

l'esprit humain en est enfin venu à regarder les lois de Képler elles-mêmes comme une sorte d'approximation, qui n'en conserve pas moins toute l'éminente valeur que nous lui avons assignée ici. Les divers élémens que ces lois supposent constants sont, en réalité, ainsi que j'ai dû déjà l'annoncer, susceptibles d'altérations plus ou moins étendues. La connaissance exacte des lois si complexes de leurs variations, constitue le principal résultat astronomique de la mécanique céleste, indépendamment de sa haute importance directe sous le rapport philosophique.

---

## VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

---

Considérations fondamentales sur la loi de la gravitation.

Beaucoup d'esprits judicieux, auxquels la saine philosophie n'est point étrangère, mais qui n'ont pas une connaissance générale assez approfondie des conceptions mathématiques, se représentent encore l'étude mécanique des corps célestes comme étant nécessairement moins positive que leur étude géométrique; parce qu'ils la confondent, sans doute, avec la recherche inaccessible de l'origine et du mode de production des mouvemens, méprise que les expressions vicieuses trop souvent employées par les géomètres semblent tendre, il est vrai, à autoriser. Cependant, les lois fondamentales du mouvement, quoique plus difficiles à découvrir que celles de l'étendue, et connues bien long-temps après elles, ne sont, incontestablement, ni moins certaines, ni moins universelles, ni d'une positivité moins évidente. Comment pourrait-il en être autrement de leur application? Tout déplacement curviligne d'un

corps quelconque, d'un astre aussi bien que d'un boulet, peut être étudié sous ces deux points de vue, également mathématiques : géométriquement, en déterminant, d'après les observations directes, la forme de la trajectoire, et la loi suivant laquelle varie la vitesse, comme Képler l'a fait pour les corps célestes; mécaniquement, en cherchant la loi du mouvement qui empêche continuellement le corps de poursuivre sa route naturelle en ligne droite, et qui, combiné à chaque instant avec sa vitesse actuelle, lui fait décrire sa trajectoire effective, dès lors susceptible d'être connue *à priori*. Ces deux recherches sont, évidemment aussi positives l'une que l'autre, et pareillement fondées sur les phénomènes. Si dans la seconde, on se sert encore quelquefois de termes qui paraissent indiquer une enquête de la nature essentielle et de la cause première des mouvemens considérés, cette habitude blâmable, dernier vestige de l'esprit métaphysique à cet égard, ne doit pourtant pas faire illusion sur le vrai caractère fondamental d'une telle étude.

A la vérité, le cas du boulet et celui de l'astre présentent entre eux cette différence essentielle, que, dans le premier, les deux mouvemens élémentaires dont se compose, à chaque instant, le mouvement effectif, sont préalablement bien

connus, ce qui ne saurait avoir lieu dans l'autre cas. Mais, cette circonstance ne fait qu'introduire, dans la théorie mécanique de l'astre, une importante difficulté préliminaire de plus, exactement compensée par la parfaite connaissance géométrique de la trajectoire, qui manque immédiatement pour le boulet. Si la loi fondamentale de la chute des poids n'eût pas été découverte d'après une étude directe, la dynamique abstraite eût pu incontestablement la déduire, d'une manière tout aussi sûre, quoique moins facile, de l'observation des divers phénomènes que présentent les mouvemens curvilignes produits par la pesanteur, qui nous fournissent effectivement la meilleure mesure du coefficient numérique de cette loi. Ce qui serait simplement facultatif à l'égard du boulet, devient forcé à l'égard de l'astre; telle est, au fond, la seule différence réelle entre les deux cas.

La mécanique céleste a donc été fondée sur une base inébranlable, quand, d'après les trois lois de Képler, désormais envisagées comme autant de faits généraux, on est parvenu à déterminer, par les règles de la dynamique rationnelle, la loi relative à la direction et à l'intensité de la force qui doit agir incessamment sur l'astre pour le détourner de sa route tangentielle. Cette loi fondamen-

tale une fois découverte, toutes les recherches astronomiques sont rentrées dans la catégorie ordinaire des problèmes de mécanique, où l'on calcule les mouvemens des corps d'après les forces dont ils sont animés. Telle est la marche admirablement philosophique suivie, avec une si complète persévérance, par le génie du grand Newton. La leçon actuelle doit être essentiellement consacrée au premier ordre de considérations; le second sera l'objet exclusif des deux leçons suivantes.

