

damentaux, relatifs à la hauteur moyenne des marées, et à l'heure de leur entier établissement; ce qui a permis de rendre toutes les déterminations mathématiques suffisamment conformes à la réalité. C'est ainsi que, depuis un siècle, une classe importante de phénomènes naturels, généralement regardés jusque alors comme inexplicables, a été ramenée avec précision à des lois invariables, qui en excluent irrévocablement toute intervention providentielle et toute conception arbitraire.

Tels sont les caractères philosophiques des trois hautes questions dont se compose la mécanique céleste, envisagée sous le point de vue statique. Il nous reste maintenant à entreprendre, dans la leçon suivante, le même examen général à l'égard des phénomènes vraiment dynamiques que présente notre monde, et dont l'étude a été précédemment ébauchée par la géométrie céleste, résumée dans les trois grandes lois de Képler, qui éprouvent en réalité des modifications indispensables à connaître pour l'exacte prévision de l'état du ciel à une époque quelconque.

---

## VINGT-SIXIÈME LEÇON.

---

### Considérations générales sur la dynamique céleste.

La gravitation mutuelle des différens astres de notre monde doit nécessairement altérer la parfaite régularité de leur mouvement principal, déterminé, conformément aux lois de Képler, par la seule pesanteur de chacun d'eux vers le foyer de son orbite. Parmi ces divers dérangemens, les plus considérables furent directement observés dès l'origine de l'astronomie mathématique dans l'école d'Alexandrie; d'autres ont été aperçus plus tard de la même manière, à mesure que l'exploration du ciel est devenue plus précise; enfin, les moindres n'ont pu être découverts que par l'emploi des moyens d'observation les plus perfectionnés de l'astronomie moderne. Tous sont maintenant expliqués, avec une admirable exactitude, par la théorie générale de la gravitation, qui a même devancé quelquefois l'inspection immédiate à l'égard des moins prononcés. Cet important résultat de l'ensemble des grands travaux mathématiques

exécutés, dans le siècle dernier, par les successeurs de Newton, constitue une des vérifications les plus décisives de la théorie newtonienne, surtout en ce qu'il met hors de doute l'universelle réciprocité de la gravitation entre tous les corps qui composent notre système solaire.

Le caractère fondamental de cet ouvrage et ses limites nécessaires interdisent évidemment de considérer ici séparément chacun de ces nombreux problèmes, dont les difficultés sont d'ailleurs essentiellement analytiques, leurs équations différentielles étant presque toujours très faciles à former, d'après les règles de la dynamique rationnelle. L'esprit général des recherches de mécanique céleste se trouve être suffisamment caractérisé par les questions examinées dans la leçon précédente, les seules, en réalité, qui exigent des conceptions propres, indépendantes du calcul. Nous devons donc ici nous borner essentiellement à examiner le plan rationnel et la nature générale des principales études relatives aux modifications des mouvemens célestes.

A l'égard de ces mouvemens, comme envers tous les autres, il importe beaucoup de distinguer d'abord, avec Lagrange, deux genres principaux d'altérations, qui diffèrent profondément, aussi bien quant à leur théorie mathématique que par

les circonstances qui les constituent : les changemens brusques, provenant de chocs ou d'explosions internes, dont l'action peut, sans aucun inconvénient, être conçue instantanée ; les changemens graduels, ou les perturbations proprement dites, dues à l'influence continue des gravitations secondaires, dont l'effet dépend du temps écoulé. Quoique le premier ordre de dérangemens soit, sans doute, dans notre monde, presque entièrement idéal, il n'en est pas moins essentiel à considérer, ne fût-ce que comme un préliminaire indispensable à l'étude du second, dont l'esprit consiste, en effet, à traiter chaque gravitation perturbatrice comme une suite de petites impulsions, selon la méthode ordinaire de la mécanique rationnelle.

