VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

Considérations générales sur la statique céleste.

Avant l'admirable découverte de Newton, les phénomènes célestes étaient liés entre eux, à un certain degré, par les trois grandes lois de Képler. Mais cette liaison, quoique infiniment précieuse, était nécessairement fort imparfaite; car elle laissait entièrement indépendans les uns des autres les phénomènes qui se rattachaient à deux lois différentes. La réduction de ces trois divers faits généraux à un fait unique et encore plus général, a établi, au contraire, parmi tous les phénomènes intérieurs de notre monde, une harmonie rigoureusement universelle, qui permet toujours d'apercevoir exactement, d'une manière plus ou moins indirecte, la relation intime et nécessaire de deux quelconques d'entre eux, constamment rattachés désormais à une théorie commune, qui les lie en outre à nos principaux phénomènes terrestres. C'est ainsi que la science astronomique a enfin acquis la plus haute perfection spéculative dont nos études soient jamais susceptibles, l'entière systématisation mathématique de toutes ses diverses parties; en sorte qu'il n'y aurait rien à gagner, sous ce rapport, à découvrir un principe encore plus étendu, quand même un tel espoir ne devrait pas être regardé comme éminemment chimérique.

On ne connaîtrait donc pas convenablement la conception fondamentale de la mécanique céleste en se bornant à l'envisager en elle-même, ainsi que nous avons dû le faire dans la leçon précédente. Afin d'en sentir dignement toute la valeur philosophique, il est indispensable de caractériser maintenant, sous ses divers aspects principaux, l'application de la théorie de la gravitation à l'explication mathématique des phénomènes célestes et au perfectionnement de leur étude. Tel est l'objet spécial de cette leçon et de la suivante.

Pour faciliter cet aperçu général, je crois utile de transporter ici la distinction élémentaire que j'ai établie dans l'examen de la géométrie céleste, entre les phénomènes propres à chaque astre envisagé comme immobile, et ceux qui concernent ses divers mouvemens. Cette division est sans doute, en mécanique céleste, plus astronomique que mathématique; car les deux genres de ques-

tions ne présentent point d'ailleurs des différences bien tranchées quant à leur degré de difficulté, ni quant à la nature des considérations employées, toujours nécessairement relatives à une même pensée fondamentale. Mais elle me paraît propre à éclaircir cette importante exposition, en la rendant plus méthodique que ne le permet l'ordre essentiellement arbitraire qu'on y suit ordinairement. La leçon actuelle sera consacrée aux phénomènes statiques, et la suivante aux phénomènes dynamiques.

La détermination des masses de nos différens astres est aussi fondamentale, en mécanique céleste, que celle de leurs distances en géométrie céleste, puisque, sans elle, on ne pourrait évidemment se former aucune idée exacte de leur gravitation mutuelle. Une telle connaissance présente en même temps la manifestation la plus saillante des ressources générales que la théorie de la gravitation nous a procurées pour obtenir à l'égard des astres des notions entièrement nouvelles, qui devaient jusque alors nous paraître, quoique à tort, radicalement inaccessibles. Essayons de caractériser successivement les trois procédés principaux qu'on applique à cette importante recherche, et qui diffèrent beaucoup, soit en généralité, soit en simplicité.

Le moyen le plus général, le seul même qui soit réellement applicable à tous les cas, mais aussi celui dont l'emploi est le plus difficile, consiste à analyser, aussi exactement que possible, la part spéciale de chaque astre dans les perturbations qu'éprouve le mouvement principal d'un autre, en translation ou en rotation. Cette influence ne dépend évidemment que de deux élémens, la distance et la masse de l'astre considéré. Le premier est bien connu; et le second, qui est constant, étant introduit dans le calcul comme un coefficient indéterminé, sa valeur pourra être appréciée par la comparaison du résultat avec les observations directes. Malheureusement, dans l'état présent de la mathématique abstraite, l'analyse des perturbations ne saurait être, par sa nature, que simplement approximative, comme l'indiquera la leçon suivante. Il est surtout extrêmement difficile d'isoler, dans chaque perturbation totale, ce qui tient spécialement à l'action de tel astre proposé; quelque soin qu'on apporte dans le choix des divers dérangemens, on ne parvient guère à établir cette séparation d'une manière aussi précise que l'exigerait une semblable détermination. Aussi les astronomes et les géomètres sont-ils loin de compter autant jusqu'ici sur les masses qui n'ont

pu être obtenues que par cette méthode, que sur celles qui ont permis l'application des autres procédés.