Pour se conformer rigoureusement à l'exactitude historique, il faut reconnaître, quoique cela n'altère en rien le sublime mérite des travaux de Newton, que la fondation réelle de la mécanique céleste avait été vaguement ébauchée par Képler lui-même, qui parut dignement pressentir la haute destination philosophique des lois géométriques qu'il avait établies. Il poussa, ce me semble, leur interprétation dynamique aussi loin que le permettait alors l'état si imparfait de la science mathématique. Il entrevit, en effet, la relation exacte de sa première loi avec le principe que la direction de la force accélératrice de chaque planète passe continuellement par le soleil, ce qui n'exige que les considérations mathématiques les plus élémentaires. Quant à la loi relative à l'inten-

sité, qui constitue la difficulté essentielle de cette grande recherche, il était absolument impossible de la découvrir à cette époque. Néanmoins, Képler osa la chercher; mais, n'y pouvant suivre la marche positive, il s'abandonna à cette métaphysique qui avait déjà tant entravé ses travaux propres. Il serait superflu de rappeler ici sa chimérique conception des rayons attractifs, par laquelle il tenta de mesurer la force accélératrice des planètes, ni même son rapprochement, moins métaphysique, entre cette force et la pesanteur. Quand même ces considérations vagues et illusoire eussent fait accidentellement deviner la loi véritable, ce qui arriva à Bouillaud en rectifiant le propre raisonnement de Képler à ce sujet, cette circonstance insignifiante ne pouvait faciliter, en aucune manière, la découverte fondamentale de Newton, où il s'agissait réellement d'établir la correspondance mathématique entre la loi des orbites elliptiques ayant le soleil pour foyer, et celle de la variation de la force accélératrice inversement au carré de la distance; ce que de telles tentatives n'avaient nullement en vue. Les vrais précurseurs de Newton, sous ce rapport, sont Huyghens et surtout Galilée, comme fondateurs de la dynamique. Néanmoins, on peut remarquer avec intérêt comment le génie de

Képler, après avoir parcouru une aussi belle carrière, en constituant définitivement la géométrie céleste, osa s'élancer aussitôt dans la carrière, toute différente et alors inaccessible, de la mécanique céleste, que la marche générale de l'esprit humain réservait si impérieusement à ses héritiers; succession d'efforts, dont l'histoire des sciences ne présente peut-être, dans tout son ensemble, aucun autre exemple aussi prononcé. Personne, d'ailleurs, ne sent plus profondément que moi la nullité radicale de toute semblable tentative.

Dans un temps où l'on s'efforce chaque jour davantage de rabaisser au niveau des plus médiocres intelligences les plus hautes conceptions du génie humain, il est du devoir de tout vrai philosophe de se prononcer, aussi énergiquement que possible, contre cette tendance déplorable, qui finirait par pervertir, jusqu'en son germe, le développement général de l'esprit positif chez les masses, en leur persuadant que ces découvertes sublimes, qui ont coûté tant d'efforts du premier ordre à la série des hommes les plus éminens dont notre espèce puisse s'honorer, étaient susceptibles d'être simplement obtenues par quelques aperçus vagues et faciles, accessibles, sans aucune préparation laborieuse, aux entendemens les plus vulgaires. Quoiqu'il soit, sans doute, infiniment plus aisé

d'apprendre que d'inventer, il faut enfin que le public, pour n'être point livré aux sophistes et vendu aux trafiquans de science, soit profondément convaincu que, comme le simple bon sens l'indique clairement, ce qui a été découvert par le long et pénible travail du génie, la raison commune ne saurait se l'approprier réellement que par une méditation persévérante, précédée d'études convenables. Si, comme il est évident, ces conditions indispensables ne peuvent pas toujours être suffisamment remplies, à l'égard de toutes les vérités scientifiques destinées à entrer dans la circulation générale, n'est-il pas bien préférable de le déclarer avec franchise, et de réclamer directement une confiance, qui n'a jamais été refusée quand elle a été convenablement motivée, au lieu de vouloir lutter contre une difficulté insurmontable, en essayant vainement de rendre élémentaires des conceptions nécessairement transcendantes? Car, les hommes ont encore plus besoin de méthode que de doctrine, d'éducation que d'instruction.