L'influence des changemens brusques, bien qu'elle puisse être beaucoup plus grande que celles des simples perturbations, comporte une étude infiniment plus facile. Il est clair, en effet, que les lois de Képler ne doivent point cesser, pour cela, d'être exactement maintenues : tout au plus, l'ellipse pourrait-elle dégénérer en parabole ou en hyperbole, comme je l'ai indiqué dans l'avant-dernière leçon. Tout l'effet doit évidemment consister à donner subitement de nouvelles valeurs aux six élémens fondamentaux du

mouvement elliptique, puisque rien n'est changé dans les forces accélératrices. Après une telle variation, ces nouveaux élémens resteront d'ailleurs aussi fixes qu'auparavant, jusqu'à ce qu'il survienne quelque autre événement semblable. D'ailleurs l'altération peut porter indifféremment sur chacun des six élémens, dont plusieurs sont, au contraire, fort peu affectés par les perturbations.

On éprouverait de vraies difficultés mathématiques à déterminer rationnellement, d'après les règles de la mécanique abstraite, quel doit être l'effet d'un choc ou d'une explosion sur le changement instantané de la vitesse actuelle d'un astre, quant à son intensité et à sa direction. Mais, cette variation une fois donnée, il est au contraire facile d'en déduire, comme Lagrange l'a montré, les nouvelles valeurs des élémens fondamentaux, et par suite toutes les modifications que pourra présenter le mouvement de translation. La question pourrait être beaucoup plus compliquée à l'égard de la rotation, si l'événement ne se bornait point à en altérer la durée, et qu'il changeât la direction de l'axe autour duquel elle s'exécute. Car, la nouvelle droite cessant d'être un des axes dynamiques principaux de l'astre, cet événement, quoique instantané, deviendrait nécessairement, d'après la théorie générale de la rotation, la source

d'une suite perpétuelle, ou du moins très prolongée, d'altérations difficiles à analyser; ce qui ne saurait jamais avoir lieu, quant à la translation.

Quoique le choc mutuel de deux astres et la rupture d'un astre unique en plusieurs fragmens séparés par suite d'une explosion interne, puissent déterminer des variations quelconques dans tous les élémens astronomiques de leur mouvement elliptique, il existe deux relations fondamentales, qui, d'après les lois générales du mouvement, doivent rester, même alors, nécessairement inaltérables, et qui pourraient, ce me semble, en les employant convenablement, nous conduire souvent à constater la réalité de tels événemens à une époque quelconque. Ce sont les deux propriétés essentielles de la conservation du mouvement du centre de gravité et de l'invariabilité de la somme des aires, qui reposent seulement, comme on sait, sur l'égalité entre la réaction et l'action, à laquelle sans doute de tels changemens ne cesseraient point de se conformer. Il en résulte deux équations très importantes entre les masses, les vitesses et les positions des deux astres ou des deux fragmens du même astre, considérées avant et après l'événement.

Aucun indice ne paraît jusqu'ici nous autoriser à penser que le cas du choc se soit jamais réelle-

ment présenté dans notre monde, et l'on conçoit en effet combien la rencontre de deux astres doit y être difficile, sans qu'elle y soit, néanmoins, mathématiquement impossible. Mais, il n'en est nullement ainsi à l'égard des explosions. L'identité presque parfaite des moyennes distances et des temps périodiques propres aux quatre petites planètes situées entre Mars et Jupiter, a conduit, comme on sait, M. Olbers à conjecturer ingénieusement qu'elles formaient autrefois une planète unique, dont une forte explosion interne aurait déterminé la division en plusieurs fragmens séparés. Presque toutes les autres circonstances caractéristiques de ces petits astres sont en harmonie avec cette opinion, à laquelle Lagrange a ajouté, d'après l'irrégularité de leur figure, que l'événement a dû être postérieur à la consolidation de la planète primitive. Quand leurs masses seront connues, je pense que cette hypothèse pourra être soumise à une vérification mathématique, qu'il me suffit d'indiquer ici, suivant les deux théorèmes précédemment mentionnés. En calculant ainsi les positions et les vitesses successives du centre de gravité du système de ces quatre planètes, on devrait, en effet, d'après une telle origine, retrouver le mouvement principal de l'astre primitif. Si donc les résultats de ces cal-

