

Bernouilli, dont le beau travail n'a réellement subi depuis aucun perfectionnement essentiel. Essayons de caractériser nettement l'esprit général de cette grande recherche. La théorie convient en elle-même aussi bien à l'atmosphère qu'à l'Océan. Mais je considérerai seulement ce dernier cas, puisque les marées atmosphériques, d'ailleurs infiniment moindres, à cause de la masse si minime de notre enveloppe gazeuse, échappent essentiellement, par leur nature, à toute observation réelle, malgré les efforts tentés quelquefois pour en manifester l'influence, surtout dans les variations diurnes du baromètre, dont l'examen attentif pendant plusieurs années a cependant indiqué à M. Flaugergues une relation certaine avec le mois lunaire.

Eu joignant le centre de la terre à un astre quelconque, les deux points correspondans de la surface terrestre doivent graviter évidemment l'un un peu plus, l'autre un peu moins que le centre lui-même, inversement aux quarrés de leurs distances respectives. Le premier tend donc à s'éloigner du centre, ce qui doit produire une certaine élévation de la surface fluide, et le centre tend, au contraire, à s'éloigner du second point, où doit survenir ainsi une élévation analogue et à très peu près égale. Cet effet diminue nécessairement

à mesure qu'on s'écarte davantage de ces deux points dans un sens quelconque, et devient nul à quatre vingt-dix degrés de là, où, les parties de l'Océan gravitant comme le centre, le niveau doit baisser pour fournir à l'exhaussement du reste, indépendamment d'une dépression directe presque insensible. En même temps, ces divers changemens de niveau font varier la pesanteur terrestre des eaux correspondantes; et cette seconde cause, la plus difficile et la plus incertaine à calculer, agit évidemment dans le même sens que la première, quoique avec moins d'énergie, pour l'établissement définitif du niveau général.

On voit ainsi comment l'action d'un astre quelconque sur l'Océan, qui ne pourrait nullement altérer sa surface naturelle, si elle avait partout la même intensité, tend nécessairement, à raison de son inégale énergie sur les divers lieux, à la modifier un peu, en lui faisant prendre la forme d'un sphéroïde allongé vers l'astre. Sous ce rapport fondamental, la question est parfaitement semblable à celle considérée ci-dessus de la figure mathématique de la terre, la force centrifuge étant ici remplacée par la différence entre la gravitation du centre de notre globe et celle de sa surface vers l'astre proposé. La recherche est seulement encore plus compliquée, puisqu'il faut

négligé. Cette énergie est évidemment mesurée par la différence entre la gravitation du centre de notre globe et celle des points extrêmes de sa surface vers l'astre proposé. En exécutant, d'après la loi fondamentale de la gravitation, cette différentiation très facile, on trouve aussitôt que la puissance de chaque astre pour produire nos marées est en raison directe de sa masse et en raison inverse du cube de sa distance à la terre. Il résulte de cette règle essentielle la précieuse faculté de déterminer rationnellement, parmi tous les astres de notre monde, quels sont ceux qui peuvent concourir sensiblement au phénomène, et de mesurer à chacun d'eux sa part d'influence. On reconnaît ainsi que le soleil, en vertu de sa masse immense, et la lune, par son extrême proximité, doivent seuls produire des marées appréciables; tous les autres corps célestes sont ou trop éloignés ou de trop peu de poids pour qu'il en résulte aucun effet perceptible. Enfin, l'action de la lune est de deux fois et demi à trois fois plus grande que celle du soleil. Ainsi, lors même que les deux astres agissent en sens opposé, c'est sur la lune que doit se régler constamment la marche générale du phénomène; ce qui explique parfaitement l'observation fondamentale de Descartes,

quant à la continuelle coïncidence de la période des marées avec le jour lunaire.

Toutes les considérations mathématiques précédemment indiquées ne s'appliquent directement qu'à la marée simple et abstraite, produite par un astre unique. Mais la nécessité d'envisager simultanément les actions de deux astres différens rendrait la solution analytiquement inextricable, si Daniel Bernouilli ne l'eût radicalement simplifiée, en y appliquant son célèbre principe dynamique sur la coexistence des petites oscillations, que j'ai exposé à la fin du premier volume de ce cours. Suivant ce principe, les marées lunaire et solaire se superposent sans altération, ce qui réduit aussitôt le problème à l'analyse partielle de chacune d'elles. Toutes les grandes variations régulières du phénomène s'expliquent dès lors avec une admirable facilité. Considérons seulement les plus importantes et les plus simples, celles qui correspondent aux diverses phases mensuelles de la lune. Aux deux syzygies, l'action solaire et l'action lunaire coïncident exactement; donc la marée effective doit alors atteindre son *maximum*, égal à la somme des deux marées élémentaires. Dans les deux quadratures, au contraire, le moindre niveau produit par l'un des astres accompagne néces-