Conformément à ces maximes générales, je ne saurais trop condamner ici les tentatives illusoires et nuisibles qu'on a si fréquemment renouvelées, dans la vulgarisation, d'ailleurs si utile quand elle est sagement conçue et exécutée, des principales notions de la philosophie naturelle, pour

rendre indépendante des grandes théories mathématiques la démonstration de la loi fondamentale de la gravitation, d'après des raisonnemens vagues et essentiellement métaphysiques sur les émanations et les attractions, dont l'idée première est empruntée à Képler. Outre le vide profond de ces considérations absolues, il est clair qu'une telle manière de procéder tend à faire radicalement disparaître tout ce qui constitue l'admirable réalité de la découverte newtonienne, sa parfaite harmonie mathématique avec les lois géométriques des mouvemens célestes, seul fondement positif de la mécanique des astres.

Considérons maintenant, d'une manière directe, l'établissement vraiment rationnel de cette conception fondamentale, en réservant à l'analyse transcendante sa grande et indispensable part dans une telle opération.

Il est d'abord évident, comme je l'ai déjà indiqué, que la première loi de Képler prouve, sans aucune incertitude et de la manière la plus simple, que la force accélératrice de chaque planète est constamment dirigée vers le soleil. On n'a pas besoin, pour s'en convaincre, de recourir à la théorie dynamique des aires. Une figure très élémentaire suffit à démontrer, comme l'a fait Newton, que la force accélératrice, quelque énergique qu'on l'i-

magine, ne saurait altérer en rien la grandeur de l'aire qui serait décrite, en un temps donné, autour du soleil, par le rayon vecteur de l'astre, en vertu de sa seule vitesse actuelle, si sa direction passe exactement par le soleil, tandis qu'elle la changerait inévitablement dans toute autre supposition. Ainsi, la constance de cette aire, première donnée générale de l'observation, dévoile la loi de la direction. La principale difficulté du problème, celle qui fait la gloire essentielle de Newton, consiste donc dans la découverte, d'après les deux autres théorèmes astronomiques de Képler, de la loi relative à l'intensité de cette action continue que nous concevons dès lors exercée, sans nous enquérir de son mode, par le soleil sur les planètes.

Dans la première ébauche de sa conception, Newton a pris pour base la troisième loi de Képler, en considérant d'abord les mouvemens comme circulaires et uniformes, ce qui suffisait en commençant. L'action solaire, dès lors égale et contraire à la force centrifuge de la planète, devenait ainsi nécessairement constante aux divers points de l'orbite, et ne pouvait varier qu'en passant d'une planète à une autre. Les théorèmes d'Huyghens sur la force centrifuge dans le cercle, dont la démonstration est presque élémentaire, con-

duisaient immédiatement à saisir la loi de cette variation. Car, la force centrifuge étant, d'après ces théorèmes, proportionnelle au rapport entre le rayon de l'orbite et le carré du temps périodique, elle variait évidemment d'un astre à l'autre, inversement au carré de sa distance au soleil, en vertu de la constance, établie par Képler, du rapport entre le cube de cette distance et ce même carré du temps périodique, pour toutes les planètes. Telle est la considération mathématique qui mit réellement Newton, à l'origine de ses recherches, sur la voie de cette loi fondamentale, à la simple indication de laquelle ne contribuèrent nullement les raisonnemens métaphysiques antérieurs, dont il n'avait même probablement alors aucune connaissance.