culs représentaient ce centre de gravité décrivant une ellipse autour du soleil pour foyer, et son rayon vecteur traçant des aires proportionnelles aux temps, cet événement serait aussi constaté, ce me semble, que peut l'être un fait dont on n'a pas été témoin. Mais notre ignorance actuelle au sujet des momens d'inertie et surtout des masses de ces petits corps ne permet point encore d'assujettir la conjecture de M. Olbers à une semblable épreuve. Il n'en est pas moins intéressant, sous le point de vue philosophique, de voir comment la mécanique céleste peut parvenir à constater, d'une manière entièrement positive, de tels événemens, qui paraissent ne devoir laisser aucun témoignage appréciable. Il est, d'ailleurs, évident que la nature instantanée de ces changemens nous interdirait nécessairement d'en reconnaître l'époque, puisque les phénomènes seraient exactement les mêmes, que l'explosion fût récente ou ancienne ; tandis qu'il n'en est point ainsi à l'égard des perturbations.

Lagrange a pensé, avec beaucoup de vraisemblance, que le cas des explosions avait été très fréquent dans notre monde, et qu'on pouvait expliquer ainsi l'existence des comètes, d'après la grandeur des excentricités et des inclinaisons et la petitesse des masses, qui les caractérisent princi-

pablement. Il suffit, en effet, de concevoir qu'une planète ait éclaté en deux fragmens extrêmement inégaux, pour que le mouvement du plus considérable soit resté presque tel qu'auparavant, tandis que le plus petit aura pu décrire une ellipse très allongée et fort inclinée à l'écliptique. L'intensité de l'impulsion nécessaire à ce dernier changement est, en général, assez médiocre, comme Lagrange l'a établi, et d'ailleurs d'autant moindre que la planète primitive est plus éloignée du soleil. Cette opinion me paraît beaucoup plus satisfaisante que toutes celles qui ont été proposées au sujet des comètes, quoiqu'elle soit loin, sans doute, d'être jusqu'ici démontrée.

Passons maintenant à la considération bien plus importante et bien autrement difficile des perturbations proprement dites, principal objet de la mécanique céleste pour le perfectionnement des tables astronomiques.

Elles doivent être distinguées en deux classes générales, suivant qu'elles portent sur les mouvemens de translation, ou de rotation. La théorie abstraite des rotations constituant, par sa nature, comme nous l'avons reconnu en philosophie mathématique, la partie la plus difficile de la dynamique des solides, il en doit être nécessairement de même pour l'application au ciel.

Heureusement, les mouvemens de rotation sont, en général, moins altérés, dans notre monde, que ceux de translation; et surtout, leurs perturbations sont bien moins importantes à connaître, si ce n'est dans le seul cas de la terre. Envisageons d'abord l'étude des translations, où les astres doivent être traités comme condensés en leurs centres de gravité.

Quoiqu'il fût aisé de former, d'après les règles de la dynamique rationnelle, les équations différentielles du mouvement d'un quelconque des astres de notre monde, sollicité par ses diverses gravitations variables vers tous les autres, l'ensemble de ces équations ne constituerait, en réalité, dans l'état présent de nos connaissances mathématiques, et probablement toujours, qu'une énigme analytique absolument inextricable, dont il serait impossible de tirer aucun parti effectif pour l'étude des phénomènes célestes. Obligés de renoncer à cette marche directe, la seule pleinement rationnelle, les géomètres ont dû se réduire à analyser séparément le mouvement de chaque astre autour de celui qui en est le foyer, en ne considérant à la fois qu'un seul astre modificateur. C'est ce qui constitue, en général, le célèbre problème des trois corps, quoique cette dénomination n'ait d'abord été employée que pour la théorie de

la lune. On conçoit aisément à quelles circonvolutions doit entraîner une telle manière de procéder, puisque l'astre qui modifie, étant à son tour modifié par d'autres, ses perturbations exigent un retour indispensable à l'étude du corps primitif. A quelques expédiens que notre impuissance mathématique nous contraigne de recourir, nous ne saurions empêcher que la détermination de l'ensemble des mouvemens de notre monde ne constitue nécessairement par sa nature, un problème vraiment unique, et non une suite de problèmes détachés les uns des autres. Cette séparation irrationnelle, et néanmoins impérieusement prescrite par l'imperfection de notre analyse, est la première source des modifications si multipliées dont les géomètres sont forcés de surcharger successivement leurs formules célestes.

