exige des calculs fort compliqués. L'orbite une fois géométriquement définie, la simple comparaison de l'aire comprise entre deux des trois rayons vecteurs primitifs, avec le temps employé par l'astre à passer de l'un à l'autre, suffira pour faire connaître, d'après la première loi de Képler, la durée totale de sa révolution, ce qui complétera la solution. Ici se reproduit d'ailleurs, dans l'évaluation de cette aire, la difficulté fondamentale du problème de Képler.

En principe, trois positions quelconques sont strictement suffisantes. Mais il est d'abord évident que, la solution étant fondée sur la différence de ces positions, les résultats seraient trop incertains si l'on ne mettait point, entre les trois observations successives un notable intervalle, dont la valeur doit naturellement augmenter à mesure qu'il s'agit d'une planète plus lointaine. En second lieu, il est indispensable de connaître un plus grand nombre de positions suffisamment distinctes, au moins cinq ou six, afin de se procurer des moyens de vérifier et de rectifier les premiers résultats par les diverses combinaisons ternaires des observations effectuées, dont le degré d'accord mesurera l'exactitude de l'opération.

Cette double nécessité entraînant le besoin d'un temps plus ou moins considérable, et, en certains cas, très long, pour l'exacte détermination définitive d'une orbite planétaire, les astronomes ont senti l'importance d'employer d'abord provisoirement, comme guide général de leurs observations, l'antique hypothèse du mouvement circulaire et uniforme, dans toute sa simplicité primitive, qui présente le précieux avantage de pouvoir être beaucoup plus facilement calculée, d'après deux positions seulement, contrôlées, tout au plus, si on le juge à propos, par une troisième. On peut même avant tout, ce qui est encore plus simple, commencer par regarder, pendant un temps très court, la route de l'astre comme rectiligne; et les astronomes l'ont fait quelquefois avec succès, pour discerner tout d'un coup, surtout envers un astre nouveau, dans quelle partie du ciel il doit être observé prochainement. Mais, c'est seulement lorsqu'on se borne à des procédés graphiques, qui suffisent à un tel but, que cette hypothèse peut être utilement employée. Quant aux calculs, l'hypothèse circulaire méritera seule d'être considérée, puisqu'elle s'y adapte avec presque autant de facilité, et que, d'ailleurs, elle représente infiniment mieux le vrai mouvement, pour une bien plus grande portion de la course totale. Quoi qu'il en soit, on voit clairement par là que l'astronomie moderne, en détruisant sans retour les hypothèses primitives, envisagées comme lois réelles du monde, a soigneusement maintenu leur valeur positive et permanente, la propriété de représenter commodément les phénomènes quand il s'agit d'une première ébauche. Nos ressources à cet égard sont même bien plus étendues, précisément à cause que nous ne nous faisons aucune illusion sur la réalité des hypothèses; ce qui nous permet d'employer sans scrupule, en chaque cas, celle que nous jugeons la plus avantageuse.

Problème des satellites. Les lois de Képler, dans leur application aux satellites, ne concernent que les mouvemens relatifs de chaque satellite autour de sa planète, envisagée comme im-

mobile. Ainsi, la difficulté supérieure du problème des satellites a évidemment pour cause fondamentale la nécessité de tenir compte du déplacement continuel du foyer de leurs orbites elliptiques, si l'on veut réellement parvenir à représenter par des tables effectives la suite de leurs positions, comme les astronomes l'ont toujours finalement en vue dans leurs travaux. A cela près, et la course de la planète correspondante étant préalablement connue, la marche générale de la solution est d'ailleurs entièrement analogue, dans l'une et l'autre des deux questions inverses, à celle ci-dessus caractérisée, puisque les mêmes circonstances essentielles, de la petitesse des excentricités et des inclinaisons, se reproduisent ici. Mais cette mobilité du foyer de l'ellipse décrite doit nécessairement compliquer beaucoup la recherche, en regardant même, ainsi qu'il convient à la leçon actuelle, tous les élémens astronomiques comme constans, quoique leurs variations soient bien plus prononcées qu'à l'égard des planètes. Heureusement l'extrême rapidité de la circulation des satellites compense un peu, dans la plupart des cas, cet accroissement général de difficulté, en permettant de déterminer, par des observations immédiates fréquemment renouvelées, leurs principaux élémens. La première approximation, qui consiste ici, en regardant d'ailleurs le mouvement comme toujours circulaire et uniforme, à négliger entièrement le déplacement de la planète pendant l'accomplissement d'une révolution entière, est peut-être même plus facile alors qu'en aucun autre cas.

La difficulté fondamentale du problème des satellites doit, évidemment, présenter des degrés très inégaux, à raison de la disproportion plus ou moins grande entre le temps périodique de chaque satellite et celui de la planète correspondante. Si l'on compare, par exemple, le premier satellite d'Uranus avec le dernier satellite de Jupiter, on voit que celui-ci emploie deux fois plus de temps que l'autre à faire le tour de sa planète, qui, d'un autre côté, circule autour du soleil sept fois plus rapidement. Il y aura donc, sans doute, beaucoup moins d'inconvénient à traiter le premier comme s'il tournait autour d'un foyer immobile; et, lorsqu'on voudra tenir compte du déplacement, son influence réelle étant bien moindre, on obtiendra par des calculs moins pénibles le même degré d'approximation. Aucun cas ne présente à cet égard, par sa nature, autant de difficultés que celui de la lune, dont la théorie a toujours fait, même sans compter les perturbations, le plus grand embarras des astronomes, et dont

cependant l'étude exacte nous importe davantage que celle de tout autre satellite. Il est clair, en effet que, le temps périodique de la lune étant seulement treize fois moindre environ que celui de la terre, le déplacement de la planète a ici une extrême influence sur les positions successives du satellite. La disproportion des deux mouvemens est infiniment supérieure envers tous les autres satellites.

Problème des comètes. Les comètes ne se distinguent essentiellement des planètes proprement dites, comme je l'ai indiqué plus haut, que par la très grande excentricité de leurs orbites, et les inclinations presque illimitées des plans qui les contiennent. La petitesse si prononcée et si constante de leurs masses, indiquée par la mécanique céleste, n'est pas même un caractère vraiment exclusif, puisque les quatre planètes télescopiques n'ont point probablement des masses supérieures à celles de presque toutes les comètes. Toutes les autres circonstances, et surtout celles qui attirent principalement l'attention vulgaire à l'égard des comètes, sont secondaires et accidentelles, et manquent d'ailleurs dans plusieurs de ces corps, outre qu'elles ne sauraient exercer aucune sorte d'influence sur leur étude astronomique. C'est même de l'extrême excentricité des orbites cométaires, comparée à la faible excentricité des orbites