Tel était à cet égard l'état de la mécanique céleste, lorsque, dans ces dernières années, M. Poinsot a imaginé pour ces évaluations fondamentales un moyen parfaitement rationnel, le plus direct et le plus sûr de tous, quoique, par sa nature, son emploi exige malheureusement beaucoup de temps (1). Au lieu de se borner à démêler péniblement dans les diverses perturbations naturelles l'influence détournée et peu distincte de chaque masse envisagée séparément, M. Poinsot propose de déterminer désormais toutes les masses à la fois, par l'examen d'un nouveau genre de perturbations, en quelque sorte artificielles, spécialement adaptées à un tel usage, et les seules qui observent nécessairement entre elles une relation invariable, aussi simple que rigoureuse. Il s'agit des changemens que l'action mutuelle des astres de notre monde fait subir aux aires décrites en un temps donné par leurs rayons vecteurs autour du centre de gravité général. On sait, d'après la mécanique rationnelle,

(1) Voyez le beau Mémoire de ce grand géomètre sur la vraie théorie du *plan invariable*, maintenant annexé à la dernière édition de sa *Statique*.

que parmi ces diverses variations il s'opère nécessairement une telle compensation, que la somme algébrique de toutes ces aires, projetées en un instant quelconque sur un même plan d'ailleurs arbitraire, et multipliées chacune par la masse correspondante, demeure rigoureusement invariable. Ainsi, en comparant entre eux les divers états du ciel à des époques suffisamment distinctes, l'égalité mutuelle de toutes ces sommes peut fournir, dans la suite des temps, autant d'équations qu'on voudra, propres à faire connaître, si l'on a eu soin d'en former le nombre convenable, les valeurs des différentes masses, seules inconnues qu'elles contiennent, puisque les aires sont d'ailleurs exactement mesurables, d'après les positions et les vitesses effectives des astres considérés.

Indépendamment de sa rationnalité parfaite et de son entière généralité, cette méthode présente un caractère philosophique bien remarquable, en ce que, comme l'indique avec raison M. Poinsot, elle rend l'évaluation des masses relatives de tous les astres de notre monde entièrement indépendante de la loi de gravitation, suivant l'esprit de la théorie des aires, ce que jusque alors aucun géomètre n'eût jamais jugé possible. Il en résulte d'ailleurs que les résultats ne sont plus affectés des approximations relatives à cette loi

dans les calculs ordinaires de la mécanique céleste.

On doit vivement regretter que la nature de cette méthode ne permette point son application immédiate, ne fût-ce que pour obtenir, par la confrontation de ses résultats avec ceux déjà connus, une des confirmations les plus décisives de la théorie de la gravitation. Mais la nécessité évidente d'attendre que toutes les aires individuelles aient assez varié pour rendre significative la comparaison de leurs sommes, exige un intervalle considérable entre les époques successives, dont le nombre dépend d'ailleurs de celui des masses cherchées. Le temps total doit même être d'autant plus grand que, d'après la rectification importante apportée par M. Poinsot à la théorie générale des aires, il est mathématiquement indispensable de prendre en considération celles qui résultent des rotations, comme je l'indiquerai plus tard au sujet du plan invariable. Cette obligation, en introduisant dans les équations les divers momens d'inertie, tendrait à doubler le nombre des époques nécessaires pour obtenir des résultats parfaitement rigoureux; mais en procurant, à la vérité, une nouvelle détermination essentielle, qui devait sembler d'abord encore plus inaccessible que celle des masses. Les observations suffisamment précises sont encore si peu anciennes que le passé nous offrirait à cet égard un bien petit nombre d'équations, en sorte qu'un tel procédé ne deviendrait entièrement applicable, sans aucun auxiliaire, que dans un avenir assez lointain. Je n'ai pas cru néanmoins pouvoir me dispenser d'indiquer cette méthode générale et directe, dont le caractère spéculatif est si parfait. On doit reconnaître d'ailleurs qu'en la réservant pour les masses qui ne sont pas encore bien connues d'une autre manière, et en négligeant d'abord les termes peu influens, le temps nécessaire à son application effective se trouverait notablement abrégé (1).