Mais, quelque précieuse que fût l'ouverture donnée par cette première approximation, le nœud essentiel de la difficulté n'en continuait pas moins à subsister dans son intégrité. Car, il fallait surtout expliquer comment cette loi sur la variation de l'action solaire s'accordait avec la nature géométrique des orbites, découverte par Képler. A la vérité, l'orbite elliptique présentait deux points remarquables, l'aphélie et le périhélie, où la force centrifuge était encore directement opposée, et, par conséquent, égale à l'action

du soleil, dont le changement devait naturellement y être, en même temps, plus prononcé. La courbure de l'orbite était, évidemment, identique en ces deux points; cette action se trouvait donc simplement mesurée, d'après ces mêmes théorèmes d'Huyghens, par le carré de la vitesse correspondante. Dès lors, un raisonnement facile déduisait immédiatement de la première loi de Képler, que le décroissement de l'action solaire, du périhélie à l'aphélie, s'opérait encore inversement au carré de la distance. Ainsi, la loi indiquée par un premier rapprochement entre les diverses planètes, se trouvait pleinement confirmée par une exacte comparaison entre les deux positions principales de chacune d'elles. Mais tout cela était encore évidemment insuffisant, puisque le mouvement elliptique n'était nullement pris en considération. Toute autre courbe que l'ellipse eût incontestablement donné le même résultat, à la simple condition d'avoir, en ses deux sommets, une égale courbure.

Ces deux considérations préliminaires sont, néanmoins, les seules parties de la démonstration qui puissent être rendues vraiment sensibles à toutes les intelligences qui n'ont, en mathématique, que des notions purement élémentaires. Quant à la mesure de l'action solaire dans toute

l'étendue de l'orbite, qui constitue la portion essentielle et réellement décisive de cette démonstration, l'analyse transcendante y est absolument indispensable. En continuant à procéder dans le même esprit, c'est-à-dire d'après la comparaison de l'action solaire à la force centrifuge, la première a dès lors besoin d'être décomposée, en un point quelconque, suivant la normale correspondante, avant de pouvoir être appréciée par la seconde, qui ne lui est plus directement antagoniste, et dont l'évaluation exige, d'ailleurs, la théorie exacte de la courbure de l'ellipse. Par l'ensemble de ses découvertes, en géométrie et en mécanique, qu'il lui eût suffi de combiner, le grand Huyghens touchait certainement au principe de cette détermination capitale. Mais enfin, il n'a point eu réellement l'idée de cette combinaison : et, ce qu'on doit surtout remarquer, l'eût-il même conçue, il n'aurait, sans doute, pu la suivre complètement qu'avec le secours de l'analyse différentielle, dont nous savons que Newton est l'inventeur aussi bien que Leibnitz.

A l'aide de cette analyse, on mesure facilement, et de diverses manières, l'énergie de l'action solaire en tous les points de l'orbite, et l'on reconnaît aussitôt qu'elle varie toujours inversement au carré de la distance, et qu'elle

est indépendante de la direction. Enfin, le même calcul démontre que sa valeur propre pour chaque planète, ramenée, suivant cette loi, à l'unité de distance, est proportionnelle au rapport entre le carré du temps périodique et le cube du demi-grand axe de l'ellipse; ce qui prouve exactement, d'après la troisième loi de Képler, l'identité de cette valeur à l'égard de toutes les planètes, sur lesquelles l'action du soleil ne change donc qu'en vertu de la seule distance, quelles que soient les grandes différences de leurs dimensions. C'est de là que Newton a déduit cette importante conséquence, qui complète l'établissement de la loi fondamentale, que l'action solaire est, en chaque cas, proportionnelle, à distance égale, à la masse de la planète; de la même manière que, par l'identité de la chute de tous les corps terrestres dans le vide, ou par l'exacte coïncidence de leurs oscillations, on avait déjà constaté évidemment la proportionnalité entre leurs poids et leurs masses.

On voit ainsi comment les trois grandes lois de Képler ont concouru, chacune pour sa part essentielle, à établir exactement, d'après les règles de la mécanique rationnelle, cette loi fondamentale de la nature. La première démontre