sairement le plus haut niveau correspondant à l'autre; en sorte que l'on doit alors observer le *minimum* d'effet, égal à la différence des marées simples. Aux diverses époques intermédiaires, la marée solaire modifie toujours inégalement la marée lunaire, et ces variations se reproduisent par périodes d'un mois lunaire synodique, dont elles doivent suivre les irrégularités séculaires. La comparaison des deux cas extrêmes, si les observations permettaient de l'établir avec assez d'exactitude, conduirait même évidemment à estimer *à posteriori* le vrai rapport entre l'action de la lune et celle du soleil. Or, ce rapport dépendant des distances et des masses relatives des deux astres, suivant la règle exposée ci-dessus, on en pourrait déduire la raison de leurs masses, celle de leurs distances étant déjà bien connue. Cette considération, quoique ne devant pas être exclusivement employée, peut utilement concourir avec d'autres moyens pour déterminer la masse de la lune.

Suivant la mesure fondamentale de chaque marée simple, cette classe de phénomènes doit éprouver un nouvel ordre de modifications régulières et périodiques, en vertu des changemens naturels qu'éprouve, pendant le cours de l'année ou du mois, la distance de la terre au soleil ou à

la lune. Cette influence est ici proportionnellement plus sensible que dans beaucoup d'autres phénomènes, puisqu'elle y dépend du cube de la distance. Elle doit affecter particulièrement l'action lunaire, non-seulement comme étant la plus forte, mais encore en vertu de l'excentricité bien supérieure de l'orbite lunaire. Enfin, les deux variations peuvent se combiner de diverses manières, tantôt convergentes, tantôt divergentes; et elles doivent aussi modifier très diversement les inégalités principales, dues aux phases de la lune.

Dans tout ce qui précède, le mouvement diurne de l'astre proposé est censé avoir exactement lieu suivant le plan de l'équateur. Mais, à une époque quelconque, son action doit évidemment être décomposée en deux; l'une, selon l'axe de rotation de la terre, et qui est nulle pour produire une marée; l'autre, parallèlement à l'équateur, et qui, seule, détermine le phénomène. Voilà donc, à cet égard, un dernier genre de modifications générales, indépendantes de la distance, et uniquement dues à la direction: en sorte que, toutes choses d'ailleurs égales, chaque marée élémentaire doit varier proportionnellement au cosinus de la déclinaison de l'astre correspondant. Telle est la raison simple de la différence notable, si généra-

lement remarquée, quant à l'ensemble des marées, entre le mois lunaire équinoxial et le mois lunaire solsticial, surtout en considérant, pour notre hémisphère, le solstice d'été, où l'affaiblissement déterminé par la distance du soleil concourt avec celui qui résulte de sa direction.

Quant aux variations du phénomène dans nos divers climats, la théorie ne peut apprécier jusqu'ici d'autre influence régulière que celle de la latitude. Aux deux pôles, il ne saurait exister évidemment que de faibles marées indirectes dues à la nécessité d'y prendre ou d'y envoyer les eaux qui s'élèvent ou s'abaissent ailleurs; car, là, il n'y a plus, à proprement parler, de mouvement diurne. A l'équateur, au contraire, le phénomène doit se manifester au plus haut degré possible, non-seulement à cause de la diminution de la pesanteur, mais surtout en vertu de la diversité plus complète des positions successives occupées par les eaux pendant la rotation journalière. En tout autre lieu, l'intensité de la marée doit varier proportionnellement à l'énergie de cette rotation, et, par conséquent, en raison du cosinus de la latitude.

Tel est, en aperçu, l'esprit général de la grande théorie mathématique des marées, envisagée sous ses divers aspects réguliers. Toutes ses différentes

parties, abstraction faite des évaluations numériques, sont dans une admirable harmonie avec l'ensemble des observations directes. On a même lieu d'être surpris, quant aux nombres, de ne pas les trouver plus différens de la réalité, convenablement explorée, lorsqu'on pense aux hypothèses que les géomètres ont dû faire pour rendre les calculs exécutoires, et aux données nécessairement inaccessibles qu'exigerait une estimation parfaitement rationnelle. Il ne suffirait point, en effet, de connaître exactement l'étendue et la forme du lit de l'Océan. La question dépend encore évidemment d'une notion bien plus inabordable, la vraie loi de la densité dans l'intérieur de la terre, comme à l'égard de la figure des astres. Il y a même ici une circonstance nouvelle, suivant la judicieuse remarque de Daniel Bernouilli; car il faudrait connaître aussi quel est l'état, fluide ou solide, des couches internes, pour savoir si elles participent ou non au phénomène, et si, par conséquent, elles modifient l'effet produit à la surface. L'ensemble de ces considérations peut faire apprécier la profondeur du conseil général donné par Daniel Bernouilli, qui possédait à un degré si éminent le véritable esprit mathématique, consistant surtout dans la relation du concret à l'abstrait, comme je me suis