(1) Cette méthode de M. Poinsot me fait naître l'idée d'un nouveau moyen rationnel, analogue au précédent, pour déterminer simultanément les masses de tous les astres de notre monde, d'après un autre théorème fondamental de mécanique rationnelle, la conservation nécessaire du mouvement du centre de gravité de l'ensemble de ces astres, quelles que puissent être les perturbations provenant de leur action mutuelle. Il en résulte la constance, à une époque quelconque, de la somme des produits de toutes les diverses masses par les vitesses correspondantes, décomposées suivant une même droite arbitraire; ce qui peut fournir autant d'équations qu'on voudra comparer d'époques. Dans l'estimation de ces produits pour les différentes molécules de chaque astre, il est clair, quant à la translation, qu'on pourrait traiter l'astre comme condensé à son centre de gravité, d'après la propriété fondamentale de ce point; et, quant à la rotation, cette même propriété indique qu'il n'y aurait pas lieu à la considérer, puisque l'ensemble des produits qui en résulteraient serait nécessairement nul pour l'astre entier. Ce procédé me semblerait donc plus simple que celui fondé sur le théorème des aires: il exigerait moins d'équations, et par suite beaucoup moins de temps pour son application complète, en ne procurant point, il est vrai, l'évaluation des momens d'inertie, indispensable à la détermination du plan invariable. La durée totale de l'opération serait d'autant moindre, que les vitesses varient avec plus de rapidité que les aires, ce qui permettrait de rapprocher davantage les époques comparatives d'observation.

Après le procédé général fondé sur l'analyse des perturbations, soit sous sa forme ordinaire, soit avec la modification si heureusement imaginée par M. Poinsot, le moyen le moins restreint pour évaluer les masses des astres de notre monde, est celui que Newton créa, dès l'origine, à l'égard des planètes pourvues d'un satellite. La méthode, aussi simple qu'immédiate, consiste à comparer le mouvement du satellite autour de la planète, au mouvement de celle-ci autour du soleil. On sait que, dans chacun d'eux, la gravitation exercée par l'astre central, et qui doit être en raison de sa masse, est proportionnelle au rapport entre le cube du demi-grand axe de l'orbite et le quarré du temps périodique, en ramenant l'action, suivant la loi ordinaire, à l'unité de distance. Ainsi, il suffit de comparer entre elles les deux valeurs bien connues que prend cette fraction dans les deux cas, pour obtenir aussitôt le rapport des masses du soleil et de la planète. A la vérité, on néglige alors nécessairement la masse de la planète vis-à-vis de celle du soleil, ou au moins du satellite envers la planète. Mais l'erreur qui en résulte est trop peu importante, dans presque tous les cas de notre monde, pour que le degré de précision auquel nous pouvons réellement prétendre à l'égard des masses planétaires en soit sensiblement affecté. La masse de Jupiter, déterminée ainsi par Newton, n'a reçu qu'un très léger changement des divers moyens qu'on a pu y appliquer depuis; et encore la différence tient-elle, presqu'en totalité, à ce que les données du procédé newtonien sont aujourd'hui mieux connues.