Si le problème des trois corps comportait une solution rigoureuse, ces corrections pourraient être bien moindres et surtout beaucoup moins nombreuses, puisque, en prenant pour type le mouvement qui lui correspond dans chaque cas, les mouvemens effectifs ne s'en écarteraient qu'à très peu d'égards et de quantités presque insensibles. Mais le problème fondamental et élémentaire de deux corps, dont l'un est même regardé comme fixe, c'est-à-dire le problème du mouve-

ment elliptique, représenté par les lois de Képler, est le seul dont notre analyse actuelle permette une solution vraiment rationnelle, et encore avons-nous reconnu combien sont pénibles les calculs qu'elle exige. C'est donc à ce type, plus éloigné de la réalité, que les géomètres sont obligés de rapporter, par des approximations successives extrêmement compliquées, les vrais mouvemens des astres, en accumulant les perturbations produites séparément par chaque corps susceptible d'une influence appréciable; l'intégration des équations relatives au cas des trois corps ne pouvant s'opérer que par des séries ordonnées de diverses manières suivant les perturbations qu'on veut mettre en évidence.

La petitesse ordinaire des perturbations a d'abord naturellement introduit cette manière de procéder, puisque le mouvement elliptique représente suffisamment, pendant un temps plus ou moins long, le véritable état du ciel. Elle a été ensuite érigée en principe, quand les géomètres ont bien connu la nature mathématique du problème général, et l'impossibilité de le traiter autrement que par approximation. C'est Lagrange qui a essentiellement donné à cette marche nécessaire son caractère méthodique définitif, en créant sa célèbre théorie générale de la variation des cons-

tantes arbitraires, si fondamentale dans toute la mécanique céleste, dont elle tend à régulariser les recherches et à rendre les procédés uniformes aussi rationnels que le comportent les difficultés insurmontables radicalement inhérentes à la question réelle. L'esprit de cette théorie consiste à concevoir le mouvement effectif d'un astre quelconque comme s'il était véritablement elliptique, mais avec des élémens variables, au lieu d'élémens fixes. Dès lors, Lagrange a établi des formules analytiques entièrement générales, pour déterminer les variations qu'éprouve chacun des six élémens, lorsque la force perturbatrice est donnée. L'étude de la mécanique céleste sera beaucoup simplifiée, quand l'usage direct de cette belle méthode y deviendra prépondérant.

Pour se diriger dans le choix des perturbations dont il convient d'apprécier l'influence, la loi fondamentale de la gravitation permet immédiatement de comparer avec exactitude les diverses influences secondaires propres à chaque cas, du moins en regardant toutes les masses comme bien connues. Il suffit, en effet, de diviser le rapport des masses de deux astres modificateurs par le carré du rapport de leurs distances à l'astre modifié, et ce quotient fait aussitôt distinguer quelle est la force perturbatrice qu'il faut principale-

ment considérer, et quelle peut être, en général, la part d'influence de chacune des autres. Sous ce rapport fondamental, il faut reconnaître que la constitution effective de notre monde favorise éminemment la simplification de nos recherches mathématiques. Car, les astres qui le composent ont tous, comparativement au soleil, des masses extrêmement faibles, ce qui est la condition première de la petitesse habituelle des perturbations; mais, de plus, ils sont peu nombreux, très écartés les uns des autres, et fort inégaux en masse, d'où il résulte que, dans presque tous les cas, et surtout dans les plus importants, le mouvement principal n'est sensiblement modifié que par l'action d'un seul corps. Si, comme il arrive peut-être dans quelque autre monde, les astres du système eussent été, au contraire, plus multipliés, presque égaux en masse, très rapprochés, et beaucoup moins différens de l'astre central, quand même les inclinaisons et les excentricités de leurs orbites eussent continué à être fort petites, il est évident que les perturbations seraient devenues beaucoup plus considérables, et surtout bien plus variées, puisqu'un grand nombre de corps auraient presque également concouru à chacune d'elles. Ainsi, dans un tel arrangement, la mécanique céleste aurait probablement présenté une