efforcé de le faire sentir en traitant de la philosophie mathématique. Il recommande prudemment aux géomètres, à cet égard, ainsi que Clairaut, « de ne point trop presser les conséquences des » formules, de peur d'en tirer des conclusions » contraires à la vérité. » Laplace, en détaillant davantage la théorie de son illustre prédécesseur, n'a peut-être pas toujours fait assez d'attention à cette sage maxime philosophique.

Quant à la comparaison générale et exacte de la théorie mathématique des marées avec leur observation effective, on doit reconnaître, ce me semble, qu'elle n'a point encore été convenablement faite, puisque toutes les mesures ont été prises dans des ports, ou du moins très près des côtes. Or, dans de telles localités, on ne peut apercevoir essentiellement que des marées indirectes, qui ne doivent représenter que fort imparfaitement les marées régulières dont elles émanent, leur intensité étant principalement déterminée le plus souvent par l'étendue et la configuration du sol, tant au fond qu'à la surface, et pouvant même être influencée par sa structure. C'est à de telles circonstances, qu'aucune théorie mathématique ne saurait évidemment considérer, qu'il faut sans doute attribuer ces énormes différences que présente en quelques lieux la hauteur

des marées, aux mêmes époques, et dans des positions presque identiques; comme, par exemple, les marées comparatives de Granville et Dieppe, ou de Bristol et Liverpool. Afin d'apprécier empiriquement l'exactitude numérique de la théorie des marées, il serait indispensable d'entreprendre, pendant un nombre d'années assez grand pour que les diverses variations régulièrement prévues fussent plusieurs fois reproduites, une suite continue d'observations précises, dans une île très petite, située à l'équateur, et à trente degrés au moins de tout continent. Tel est le seul contrôle réellement susceptible de contribuer essentiellement à vérifier et surtout à perfectionner la théorie générale des marées mathématiques.

Quelque incertitude inévitable que présentent plusieurs données de cette grande théorie, surtout dans son application à nos ports, elle n'en reçoit pas moins, de notre expérience journalière, la sanction la plus décisive et la plus utile, puisqu'elle atteint le but définitif de toute science réelle, une exacte prévision des événemens, propre à régler notre conduite. Les principales circonstances locales devant avoir, à l'exception des vents, une influence essentiellement constante, il a été possible de modifier heureusement, d'après l'observation, pour chaque port, les deux coefficients fon-

damentaux, relatifs à la hauteur moyenne des marées, et à l'heure de leur entier établissement; ce qui a permis de rendre toutes les déterminations mathématiques suffisamment conformes à la réalité. C'est ainsi que, depuis un siècle, une classe importante de phénomènes naturels, généralement regardés jusque alors comme inexplicables, a été ramenée avec précision à des lois invariables, qui en excluent irrévocablement toute intervention providentielle et toute conception arbitraire.

Tels sont les caractères philosophiques des trois hautes questions dont se compose la mécanique céleste, envisagée sous le point de vue statique. Il nous reste maintenant à entreprendre, dans la leçon suivante, le même examen général à l'égard des phénomènes vraiment dynamiques que présente notre monde, et dont l'étude a été précédemment ébauchée par la géométrie céleste, résumée dans les trois grandes lois de Képler, qui éprouvent en réalité des modifications indispensables à connaître pour l'exacte prévision de l'état du ciel à une époque quelconque.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Considérations générales sur la dynamique céleste.

La gravitation mutuelle des différens astres de notre monde doit nécessairement altérer la parfaite régularité de leur mouvement principal, déterminé, conformément aux lois de Képler, par la seule pesanteur de chacun d'eux vers le foyer de son orbite. Parmi ces divers dérangemens, les plus considérables furent directement observés dès l'origine de l'astronomie mathématique dans l'école d'Alexandrie; d'autres ont été aperçus plus tard de la même manière, à mesure que l'exploration du ciel est devenue plus précise; enfin, les moindres n'ont pu être découverts que par l'emploi des moyens d'observation les plus perfectionnés de l'astronomie moderne. Tous sont maintenant expliqués, avec une admirable exactitude, par la théorie générale de la gravitation, qui a même devancé quelquefois l'inspection immédiate à l'égard des moins prononcés. Cet important résultat de l'ensemble des grands travaux mathématiques