Enfin, la méthode la plus simple et la plus directe de toutes, mais aussi la plus particulière, puisqu'elle est nécessairement bornée à la planète qu'habite l'observateur, consiste à évaluer les masses relatives par la comparaison des pesanteurs qu'elles produisent. Si la masse d'un astre bien connu était exactement déterminée, elle permettrait évidemment d'apprécier l'énergie de la pesanteur à sa surface, ou à une distance quelconque donnée : donc, réciproquement, la mesure directe de cette intensité suffira pour estimer la masse. Ainsi, les expériences du pendule ayant mesuré, avec la dernière précision, la pesanteur terrestre; en la diminuant, inversement au quarré de la distance, on saura quelle

serait sa valeur à la distance du soleil; et l'on n'aura dès lors qu'à la comparer avec la quantité, préalablement bien connue, qui exprime l'action du soleil sur la terre, pour trouver immédiatement le rapport de la masse de la terre à celle du soleil. Envers toute autre planète, ce serait, au contraire, l'évaluation de sa masse qui permettrait seule l'estimation de la gravité correspondante. Ce procédé n'est, en réalité, qu'une modification du précédent, où la chute du satellite se trouvait être au fond indirectement évaluée, au lieu de résulter d'une expérience immédiate, qui permet sans doute un peu plus de précision, surtout à cause de la masse du satellite, relativement à celles qui nous servent à mesurer la pesanteur.

L'ensemble de tous ces divers moyens étant applicable à la terre, sa masse comparée à la masse solaire, unité naturelle à cet égard, doit être regardée comme la mieux connue de notre monde. La masse de la lune, et surtout celle de Jupiter, sont aujourd'hui estimées presque aussi parfaitement; viennent ensuite les masses de Saturne et d'Uranus; on compte moins sur les trois autres déjà évaluées, celles de Mercure, de Vénus et de Mars, quoique l'incertitude ne puisse pas y être très grande. On ignore presque entièrement les masses des quatre planètes télescopiques, et surtout celles des comètes, ce qui tient à leur extrême petitesse, qui ne leur permet aucune influence appréciable sur les perturbations. Ce caractère est particulièrement remarquable à l'égard des comètes, qui, dans leur course allongée, passent fréquemment dans le voisinage de forts petits astres, comme les satellites de Jupiter et de Saturne, sans y produire aucun dérangement perceptible. Quant aux satellites, en exceptant la lune, on ne connaît encore que les valeurs approchées des masses de ceux de Jupiter.

Aucune exacte comparaison générale des résultats obtenus n'a pu jusqu'ici faire apercevoir entre eux une harmonie quelconque. La seule circonstance essentielle qu'ils présentent est l'immense supériorité de la masse du soleil à l'égard de tout le reste de notre monde, dont la masse, même réunie, en fait à peine la millième partie. On devait évidemment s'y attendre, du moins à un certain degré, quoique rien n'indiquât directement une aussi grande disproportion, si ce n'est la petitesse des perturbations planétaires, qui en dépend essentiellement. Du reste, à partir du soleil, on voit alterner, sans aucun ordre sensible, des masses tantôt décroissantes, tantôt croissantes. On avait pensé d'abord, conformément

à une supposition *à priori* de Képler, que les masses étaient régulièrement liées aux volumes (d'ailleurs irréguliers eux-mêmes, comme nous l'avons remarqué); en sorte que les densités moyennes fussent continuellement moindres en s'éloignant du soleil, en raison inverse des racines quarrées des distances. Mais, indépendamment de cette loi numérique, qui ne s'observe jamais exactement, le simple fait du décroissement des densités présente quelques exceptions, entre autres pour Uranus. On ne saurait d'ailleurs lui assigner aucun motif rationnel.

Tels sont, en aperçu, les divers moyens que possède aujourd'hui l'astronomie, quant à l'évaluation relative des différentes masses qui composent notre système solaire. Mais, pour compléter cette connaissance fondamentale, il reste à indiquer comment on a pu rapporter enfin toutes ces masses à nos unités de poids habituelles, par l'importante détermination directe du véritable poids total de la terre, qui constitue une des applications les plus simples et les plus intéressantes de la théorie générale de la gravitation.

Bouguer est le premier qui ait aperçu distinctement la possibilité d'une telle évaluation, en reconnaissant, dans sa célèbre expédition scientifique au Pérou, l'influence du voisinage des